

Aula 25

Separação de Variáveis e a Equação do Calor.

MA311 - Cálculo III

Marcos Eduardo Valle

Departamento de Matemática Aplicada
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Universidade Estadual de Campinas

Introdução

Na aula anterior, apresentamos a série de Fourier. As séries de Fourier aparecem naturalmente quando resolvemos a equação do calor pelo método da separação de variáveis.

Especificamente, nas próximas aulas estudaremos três problemas fundamentais que envolvem as equações diferenciais parciais:

- ▶ Equação do calor: Que descreve um processo de difusão.
- ▶ Equação da onda: Que descreve um processo oscilatório.
- ▶ Equação do potencial: Que descreve um processo estacionário.

O método da separação de variáveis, que em termos gerais consistem em separar pelo sinal de igualdade os termos envolvendo as derivadas parciais, será apresentado através de exemplos, começando com a equação do calor.

Equação do Calor

Considere um problema de condução de calor em um barra reta homogênea de comprimento L e espessura desprezível (muito menor que L). Suponha ainda que os lados da barra estão perfeitamente isolados.

Vamos denotar por $u(x, t)$ a temperatura da barra em um ponto $0 \leq x \leq L$ no instante $t \geq 0$. A variação de temperatura da barra é descrita pela **equação do calor**:

$$\alpha^2 u_{xx} = u_t, \quad 0 < x < L \quad \text{e} \quad t > 0,$$

em que α^2 é a **difusividade térmica**, e depende do material do qual a barra é feita.

Vamos admitir ainda que conhecemos a temperatura inicial da barra, ou seja, temos a **condição inicial**

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L.$$

Também vamos supor que as extremidades da barra são mantidas a temperaturas fixas. Por simplicidade, vamos considerar inicialmente a **condição de contorno**

$$u(0, t) = 0 \quad \text{e} \quad u(L, t) = 0, \quad \forall t > 0.$$

O objetivo será encontrar $u(x, t)$ que satisfaz a equação do calor, a condição inicial e a condição de contorno, ou seja, devemos resolver

$$\begin{cases} \alpha^2 u_{xx} = u_t, & 0 < x < L \quad \text{e} \quad t > 0. \\ u(x, 0) = f(x), & 0 \leq x \leq L. \\ u(0, t) = 0 \quad \text{e} \quad u(L, t) = 0, & \forall t > 0. \end{cases}$$

No método da separação de variáveis, admitimos

$$u(x, t) = X(x)T(t),$$

em que X depende somente de x e T depende apenas de t .

Derivando e substituindo na equação do calor, encontramos

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{\alpha^2} \frac{T'}{T} = -\lambda,$$

em que λ é uma constante (não depende de x nem de t !), chamada **constante de separação**. Equivalentemente, temos

$$X'' + \lambda X = 0 \quad \text{e} \quad T' + \alpha^2 \lambda T = 0.$$

Substituindo $u(x, t) = X(x)T(t)$ nas condições de contorno, obtemos

$$X(0) = 0 \quad \text{e} \quad X(L) = 0.$$

Temos assim o problema de valor de contorno para X :

$$X'' + \lambda X = 0, \quad X(0) = 0 \quad \text{e} \quad X(L) = 0,$$

cujas soluções são

$$X_m(x) = \text{sen} \left(\frac{m\pi x}{L} \right) \quad \text{e} \quad \lambda_m = \frac{m^2 \pi^2}{L^2}, \quad m = 1, 2, \dots$$

chamados respectivamente **autofunções** e **autovalores**.

Além disso, a equação diferencial em T ,

$$T' + \left(\frac{m\pi\alpha}{L} \right)^2 T = 0,$$

obtida escrevendo $\lambda \equiv \lambda_m$, admite como solução

$$T(t) = e^{-m^2 \pi^2 \alpha^2 t / L^2}, \quad m = 1, 2, \dots$$

Combinando os resultados anteriores com $u(x, t) = X(x)T(t)$, obtemos as **soluções fundamentais**:

$$u_n = e^{-m^2\pi^2\alpha^2 t/L^2} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right), \quad m = 1, 2, \dots$$

Admitindo que a solução do problema é uma combinação linear de todas as soluções fundamentais, encontramos

$$u(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m e^{-m^2\pi^2\alpha^2 t/L^2} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right),$$

que satisfaz a equação do calor e as condições de contorno.

Finalmente, da condição inicial obtemos

$$u(x, 0) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi x}{L} \right) = f(x), \quad 0 < x < L,$$

que corresponde à série de Fourier em senos de f .

Admitindo que f é uma função ímpar com período $T = 2L$, temos

$$c_m = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi x}{L} \right) dx, \quad m = 1, 2, \dots$$

Solução do problema de condução de calor com condições de contorno homogêneas

Concluindo, a solução de

$$\begin{cases} \alpha^2 u_{xx} = u_t, & 0 < x < L \text{ e } t > 0. \\ u(x, 0) = f(x), & 0 \leq x \leq L. \\ u(0, t) = 0 \text{ e } u(L, t) = 0, & \forall t > 0. \end{cases}$$

é

$$u(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m e^{-m^2 \pi^2 \alpha^2 t / L^2} \operatorname{sen} \left(\frac{m \pi x}{L} \right),$$

com

$$c_m = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \left(\frac{m \pi x}{L} \right) dx, \quad m = 1, 2, \dots$$

Exemplo 1

Encontre a temperatura $u(x, t)$ em qualquer instante em uma barra de metal com 50cm de comprimento, insulada nos lados, inicialmente a uma temperatura uniforme de 20°C em toda a barra e cujas extremidades são mantidas a 0°C para todo $t \geq 0$.

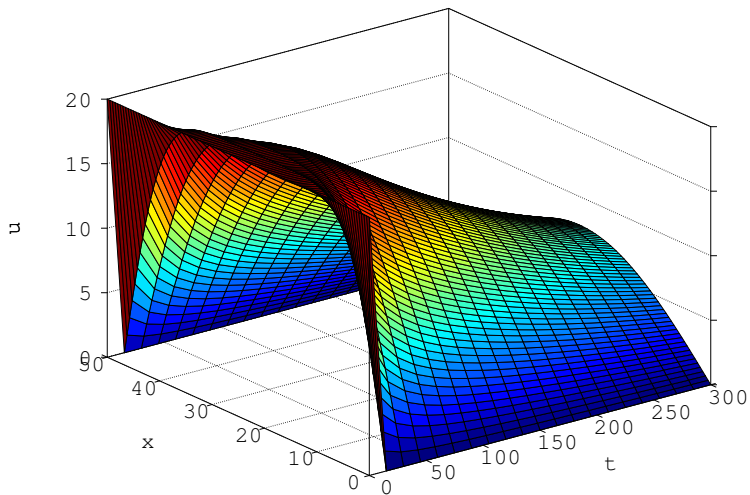
Exemplo 1

Encontre a temperatura $u(x, t)$ em qualquer instante em uma barra de metal com 50cm de comprimento, insulada nos lados, inicialmente a uma temperatura uniforme de 20°C em toda a barra e cujas extremidades são mantidas a 0°C para todo $t \geq 0$.

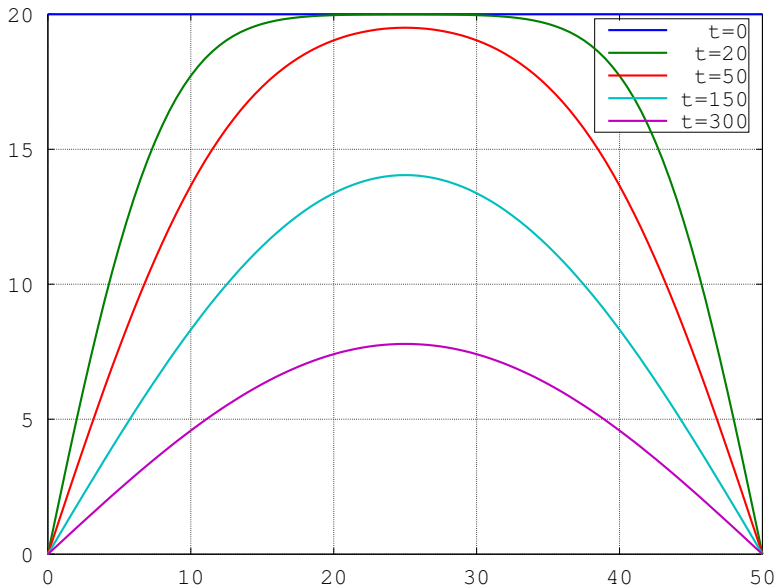
Resposta: A temperatura da barra satisfaz o problema de condução de calor com $L = 50$ e $f(x) = 20$ para todo $0 < x < 50$. Logo,

$$u(x, t) = \frac{80}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2m-1} e^{-(2m-1)^2 \pi^2 \alpha^2 t / 2500} \operatorname{sen} \left(\frac{(2m-1)\pi x}{50} \right).$$

Nos gráficos a seguir consideramos $\alpha = 1$, que corresponde à difusibilidade térmica de um material entre o cobre e o alumínio.



Solução $u(x, t)$ para diferentes valores de t .



$u(x, t)$ para diferentes valores de t .

Condições de contorno não-homogêneas

Num problema de condução de calor com condições de contorno não-homogêneas

$$\begin{cases} \alpha^2 u_{xx} = u_t, & 0 < x < L \text{ e } t > 0, \\ u(x, 0) = f(x), & 0 \leq x \leq L, \\ u(0, t) = T_1 \text{ e } u(L, t) = T_2, & \forall t > 0, \end{cases}$$

procedemos de forma similar admitindo

$$u(x, t) = v(x) + w(x, t).$$

Dessa forma, obtemos

$$u(x, t) = (T_2 - T_1) \frac{x}{L} + T_1 + \sum_{m=1}^{\infty} c_m e^{-m^2 \pi^2 \alpha^2 t / L^2} \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi x}{L} \right),$$

com

$$c_m = \frac{2}{L} \int_0^L \left[f(x) - (T_2 - T_1) \frac{x}{L} - T_1 \right] \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi x}{L} \right) dx, \quad m = 1, 2, \dots$$

Exemplo 2

Encontre a temperatura $u(x, t)$ em qualquer instante em uma barra de metal com 25cm de comprimento, isolada tanto nas extremidades quanto nos lados, cuja temperatura inicial é $u(x, 0) = x$ para $0 < x < 25$.

Observação:

Diferente do problema anterior em que as extremidades da barra tinha temperaturas fixas, nesse problema as extremidades da barra estão isoladas.

Em termos matemáticos, temos

$$u_x(0, t) = 0 \quad \text{e} \quad u_x(L, t) = 0, \quad \forall t > 0.$$

Exemplo 2

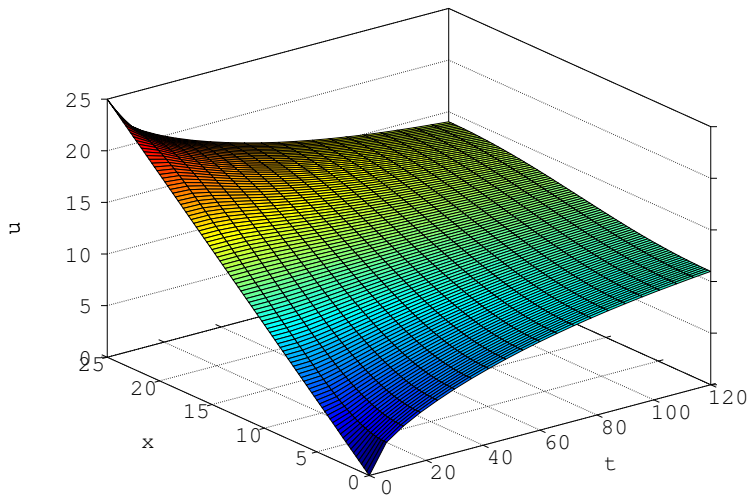
Encontre a temperatura $u(x, t)$ em qualquer instante em uma barra de metal com 25cm de comprimento, isolada tanto nas extremidades quanto nos lados, cuja temperatura inicial é $u(x, 0) = x$ para $0 < x < 25$.

Resposta: A temperatura é descrita por:

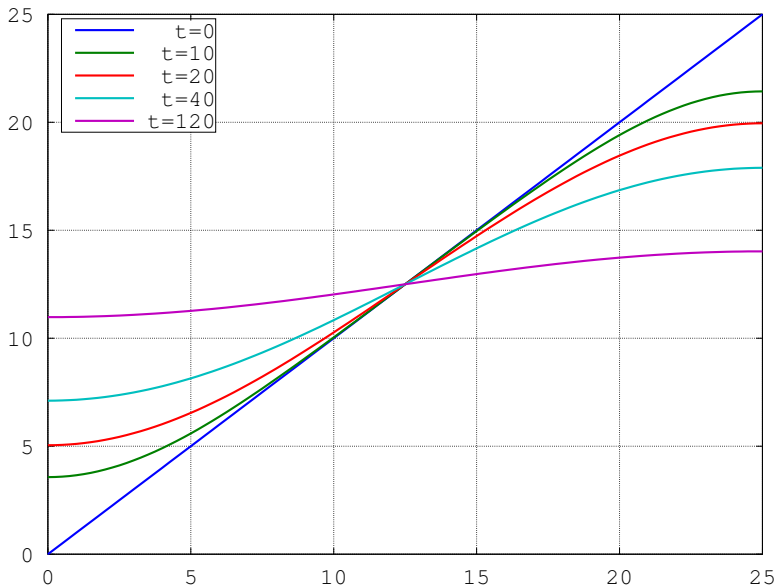
$$\begin{cases} \alpha^2 u_{xx} = u_t, & 0 < x < 25 \text{ e } t > 0, \\ u(x, 0) = x, & 0 \leq x \leq 25, \\ u_x(0, t) = 0 \text{ e } u_x(25, t) = 0, & \forall t > 0. \end{cases}$$

Pelo método da separação de variáveis, encontramos

$$u(x, t) = \frac{25}{2} - \frac{100}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^2} e^{-(2m-1)^2 \pi^2 \alpha^2 t / 625} \cos\left(\frac{(2m-1)\pi x}{25}\right).$$



Solução $u(x, t)$ para diferentes valores de t .



$u(x, t)$ para diferentes valores de t .