Aula 6
Método da Redução de Ordem, Raízes Repetidas da Equação Característica e a Equação de Euler.

MA311 - Cálculo III

Marcos Eduardo Valle

Departamento de Matemática Aplicada
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Universidade Estadual de Campinas

Equações com Coeficientes Constantes

Considere uma EDO linear homogênea de ordem $n \geqslant 2$ com coeficientes constantes:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0.$$

Vamos buscar uma solução não-trivial na forma

$$y(x) = e^{rx}.$$

Note que a k-ésima derivada de y satisfaz

$$y^{(k)}(x) = r^k e^{rx} = r^k y(x).$$

Substituindo na EDO e simplificando, obtemos

$$a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \ldots + a_1 r + a_0 = 0,$$

chamada **equação característica** para a EDO.

Raízes Distintas da Equação Característica

Se r é uma solução da equação característica, então $y(x) = e^{rx}$ é uma solução da EDO.

Sobretudo, como $a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \ldots + a_1 r + a_0 = 0$ possui n soluções $r_1, r_2, \ldots, r_n$, podemos expressar a solução geral da EDO como

$$y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} + \ldots + c_n e^{r_n x},$$

desde que $r_i \neq r_j$ para todo $i \neq j$, ou seja, se não houverem raízes repetidas.

Na aula de hoje, veremos como determinar a solução geral quando $r_i = r_j$ para algum $i \neq j$, ou seja, vamos considerar o caso em que a equação característica possui raízes repetidas.

Vamos começar considerando $n = 2$.

Método da Redução de Ordem

Suponha que conhecemos uma solução y_1 de uma equação linear homogênea de segunda ordem

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \tag{1}$$

No **método da redução de ordem**, determinamos uma função $u(x)$ tal que

$$y_2(x) = u(x)y_1(x),$$

seja uma nova (e linearmente independente) solução de (1).

Substituindo y_2 em (1) e lembrando que y_1 é uma solução, obtemos

$$u(x) = \int \frac{e^{-P(x)}}{[y_1(x)]^2}dx, \quad \text{em que} \quad P(x) = \int p(x)dx, \tag{2}$$

é uma primitiva de p.

Exemplo 1

Sabendo que $y_1(x) = e^{-2x}$ é uma solução da EDO

$$y'' + 4y' + 4y = 0,$$

aplique o método da redução de ordem para determinar uma segunda solução $y_2(x)$. Verifique se y_1 e y_2 são linearmente independentes.

Exemplo 1

Sabendo que $y_1(x) = e^{-2x}$ é uma solução da EDO

$$y'' + 4y' + 4y = 0,$$

aplique o método da redução de ordem para determinar uma segunda solução $y_2(x)$. Verifique se y_1 e y_2 são linearmente independentes.

Resposta: Pelo método da redução de ordem, encontramos $u(x) = x$ e, portanto,

$$y_2(x) = xe^{-2x}.$$

O wronskiano é

$$W = e^{-4x} \neq 0,$$

e, portanto, y_1 e y_2 são linearmente independentes.

Raízes Repetidas da Equação Característica

Considere a EDO com coeficientes constantes

$$ay'' + by' + cy = 0,$$

em que $b^2 - 4ac = 0$.

Nesse caso, a única solução da equação característica é

$$\alpha = -\frac{b}{2a}.$$

Aplicando o método da redução de ordem em

$$y'' + \frac{b}{a}y' + \frac{c}{a}y = 0,$$

com $y_1(x) = e^{\alpha x}$, obtemos

$$u(x) = x.$$

Concluindo, uma segunda solução da EDO é

$$y_2(x) = xe^{\alpha x}.$$

Exemplo 2

Determine a solução do PVI

$$y'' + 2y' + y = 0, \quad y(0) = 5 \quad \text{e} \quad y'(0) = -3.$$

Exemplo 2

Determine a solução do PVI

$$y'' + 2y' + y = 0, \quad y(0) = 5 \quad \text{e} \quad y'(0) = -3.$$

Resposta: A solução do PVI é

$$y(x) = 5e^{-x} + 2xe^{-x}.$$

Raízes Repetidas da Equação Característica

De um modo geral, se a equação característica

$$a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \ldots + a_2 r^2 + a_1 r + a_0 = 0,$$

associada à EDO homogênea com coeficientes constantes

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0,$$

tem uma raiz α com multiplicidade k, então

$$y_1(x) = e^{\alpha x},\ y_2(x) = x e^{\alpha x}, \quad \ldots \quad y_k(x) = x^{k-1} e^{\alpha x},$$

são soluções linearmente independentes da EDO.

Exemplo 3

Encontre a solução geral da EDO

$$9y^{(5)} - 6y^{(4)} + y^{(3)} = 0.$$

Exemplo 3

Encontre a solução geral da EDO

$$9y^{(5)} - 6y^{(4)} + y^{(3)} = 0.$$

Resposta: A solução geral da EDO é

$$y(x) = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 e^{x/3} + c_5 x e^{x/3}.$$

Exemplo 4 (Equação de Euler)

Uma EDO da forma

$$ax^2y'' + bxy' + cy = 0,$$

em que a, b e c são constantes é chamada **equação de Euler.**
Uma equação de Euler pode ser transformada na EDO com coeficientes constantes

$$a\frac{d^2y}{dv^2} + (b-a)\frac{dy}{dv} + cy = 0.$$

considerando $v = \ln x$.
Alternativamente, podemos buscar soluções da forma

$$y(x) = x^r,$$

e proceder de forma similar às EDOs com coeficientes constantes.

Exemplo 5

Determine a solução geral da equação de Euler

$$2x^2y'' + 3xy' - y = 0, \quad x > 0.$$

Exemplo 5

Determine a solução geral da equação de Euler

$$2x^2y'' + 3xy' - y = 0, \quad x > 0.$$

Resposta: A solução geral da EDO é

$$y(x) = c_1\sqrt{x} + \frac{c_2}{x}.$$

Considerações Finais

Na aula de hoje apresentamos o método da redução de ordem.

Vimos como o método da redução de ordem pode ser usado para determinar a solução de uma EDO com coeficientes constantes cuja equação característica possui raízes repetidas.

Finalmente, apresentamos as equações de Euler, que podem ser transformadas numa EDO com coeficientes constantes. Alternativamente, elas podem ser resolvidas de forma similar às equações com coeficientes constantes.