Aula 7
Equações Não-Homogêneas com Coeficientes Constantes e o Método dos Coeficientes a Determinar.

MA311 - Cálculo III

Marcos Eduardo Valle

Departamento de Matemática Aplicada
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Universidade Estadual de Campinas

Introdução

Nas aulas anteriores, vimos como resolver EDOs homogêneas com coeficientes constantes.

Na aula de hoje, voltaremos nossa atenção para EDOs não-homogêneas da forma

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = f(x),$$

em que f é uma função contínua em um intervalo aberto I.

Solução Geral

Suponha que y_1 e y_2 são soluções da equação não-homogênea

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = f(x).$$

Defina

$$y = y_1 - y_2.$$

Substituindo na equação acima, concluímos que

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0,$$

ou seja, a diferença de duas soluções da equação não-homogênea é solução da EDO homogênea associada.

Dessa forma, podemos escrever a solução geral da EDO não-homogênea na forma

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x),$$

em que y_h é a solução geral da equação homogênea e y_p é uma solução particular da equação não-homogênea.

Concluindo, para resolver uma EDO não-homogênea devemos:

1. Obter uma solução geral y_h da equação homogênea.
2. Obter uma solução particular y_p da equação homogênea y_h.
3. A solução geral da equação não-homogênea é

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x).$$

Método dos Coeficientes a Determinar

O **método dos coeficientes a determinar**, também chamado **método dos coeficientes indeterminados**, é usado para encontrar uma solução particular da equação não-homogênea.

O método consiste em assumir, com base na função f e na solução y_h, uma forma para a solução particular y_p que dependente de coeficientes ainda não especificados.

Polinômio

Se f é um polinômio de grau m, admitimos

$$y_p(x) = A_m x^m + A_{m-1} x^{m-1} + \ldots + A_1 x + A_0,$$

que também é um polinômio de grau m. Teremos uma solução particular da equação não-homogênea se determinarmos os coeficientes $A_0, A_1, \ldots, A_m$.

Exemplo 1

Encontre uma solução particular da equação não-homogênea

$$y'' + 3y' + 4y = 3x + 2.$$

Exemplo 1

Encontre uma solução particular da equação não-homogênea

$$y'' + 3y' + 4y = 3x + 2.$$

Resposta: Uma solução particular da EDO é

$$y_p(x) = \frac{3}{4}x - \frac{1}{16}.$$

Exponencial

Se f é uma função exponencial da forma

$$f(x) = ae^{\beta x},$$

admitimos uma solução particular da forma

$$y_p(x) = Ae^{\beta x}.$$

Exemplo 2

Encontre uma solução particular da equação não-homogênea

$$y'' - 4y = 2e^{3x}.$$

Exponencial

Se f é uma função exponencial da forma

$$f(x) = ae^{\beta x},$$

admitimos uma solução particular da forma

$$y_p(x) = Ae^{\beta x}.$$

Exemplo 2

Encontre uma solução particular da equação não-homogênea

$$y'' - 4y = 2e^{3x}.$$

Resposta: Uma solução particular da EDO é

$$y_p(x) = \frac{2}{5}e^{3x}.$$

Seno e Cosseno

Se f é uma combinação linear das funções seno e cosseno, ou seja,

$$f(x) = a\cos(\omega x) + b\,\mathrm{sen}(\omega x),$$

admitimos uma solução particular da forma

$$y_p(x) = A\cos(\omega x) + B\,\mathrm{sen}(\omega x).$$

Exemplo 3

Encontre uma solução particular da equação não-homogênea

$$3y'' + y' - 2y = 2\cos x.$$

Seno e Cosseno

Se f é uma combinação linear das funções seno e cosseno, ou seja,

$$f(x) = a\cos(\omega x) + b\,\text{sen}(\omega x),$$

admitimos uma solução particular da forma

$$y_p(x) = A\cos(\omega x) + B\,\text{sen}(\omega x).$$

Exemplo 3

Encontre uma solução particular da equação não-homogênea

$$3y'' + y' - 2y = 2\cos x.$$

Resposta: Uma solução particular da EDO é

$$y_p(x) = -\frac{5}{13}\cos x + \frac{1}{13}\,\text{sen}\, x.$$

Exemplo 4

Resolva o problema de valor inicial (PVI)

$$y'' - 3y' + 2y = 3e^{-x} - 10\cos(3x), \quad y(0) = 1 \quad \text{e} \quad y'(0) = 2.$$

Exemplo 4

Resolva o problema de valor inicial (PVI)

$$y'' - 3y' + 2y = 3e^{-x} - 10\cos(3x), \quad y(0) = 1 \quad \text{e} \quad y'(0) = 2.$$

Resposta: A solução do PVI é

$$y(x) = -\frac{1}{2}e^{x} + \frac{6}{13}e^{2x} + \frac{1}{2}e^{-x} + \frac{7}{13}\cos(3x) + \frac{9}{13}\sin(3x).$$

O seguinte exemplo revela uma possível dificuldade do método dos coeficientes a determinar.

Exemplo 5

Encontre uma solução particular da equação não-homogênea

$$y'' - 4y = 2e^{2x}.$$

O seguinte exemplo revela uma possível dificuldade do método dos coeficientes a determinar.

Exemplo 5

Encontre uma solução particular da equação não-homogênea

$$y'' - 4y = 2e^{2x}.$$

Resposta: Uma solução particular da EDO é

$$y_p(x) = \frac{1}{2}xe^{2x},$$

que é obtida considerando uma solução da forma $y_p(x) = Axe^{2x}$.

Em geral, no método dos coeficientes a determinar podemos admitir que a solução particular são combinações de funções da forma

$$x^s\Big\{P_m(x)e^{\beta x}\cos(\omega x) + Q_m(x)e^{\beta x}\,\mathrm{sen}(\omega x)\Big\},$$

em que

$$P_m(x) = A_0 + A_1 x + \ldots + A_m x^m,$$

e

$$Q_m(x) = B_0 + B_1 x + \ldots + B_m x^m,$$

são polinômios de grau m.

Exemplo 6

Encontre uma solução particular da equação não-homogênea

$$y^{(3)} + y'' = 3e^x + 4x^2.$$

Exemplo 6

Encontre uma solução particular da equação não-homogênea

$$y^{(3)} + y'' = 3e^x + 4x^2.$$

Resposta: Uma solução particular da EDO é

$$y_p(x) = \frac{3}{2}e^x + 4x^2 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{1}{3}x^4.$$