

Aula 9

Transformada de Laplace e sua Inversa.

MA311 - Cálculo III

Marcos Eduardo Valle

Departamento de Matemática Aplicada
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Universidade Estadual de Campinas

Na aula de hoje, iniciaremos o estudo da transformada de Laplace.

A transformada de Laplace é uma poderosa ferramenta que transforma uma equação diferencial, ou um problema de valor inicial, em uma equação algébrica.

Resolvendo a equação algébrica, podemos determinar a solução da equação diferencial ou do problema de valor inicial usando a transformada inversa.

Na prática, geralmente determinamos a transformada inversa utilizando as propriedades da transformada de Laplace e uma tabela.

Definição 1 (Transformada de Laplace)

Dada uma f uma função definida para todo $t \geq 0$, a transformada de Laplace de f é uma função F definida por

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt,$$

para todos os valores de s para os quais a integral imprópria converge.

Observação:

Lembre-se que a integral imprópria acima é definida como o limite

$$\int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st} f(t) dt.$$

Exemplo 2

Determine a transformada de Laplace da função constante

$$f(t) = 1, \quad \forall t \geq 0.$$

Exemplo 2

Determine a transformada de Laplace da função constante

$$f(t) = 1, \quad \forall t \geq 0.$$

Resposta: A transformada de Laplace é

$$\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}, \quad \forall s > 0.$$

Exemplo 3

Determine a transformada de Laplace da função

$$f(t) = e^{at}, \quad \forall t \geq 0.$$

Exemplo 3

Determine a transformada de Laplace da função

$$f(t) = e^{at}, \quad \forall t \geq 0.$$

Resposta: A transformada de Laplace é

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}, \quad \forall s > a.$$

Exemplo 4

Determine a transformada de Laplace da função

$$f(t) = \text{sen}(at), \quad \forall t \geq 0.$$

Exemplo 4

Determine a transformada de Laplace da função

$$f(t) = \text{sen}(at), \quad \forall t \geq 0.$$

Resposta: A transformada de Laplace é

$$\mathcal{L}\{\text{sen}(at)\} = \frac{a}{s^2 + a^2}, \quad \forall s > a.$$

Exemplo 5

Determine a transformada de Laplace da função

$$f(t) = \cos(at), \quad \forall t \geq 0.$$

Exemplo 5

Determine a transformada de Laplace da função

$$f(t) = \cos(at), \quad \forall t \geq 0.$$

Resposta: A transformada de Laplace é

$$\mathcal{L}\{\cos(at)\} = \frac{s}{s^2 + a^2}, \quad \forall s > a.$$

Teorema 6 (Linearidade)

Dadas duas funções f e g e duas constantes a e b , temos que

$$\mathcal{L}\{af(t) + bg(t)\} = a\mathcal{L}\{f(t)\} + b\mathcal{L}\{g(t)\},$$

para todos os valores de s para os quais as transformadas de Laplace de f e g existem.

Exemplo 7

Determine a transformada de Laplace da função

$$f(t) = 3e^{2t} + 2 \operatorname{sen}^2(3t), \quad \forall t \geq 0.$$

Exemplo 7

Determine a transformada de Laplace da função

$$f(t) = 3e^{2t} + 2 \operatorname{sen}^2(3t), \quad \forall t \geq 0.$$

Resposta: A transformada de Laplace é

$$\mathcal{L}\{3e^{2t} + 2 \operatorname{sen}^2(3t)\} = \frac{3}{s-2} + \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+36}, \quad \forall s > a.$$

Transformada de Laplace Inversa

Uma função contínua $f(t)$, para $t \geq 0$, é unicamente determinada pela sua transformada de Laplace $F(s)$.

Dessa forma, podemos escrever

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} \iff f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\},$$

em que $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ denota a transformada de Laplace inversa.

Tal como \mathcal{L} , a transformada de Laplace inversa \mathcal{L}^{-1} é linear também, ou seja,

$$\mathcal{L}^{-1}\{aF(s) + bG(s)\} = a\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} + b\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}.$$

Exemplo 8

Determine a transformada de Laplace inversa de

$$F(s) = \frac{3s + 5}{2s^2 + 3}, \quad \forall s \geq 0.$$

Exemplo 8

Determine a transformada de Laplace inversa de

$$F(s) = \frac{3s + 5}{2s^2 + 3}, \quad \forall s \geq 0.$$

Resposta: A transformada de Laplace inversa é

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{3s + 5}{2s^2 + 3} \right\} = \frac{3}{2} \cos \left(\sqrt{\frac{3}{2}} t \right) + \frac{5\sqrt{6}}{6} \text{sen} \left(\sqrt{\frac{3}{2}} t \right), \quad \forall t > 0.$$

Exemplo 9

Determine a transformada de Laplace inversa de

$$F(s) = \frac{s - 1}{s^2 - s - 2}, \quad \forall s \geq 0.$$

Exemplo 9

Determine a transformada de Laplace inversa de

$$F(s) = \frac{s - 1}{s^2 - s - 2}, \quad \forall s \geq 0.$$

Resposta: A transformada de Laplace inversa é

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s - 1}{s^2 - s - 2} \right\} = \frac{1}{3} e^{2t} + \frac{2}{3} e^{-t}, \quad \forall t > 0.$$