

# Aula 9

# Transformada de Laplace e sua Inversa.

MA311 - Cálculo III

Marcos Eduardo Valle

Departamento de Matemática Aplicada  
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica  
Universidade Estadual de Campinas

Na aula de hoje, iniciaremos o estudo da transformada de Laplace.

A transformada de Laplace é uma poderosa ferramenta que transforma uma equação diferencial, ou um problema de valor inicial, em uma equação algébrica.

Resolvendo a equação algébrica, podemos determinar a solução da equação diferencial ou do problema de valor inicial usando a transformada inversa.

Na prática, geralmente determinamos a transformada inversa utilizando as propriedades da transformada de Laplace e uma tabela.

## Definição 1 (Transformada de Laplace)

Dada uma  $f$  uma função definida para todo  $t \geq 0$ , a transformada de Laplace de  $f$  é uma função  $F$  definida por

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt,$$

para todos os valores de  $s$  para os quais a integral imprópria converge.

### Observação:

Lembre-se que a integral imprópria acima é definida como o limite

$$\int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st} f(t) dt.$$

## Exemplo 2

Determine a transformada de Laplace da função constante

$$f(t) = 1, \quad \forall t \geq 0.$$

## Exemplo 2

Determine a transformada de Laplace da função constante

$$f(t) = 1, \quad \forall t \geq 0.$$

**Resposta:** A transformada de Laplace é

$$\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}, \quad \forall s > 0.$$

## Exemplo 3

Determine a transformada de Laplace da função

$$f(t) = e^{at}, \quad \forall t \geq 0.$$

## Exemplo 3

Determine a transformada de Laplace da função

$$f(t) = e^{at}, \quad \forall t \geq 0.$$

**Resposta:** A transformada de Laplace é

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}, \quad \forall s > a.$$

## Exemplo 4

Determine a transformada de Laplace da função

$$f(t) = \text{sen}(at), \quad \forall t \geq 0.$$

## Exemplo 4

Determine a transformada de Laplace da função

$$f(t) = \text{sen}(at), \quad \forall t \geq 0.$$

**Resposta:** A transformada de Laplace é

$$\mathcal{L}\{\text{sen}(at)\} = \frac{a}{s^2 + a^2}, \quad \forall s > a.$$

## Exemplo 5

Determine a transformada de Laplace da função

$$f(t) = \cos(at), \quad \forall t \geq 0.$$

## Exemplo 5

Determine a transformada de Laplace da função

$$f(t) = \cos(at), \quad \forall t \geq 0.$$

**Resposta:** A transformada de Laplace é

$$\mathcal{L}\{\cos(at)\} = \frac{s}{s^2 + a^2}, \quad \forall s > a.$$

## Teorema 6 (Linearidade)

*Dadas duas funções  $f$  e  $g$  e duas constantes  $a$  e  $b$ , temos que*

$$\mathcal{L}\{af(t) + bg(t)\} = a\mathcal{L}\{f(t)\} + b\mathcal{L}\{g(t)\},$$

*para todos os valores de  $s$  para os quais as transformadas de Laplace de  $f$  e  $g$  existem.*

## Exemplo 7

Determine a transformada de Laplace da função

$$f(t) = 3e^{2t} + 2 \operatorname{sen}^2(3t), \quad \forall t \geq 0.$$

## Exemplo 7

Determine a transformada de Laplace da função

$$f(t) = 3e^{2t} + 2 \operatorname{sen}^2(3t), \quad \forall t \geq 0.$$

**Resposta:** A transformada de Laplace é

$$\mathcal{L}\{3e^{2t} + 2 \operatorname{sen}^2(3t)\} = \frac{3}{s-2} + \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + 36}, \quad \forall s > a.$$

# Transformada de Laplace Inversa

Uma função contínua  $f(t)$ , para  $t \geq 0$ , é unicamente determinada pela sua transformada de Laplace  $F(s)$ .

Dessa forma, podemos escrever

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} \iff f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\},$$

em que  $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$  denota a transformada de Laplace inversa.

Tal como  $\mathcal{L}$ , a transformada de Laplace inversa  $\mathcal{L}^{-1}$  é linear também, ou seja,

$$\mathcal{L}^{-1}\{aF(s) + bG(s)\} = a\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} + b\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}.$$

## Exemplo 8

Determine a transformada de Laplace inversa de

$$F(s) = \frac{3s + 5}{2s^2 + 3}, \quad \forall s \geq 0.$$

## Exemplo 8

Determine a transformada de Laplace inversa de

$$F(s) = \frac{3s + 5}{2s^2 + 3}, \quad \forall s \geq 0.$$

**Resposta:** A transformada de Laplace inversa é

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{3s + 5}{2s^2 + 3} \right\} = \frac{3}{2} \cos \left( \sqrt{\frac{3}{2}} t \right) + \frac{5\sqrt{6}}{6} \text{sen} \left( \sqrt{\frac{3}{2}} t \right), \quad \forall t > 0.$$

## Exemplo 9

Determine a transformada de Laplace inversa de

$$F(s) = \frac{s - 1}{s^2 - s - 2}, \quad \forall s \geq 0.$$

## Exemplo 9

Determine a transformada de Laplace inversa de

$$F(s) = \frac{s-1}{s^2-s-2}, \quad \forall s \geq 0.$$

**Resposta:** A transformada de Laplace inversa é

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-1}{s^2-s-2}\right\} = \frac{1}{3}e^{2t} + \frac{2}{3}e^{-t}, \quad \forall t > 0.$$