$1^{\underline{a}}$ Lista de Revisão

MA-311 — Cálculo III

$1^{\underline{o}}$ Semestre de 2016

As questões abaixo são retiradas de provas de semestres passados.

1. Resolva o seguinte P.V.I:

$$x^2y' + xy = x\cos x, \quad x > 0 \ \text{ e } \ y(\frac{\pi}{2}) = 0$$

2. Encontrar a solução, na forma implícita, da seguinte e.d.o usando a substituição $v = x + y + 1$:

$$y' = \frac{-x - y + (x + y + 1)^2}{(x + y + 1)}$$

3. (a) Mostre que a equação abaixo é homogênea e resolva-a.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y - x}{2x - y},$$

   (b) Considere a equação

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y - x + 5}{2x - y - 4},$$

   Fazendo a substituição $x = X - h$ e $y = Y - k$ encontre h e k de tal forma que a equação seja homogênea.

4. (a) Mostre que a substituição $v = \ln x$ na e.d.o $x^2y'' - 3xy' + 4y = x$ transforma a equação em $\frac{d^2y}{dv^2} - 4\frac{dy}{dv} + 4y = e^v$.

   (b) Resolva a equação não homogênea $\frac{d^2y}{dv^2} - 4\frac{dy}{dv} + 4y = e^v$ via o método de coeficientes indeterminados.

5. Dada a equação

$$3(1 + x^2)y' = 2xy(y^3 - 1)$$

   (a) Mostre que a equação é de Bernoulli e indique qual a substituição (i.e. mudança de variável) que a torna linear?

   (b) Resolva-a pelo método de Bernoulli.

6. (a) Dado que o fator integrante $\mu(x)$ da equação

$$M(x,y)\ dx + N(x,y)\ dy = 0$$

é uma função apenas de x, mostre que

$$\mu(y) = \exp^{\int \frac{M_y - N_x}{N}\ dx}$$

(b) Mostre que

$$(x+y)\ dx + (x\ln x)\ dy = 0$$

não é exata e calcule o fator integrante que a torna exata.

(c) Resolva a equação diferencial exata para $x > 0$.

7. Considerar a e.d.o.

$$(x+1)y'' - (x+2)y' + y = e^x(x+1)^2$$

(a) Encontrar a solução geral da equação homogênea associada sabendo que $y = e^x$ é uma solução da equação homogênea. Use o método de **redução de ordem** para determinar uma segunda solução da forma $y_2(x) = v(x)y_1(x)$ e prove que será dada por $y_2(x) = -(x+2)$.

(b) Usando variação de parâmetros determine a solução particular da equação não homogênea.

8. Dada a e.d.o:

$$y^{(5)} + y^{(2)} = e^{-x} + 5$$

(a) Resolva a equação homogênea associada sabendo que $r^3 + 1 = (r+1)(r^2 - r + 1)$.

(b) Usando o método de coeficientes indeterminados apresente e justifique a forma da solução particular. Não calcule os coeficientes!

9. Resolva o seguinte problema de valor inicial:

$$y'' + 2y(y')^3 = 0, \quad y(0) = 3 \ \text{ e } \ y'(0) = \frac{1}{3}$$

10. Resolva a seguinte equação diferencial:

$$(D-4)^3(D^3 - D^2 + D - 1)y = 5x^2e^{4x} + 8\text{sen}\ x$$

(a) Qual é a equação característica da equação homogênea associada?

(b) Encontre as raízes da equação característica com multiplicidade.

(c) Encontre a solução complementar da equação homogênea associada.

(d) Encontre a forma da solução particular da equação diferencial pelo método de coeficientes indeterminados.(Não calcule as constantes.)

(e) Qual a solução geral da equação diferencial?

11. Considere a equação diferencial:

$$x^2y'' - 3xy' + 4y = x^4 \quad x > 0$$

(a) A equação homogênea associada de Euler-Cauchy. Uma das soluções é $y_1 = x^2$. Prove via redução de ordem que a segunda solução é $y_2 = x^2 \ln x$.

(b) Mostre que $y_1 = x^2$ e $y_2 = x^2 \ln x$ são linearmente independentes calculando o Wronskiano. Por que o Wronskiano ser igual a zero em $x = 0$ não contradiz o teorema que garante que as soluções são linearmente independentes?

(c) Dado que y_1 e y_2 de (a) são soluções da equação homogênea associada, utilize o método de variação de parâmetros para calcular uma solução particular da equação diferencial.

12. Resolva por transformadas de Laplace o seguinte PVI:

$$y'' + 2y' + 5y = 4\cos t\ \delta\,(t - 2\pi)$$

onde $y(0) = 1$ e $y'(0) = 0$.

13. Resolva por transformadas de Laplace o seguinte PVI:

$$y' + y = \int_0^t (t - \tau)\cos\tau d\tau$$

onde $y(0) = 0$.

14. Calcule

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\ln\,\left(\frac{\mathrm{s}-3}{\mathrm{s}+1}\right)\right\}$$

Sugestão: $\mathcal{L}\{tf(t)\} = -F'(s)$ onde $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$.

15. Resolva por transformada de Laplace o seguinte PVI:

$$y'' + 4y = \delta\,(t - \pi) - \delta\,(t - 2\pi)$$

onde $y(0) = 1$ e $y'(0) = 0$. Calcule $y(\pi/2)$, $y(3\pi/2)$ e $y(3\pi)$.

16. Resolva por transformadas de Laplace o seguinte PVI:

$$y'' + y = u_{\frac{\pi}{2}}(t) + 3\delta\left(t - \frac{3\pi}{2}\right)$$

$$y(0) = y'(0) = 0.$$

17. (a) Expresse $f(t)$ utilizando funções escada $u(t-a) = u_a(t)$:

$$f(t) = \begin{cases} t-1, & 0 \leq t < 1 \\ t^2, & 1 \leq t < 2 \\ 1 & t \geq 2 \end{cases}$$

(b) Utilizando a expressão da função $f(t)$ encontrada em (a) calcule a transformada de Laplace $\mathcal{L}\{f(t)\}$.

18. (a) Seja $x = x(t)$. Mostre que $\mathcal{L}\{tx'\} = -sX'(s) - X(s)$ onde $\mathcal{L}\{x\} = X(s)$.

(b) Mostre que $\mathcal{L}\{tx''\} = -2sX(s) - s^2X'(s) + x(0)$ onde $\mathcal{L}\{x\} = X(s)$.

(c) Resolva a equação diferencial

$$tx'' + (t-2)x' + x = 0, \quad x(0) = 0$$

usando transformadas de Laplace.

19. Calcule a inversa da transformada de Laplace de $F(s)$:

$$F(s) = e^{-4s}\frac{2s-1}{s^2+4}$$

20. Calcule a inversa da transformada de Laplace de $F(s)$. (Experimente usar duas vezes a propriedade da transformada da integral):

$$F(s) = \frac{1}{s^2(s+1)^2}$$

21. Calcule a inversa da transformada de Laplace de $F(s)$ usando a propriedade da integral da transformada:

$$F(s) = \frac{s}{(s^2+1)^2}$$