Aula 4 Teorema de Existência e Unicidade e Redução de Ordem.

MA311 - Cálculo III

Marcos Eduardo Valle

Departamento de Matemática Aplicada
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Universidade Estadual de Campinas

Introdução

Até o momento, apresentamos diversos métodos para a resolução de equações diferenciais ordinárias (EDO) de primeira ordem.

Na aula de hoje, voltaremos nossa atenção para uma questão primordial: a existência e unicidade da solução de um problema de valor inicial (PVI).

Com efeito, só podemos falar “da solução do PVI” se ela existir e for única!

Exemplo 1

O PVI

$$y' = \frac{1}{x}, \quad y(0) = 0,$$

não admite solução.
Com efeito, a solução da EDO é

$$y(x) = \ln|x| + c,$$

que não está definida para $x = 0$. Portanto, ela não pode satisfazer a condição inicial $y(0) = 0$.

Exemplo 2

O PVI

$$y' = 2\sqrt{y}, \quad y(0) = 0,$$

admite duas soluções:

$$y_1(x) = x^2 \quad \text{e} \quad y_2(x) = 0.$$

Teorema 3 (Existência e Unicidade da Solução)

Se f e sua derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x}$ são contínuas em um retângulo

$$R = (\alpha, \beta) \times (\gamma, \delta) = \{(x, y) : \alpha < x < \beta, \gamma < y < \delta\},$$

que contém o ponto (x_0, y_0), então o problema de valor inicial

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0,$$

admite uma única solução $y \equiv y(x)$ para todo x num intervalo $I \subseteq (\alpha, \beta)$ que contém x_0.

A demonstração do Teorema 3 utiliza o **método das aproximações sucessivas**, também chamado **método iterativo de Picard.** Ela também está baseada na formulação da EDO em termos da equação integral equivalente

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s)ds.$$

Exemplo 4

Vimos que o PVI

$$y' = 2\sqrt{y}, \quad y(0) = 0,$$

admite duas soluções. Logo, a hipótese do Teorema 3 não é satisfeita. Com efeito, a derivada parcial

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{y}},$$

é descontínua em $y = 0$.

Exemplo 5

Considere o PVI

$$y' = y^2, \quad y(0) = 1.$$

Note que

$$f(x, y) = y^2 \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y,$$

são ambas contínuas em todo plano xy. Em particular, no retângulo $R = (-2, 2) \times (0, 2)$ que contém o ponto $(0, 1)$. Pelo Teorema 3, o PVI admite uma única solução $y \equiv y(x)$ para x em um intervalo $I \subseteq (-2, 2)$. De fato, a única solução é

$$y(x) = \frac{1}{1 - x}, \quad x \neq 1$$

que está definida no intervalo $I = (-2, 1) \subseteq (-2, 2)$.

Exemplo 6

Considere o PVI

$$xy' = 2y, \quad y(a) = b.$$

Pode-se mostrar que o PVI:

(a) Possui infinitas soluções se $a = b = 0$.

(b) Não admite solução se $a = 0$ e $b \neq 0$.

(c) Admite uma única solução próximo de (a, b) se $a \neq 0$.

A hipótese do Teorema 3 não é satisfeita porque

$$f(x, y) = \frac{2y}{x} \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2}{x},$$

não são contínuas quando $x = 0$. Além disso, a solução somente da EDO é

$$y(x) = Cx^2.$$

Vale enfatizar que o PVI do exemplo anterior admite uma única solução **próximo** para x próximo de $a \neq 0$.

Com efeito, se $a = -1$ e $b = 1$, então para qualquer valor da constante c, a função dada por

$$y(x) = \begin{cases} x^2, & x \leqslant 0, \\ cx^2, & x > 0, \end{cases}$$

é solução do PVI.

Em outras palavras, a solução do PVI não é **única** se considerarmos $y(x)$ para qualquer x.

A unicidade é garantida quando consideramos x em um intervalo $I \subseteq (-\infty, 0)$. Nesse caso, a única solução é

$$y(x) = x^2.$$

Equações de 2^a Ordem Redutíveis

Uma EDO de 2^a ordem

$$F(x, y, y', y'') = 0,$$

pode ser reduzidas à uma EDO de 1^a ordem se ou x ou y não aparece na equação.

Quando a EDO de 2^a ordem não depende de y:

Fazendo a mudança de variável

$$v = y' \quad \text{e} \quad y'' = v',$$

a EDO de 2^a ordem $F(x, y', y'') = 0$ pode ser escrita como

$$F(x, v, v'') = 0, \tag{1}$$

que é uma EDO de 1^a ordem.

Se $v \equiv v(x; c_1)$ é a solução de (1), que depende de x e uma constante c_1, então a solução da EDO de 2^a ordem é

$$y(x) = \int v(x; c_1)dx + c_2.$$

Exemplo 7

Resolva a EDO

$$xy'' + 2y' = 6x.$$

Exemplo 7

Resolva a EDO
$$xy'' + 2y' = 6x.$$

Resposta: A solução é
$$y(x) = x^2 + \frac{c_1}{x} + c_2.$$

Quando a EDO de 2^a ordem não depende de x:

Fazendo a mudança de variável

$$v = y' \quad \text{e} \quad y'' = vv',$$

em que $v \equiv v(y)$, a EDO de 2^a ordem $F(y, y', y'') = 0$ pode ser escrita como

$$F(y, v, vv') = 0, \tag{2}$$

que é uma EDO de 1^a ordem.

Se $v \equiv v(y; c_1)$ é a solução de (2), que depende de y e uma constante c_1, então a solução da EDO de 2^a ordem é dada implicitamente por

$$x(y) = \int \frac{1}{v(y; c_1)} dy + c_2.$$

Exemplo 8

Resolva a EDO

$$yy'' = (y')^2.$$

Exemplo 8

Resolva a EDO

$$yy'' = (y')^2.$$

Resposta: A solução é dada implicitamente por

$$c_1 x = \ln y + c_2,$$

ou, equivalentemente,

$$y(x) = Ae^{bx}.$$

Considerações Finais

Na aula de hoje enunciamos e discutimos o teorema que garante a existência e unicidade de um PVI.

Vimos também que, em alguns casos particulares, uma EDO de segunda ordem pode ser reduzida a uma EDO de primeira ordem efetuando uma mudança de variável apropriada.