2a. Lista de Revisão - MA311

As seguintes questões são de provas ministradas em anos anteriores.

1. Explique detalhadamente.

   (a) Calcule a soma da série:
   $$\sum_{n=2}^{\infty} 5^{-(n+1)} \ln\left(\frac{n^5}{n+1}\right).$$
   Sugestão: $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$ e $\ln a^b = b \ln a$.

   (b) Estude a convergência da série: converge absolutamente ou condicionalmente ou diverge?
   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^{\frac{1}{2}}+1)}{(3n^{\frac{3}{2}}+7n+6)}.$$

   (c) Estude a convergência da série:
   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\ n!}{1.3.5.\ldots(2n+1)}$$

2. (a) Encontre o intervalo de convergência da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{\sqrt{n}} (x+3)^n$. Não esqueça de testar os extremos do intervalo, se for o caso.

   (b) Encontre uma representação em série de potências em torno de $x = 0$ da função $f(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\ dt$.

3. Encontre uma representação em série de potências em torno de $x = 0$ da função $f(x) = x^3 \text{arctg}\ (x^3)$. Sugestão: primeiro encontre a representação em série de potência de arctg $x = \displaystyle\int \frac{1}{x^2+1}\ dx$

4. (a) Calcule o limite da sequência quando $n \to \infty$:
   $$a_n = \cos \frac{n^2+1}{n^2(n+2)}.$$

   (b) Calcule a soma da série:
   $$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k+3} - \frac{1}{k+1}\right).$$

5. (a) Estude a convergência de: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \ln n}{n}$

(b) Encontre o intervalo de convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}(x-1)^n$. Não esqueça de testar os extremos do intervalo, se for o caso.

6. (a) Encontre o intervalo de convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\ 3^n}(x+2)^n$. Não esqueça de testar os extremos do intervalo, se for o caso.

   (b) Encontre uma representação em série de potências em torno de $x = 0$ da função $f(x) = \frac{x}{(1+x^2)^2}$ e determine o intervalo de convergência. Sugestão: $\frac{d}{dx}\frac{1}{(1+x^2)}$.

7. (a) Encontre a solução do sistema linear homogêneo de e.d.o.'s usando o método de autovalores e autovetores:

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 9 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t)$$

   (b) Encontre a solução geral do sistema linear não-homogêneo (cujo sistema homogêneo associado está na parte (a)) utilizando o método de variação de parâmetros:

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 9 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) \ + \begin{pmatrix} \frac{1}{t^2} \\ \frac{1}{t^3} \end{pmatrix}$$

8. Encontre a solução geral do sistema linear não-homogêneo utilizando o método de variação de parâmetros:

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x} \ + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^t$$

9. Encontre a solução geral (real) do sistema linear homogêneo de e.d.o.'s usando o método de autovalores e autovetores:

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t)$$

10. Encontre a solução geral (real) do sistema linear não-homogêneo utilizando o método de variação de parâmetros (indicando claramente a matriz fundamental). Resolva o sistema homogêneo associado pelo método de autovalores e autovetores.

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) \ + \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix}$$

11. Determine os três primeiros termos de cada uma das duas soluções linearmente independentes da equação diferencial

$$(2+x^2)y'' - xy' + 4y = 0$$

da solução em série de potências em torno do ponto $x = 0$.

12. A equação diferencial

$$y'' - 2xy' + \lambda y = 0$$

onde λ é uma constante, é chamada de equação de Hermite. Determine pelo menos os três primeiros termos de cada solução linearmente independente em torno de $x = 0$ e o raio de convergência dessas soluções.

13. (a) Mostre que $x = 0$ é um ponto ordinário para a equação

$$(3 - x^2)y'' - 3xy' - y = 0 \qquad (*)$$

(b) Determine a fórmula de recorrência da solução em série da equação (*);

(c) Determine a fórmula para o coeficiente geral da solução da equação (*);

(d) Encontre a solução por série de potências da equação (*) dado que $y(0) = 2$ e $y'(0) = 3$.

14. Resolva o problema de valor inicial

$$y'' - x^2 y = 0, \quad y(0) = 1 \text{ e } y'(0) = 0$$

através de uma série de potências em torno do ponto $x = 0$.

15. Resolva a equação diferencial

$$(x^2 + 1)y'' + 6xy' + 4y = 0 \quad y(0) = 2 \;\; y'(0) = 3$$

através de uma série de potências em torno do ponto $x = 0$. Encontre a relação de recorrência e as duas soluções linearmente independentes **indicando o termo geral** de cada solução.

16. Considere a equação diferencial $xy'' + y = 0$. Responda as seguintes questões:

(a) Mostre que $x = 0$ é ponto singular regular da equação.

(b) Determine a equação indicial e suas raízes.

(c) Determine a relação de recorrência e a solução em série de potências correspondente à MAIOR raiz da equação indicial encontrando os três primeiros termos não nulos no intervalo $x > 0$.

17. (a) Mostre que $x = 0$ é um ponto singular-regular para a equação

$$x^2 y'' + (x - \frac{1}{2})y' + \frac{1}{2}y = 0 \qquad (*)$$

(b) Encontre uma solução por série da equação (*) na forma

$$y = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \qquad x > 0$$

com r sendo a **maior raiz** da equação indicial associada a equação (*).

(c) Qual o raio mínimo desta solução?

18. Considere a equação diferencial $x^2y'' + xy' + 2xy = 0$. Responda as seguintes questões:

    (a) Mostre que $x = 0$ é ponto singular regular da equação.

    (b) Determine a equação indicial e suas raízes (os expoentes de singularidade)

    (c) Determine a relação de recorrência e a solução em série (de Frobenius) correspondente à MAIOR raiz da equação indicial encontrando os quatro primeiros termos não nulos.

19. Considere a equação diferencial $xy'' + y' - y = 0$. Responda as seguintes questões:

    (a) Mostre que $x = 0$ é ponto singular regular da equação.

    (b) Determine a equação indicial e suas raízes e a relação de recorrência.

    (c) Determine a solução em série de Frobenius correspondente à MAIOR raiz da equação indicial encontrando o termo geral.

20. Seja

$$f(x) = \begin{cases} 0 & 0 < x \leq 1, \\ 2 & 1 < x \leq 2 \\ 0 & 2 < x < 3 \end{cases}$$

    (a) Estenda $f(x)$ para todos os outros valores reais de x como uma função **par** e periódica de período 6. Esboce o gráfico da extensão.

    (b) Estenda $f(x)$ para todos os outros valores reais de x como uma função **ímpar** e periódica de período 6. Esboce o gráfico da extensão.

    (c) Calcule a série de Fourier da extensão **ímpar** de $f(x)$.

21. (a) Dado que a função

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x & \text{se} \quad -1 \leq x < 0 \\ -x + 1 & \text{se} \quad 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

    calcule a série de Fourier.

    (b) Encontre a soma da série $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$ utilizando o item (a).

22. Encontre uma série de Fourier de cossenos que convirja para a seguinte função:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1, \\ 0 & 1 < x < 2 \end{cases}$$

    Sugestão: Encontre a extensão par de $f(x)$.

23. Resolva o seguinte problema de condução do calor usando o método de separação de variáveis justificando detalhadamente TODA a análise:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & 0 \leq x \leq \pi, \quad t > 0; \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0; \\ u(x,0) = 3\text{sen } x + 2\text{sen } 2x - \text{sen } 3x. \end{cases}$$

24. Resolva o seguinte problema de condução do calor usando o método de separação de variáveis justificando detalhadamente TODA a análise:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & 0 \leq x \leq \pi, \quad t > 0; \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0; \\ u(x,0) = x \end{cases}$$

25. Resolva o seguinte problema de de condução do calor usando o método de separação de variáveis, **justificando detalhadamente TODA** a análise:

$$\begin{cases} u_t = 4u_{xx} & 0 < x < 2\pi, \quad t > 0; \\ u_x(0,t) = u_x(2\pi,t) = 0; \\ u(x,0) = f(x), \end{cases}$$

onde $f(x) = -7 \ \cos x + 3 \ \cos \frac{5x}{2} + 8 \ \cos 4x$.

26. Resolva o seguinte problema de condução do calor usando o método de separação de variáveis, **justificando detalhadamente TODA** a análise:

$$\begin{cases} u_t = 4u_{xx} & 0 < x < 2\pi, \quad t > 0; \\ u_x(0,t) = u_x(2\pi,t) = 0; \\ u(x,0) = f(x), \end{cases}$$

onde $f(x) = 4x$.

27. Resolva a seguinte equação da onda usando o método de separação de variáveis **justificando detalhadamente TODA** a análise:

$$\begin{cases} y_{tt} = 9y_{xx} & 0 < x < 4, \quad t > 0; \\ y(0,t) = y(4,t) = 0; \\ y(x,0) = 7 \text{ sen } \pi x + 6 \text{ sen } 2\pi x \quad y_t(x,0) = 0. \end{cases}$$

28. Resolva a seguinte equação da onda usando o método de separação de variáveis **justificando detalhadamente TODA** a análise:

$$\begin{cases} y_{tt} = 9y_{xx} & 0 < x < 4, \quad t > 0; \\ y(0,t) = y(4,t) = 0; \\ y(x,0) = 0 \quad y_t(x,0) = x. \end{cases}$$