Aula 27
Separação de Variáveis e a Equação de Laplace.

MA311 - Cálculo III

Marcos Eduardo Valle

Departamento de Matemática Aplicada
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Universidade Estadual de Campinas

Na aula de hoje estudaremos a equação de Laplace, também chamada equação do potencial, que descreve problemas de difusão independente do tempo.

Em termos matemáticos, a equação de Laplace é

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad (x, y) \in \Omega$$

em que $u \equiv u(x, y)$ é uma função que depende variáveis espaciais x e y em uma região Ω.

A equação de Laplace, acompanhada de condições de contorno sobre a fronteira de Ω, é chamado **problema de contorno**. Os principais problemas de contorno são:

- **Problema de Dirichlet:** No qual são dados os valores de u na fronteira de Ω.
- **Problema de Neumann:** Na qual são fornecidos os valores da derivada de u normal à fronteira de Ω.

Problema de Dirichlet num Retângulo

Considere o problema

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & \forall 0 < x < a \quad \text{e} \quad \forall 0 < y < b, \\ u(x,0) = 0, \quad u(x,b) = 0, & \forall 0 < x < a, \\ u(0,y) = 0, \quad u(a,y) = f(y), & \forall 0 \leqslant y \leqslant b, \end{cases}$$

em que f é uma função dada em $0 \leqslant y \leqslant b$.

Para resolver esse problema, admitimos

$$u(x,y) = X(x)Y(y).$$

Dessa forma, encontramos as equações

$$X'' - \lambda X = 0 \quad \text{e} \quad Y'' + \lambda Y = 0,$$

em que λ é a constante de separação.

Substituindo $u(x,y) = X(x)Y(y)$ nas condições de contorno homogênea

$$u(x,0) = X(x)Y(0) = 0 \quad \text{e} \quad u(x,b) = X(x)Y(b) = 0,$$

obtemos o problema

$$Y'' + \lambda Y = 0, \quad \text{e} \quad Y(0) = Y(b) = 0,$$

cujas soluções são

$$Y_m(y) = \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \quad \text{com} \quad \lambda_m = \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2, \quad m = 1, 2, \ldots .$$

A condição de contorno $u(0,y) = X(0)Y(y) = 0$ leva ao problema

$$X'' - \lambda_m X = 0 \quad X(0) = 0,$$

cuja solução é

$$X_m(x) = \operatorname{senh}\left(\frac{m\pi x}{b}\right), \quad m = 1, 2, \ldots .$$

Combinando os resultados encontrados, obtemos as soluções fundamentais

$$u_m(x,y) = \operatorname{senh}\left(\frac{m\pi x}{b}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi y}{b}\right), \quad m = 1, 2, \ldots .$$

A superposição das soluções fundamentais fornece

$$u(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m \operatorname{senh}\left(\frac{m\pi x}{b}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi y}{b}\right).$$

Da última condição de contorno

$$u(a,y) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m \operatorname{senh}\left(\frac{m\pi a}{b}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi y}{b}\right) = f(y),$$

concluímos que

$$c_m \operatorname{senh}\left(\frac{m\pi a}{b}\right) = \frac{2}{b}\int_0^b f(y)\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi y}{b}\right) dy,$$

são os coeficientes da série de Fourier em senos de f com período $T = 2b$.

Exemplo 1

Determine a solução do problema de Dirichlet

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad \forall 0 < x < 3 \quad \text{e} \quad \forall 0 < y < 2, \\ u(x,0) = 0, \quad u(x,b) = 0, \quad \forall 0 < x < 3, \\ u(0,y) = 0, \quad u(a,y) = f(y), \quad \forall 0 \leqslant y \leqslant 2, \end{cases}$$

em que f é a função dada por

$$f(y) = \begin{cases} y, & 0 \leqslant y \leqslant 1, \\ 2 - y, & 1 \leqslant y \leqslant 2. \end{cases}$$

Exemplo 1

Determine a solução do problema de Dirichlet

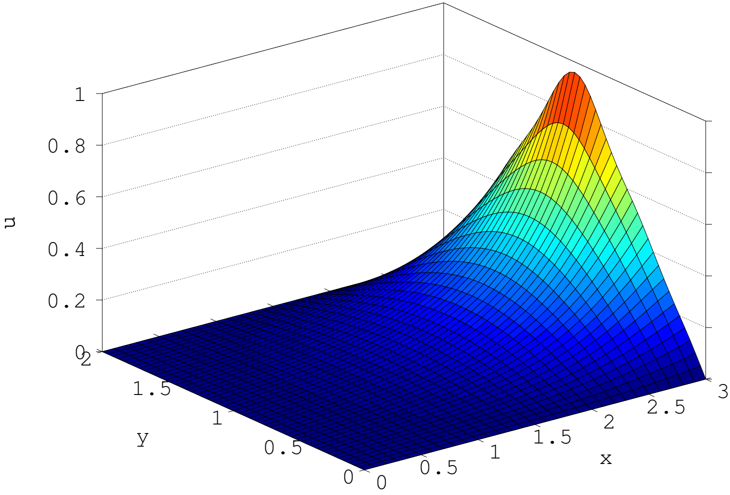
$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad \forall 0 < x < 3 \quad \text{e} \quad \forall 0 < y < 2, \\ u(x,0) = 0, \quad u(x,b) = 0, \quad \forall 0 < x < 3, \\ u(0,y) = 0, \quad u(a,y) = f(y), \quad \forall 0 \leqslant y \leqslant 2, \end{cases}$$

em que f é a função dada por

$$f(y) = \begin{cases} y, & 0 \leqslant y \leqslant 1, \\ 2 - y, & 1 \leqslant y \leqslant 2. \end{cases}$$

Resposta: A solução é

$$u(x,y) = \frac{8}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(m\pi/2)}{n^2 \operatorname{senh}(3m\pi/2)} \operatorname{senh}\left(\frac{m\pi x}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi y}{3}\right).$$



Superfície da solução u do Exemplo 1.