Aula 22
Soluções em Série na Vizinhança de um Ponto Singular Regular.

MA311 - Cálculo III

Marcos Eduardo Valle

Departamento de Matemática Aplicada
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Universidade Estadual de Campinas

Ponto Ordinário e Singular

Na aula de hoje, continuaremos nosso estudo sobre a resolução de uma EDO linear de segunda ordem homogênea

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \tag{1}$$

usando série de potências.

De um modo geral, dizemos que uma função f é analítica em x_0 se ela admite uma expansão em série centrada em x_0 com raio de convergência $R_f > 0$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \quad \forall |x - x_0| < R_f.$$

Usando essa terminologia, dizemos que x_0 é um **ponto ordinário** de (1) se p e q são analíticas em x_0. Caso contrário, dizemos que x_0 é um **ponto singular** de (1).

Solução em Série Próximo de um Ponto Ordinário

Na última aula vimos que se x_0 é um ponto ordinário, então todas as soluções de

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0,$$

podem ser representadas em série de potências

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \quad \forall |x - x_0| < R,$$

em que $0 < R = \min\{R_p, R_q\}$, R_p e R_q são os raios de convergência de p e q, respectivamente .

Na aula de hoje veremos que podemos aplicar uma metodologia semelhante quando x_0 é um tipo especial de ponto singular, chamado **ponto singular regular.**

Ponto Singular Regular e Irregular

Um ponto singular x_0 de

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0,$$

é dito **singular regular** se as funções

$$\bar{p}(x) = (x - x_0)p(x) \quad \text{e} \quad \bar{q}(x) = (x - x_0)^2 q(x),$$

são ambas analíticas em x_0, ou seja, podemos escrever

$$\bar{p}(x) = (x - x_0)p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n (x - x_0)^n, \quad \forall |x - x_0| < R_p,$$

e

$$\bar{q}(x) = (x - x_0)^2 q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n (x - x_0)^n, \quad \forall |x - x_0| < R_q.$$

Um ponto singular que não é regular é chamado **ponto singular irregular**.

Propriedades de um Ponto Singular Regular

Se x_0 é um ponto singular regular, então

$$\lim_{x \to x_0} (x - x_0) p(x) = p_0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to x_0} (x - x_0)^2 q(x) = q_0,$$

em que p_0 e q_0 são os primeiros termos da expansão em série das funções $\bar{p}$ e $\bar{q}$.

Sobretudo, ambos limites existem e são finitos!

Exemplo 1

Determine e classifique os pontos singulares da equação

$$2x(x-2)^2 y'' + 3xy' + (x-2)y = 0.$$

Propriedades de um Ponto Singular Regular

Se x_0 é um ponto singular regular, então

$$\lim_{x \to x_0} (x - x_0)p(x) = p_0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to x_0} (x - x_0)^2 q(x) = q_0,$$

em que p_0 e q_0 são os primeiros termos da expansão em série das funções $\bar{p}$ e $\bar{q}$.

Sobretudo, ambos limites existem e são finitos!

Exemplo 1

Determine e classifique os pontos singulares da equação

$$2x(x-2)^2 y'' + 3xy' + (x-2)y = 0.$$

Resposta: Temos que $x = 0$ é um ponto singular regular enquanto que $x = 2$ é um ponto singular irregular.

Solução Próximo de um Ponto Singular Regular

Suponha que $x_0 = 0$ é um ponto singular regular de

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0.$$

Multiplicando a equação por x^2, obtemos

$$x^2y'' + x[xp(x)]y' + [x^2q(x)]y = 0,$$

que, substituindo $xp(x)$ e $x^2q(x)$ por p_0 e q_0, respectivamente, relembra a equação de Euler cuja solução é $y(x) = x^r$, $x > 0$. Em vista disso, admitimos que a solução pode ser escrita como

$$y(x) = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n}, \text{ com } a_0 \neq 0 \text{ e } \forall x > 0.$$

Observação:

Se $x_0 \neq 0$, efetuamos uma mudança de variável $t = x - x_0$ ou $t = x_0 - x$ de modo que $t_0 = 0$ é ponto singular regular e estudamos a solução para $t > 0$.

Exemplo 2

Resolva a equação diferencial

$$2x^2y'' - xy' + (1 + x)y = 0.$$

Exemplo 2

Resolva a equação diferencial

$$2x^2y'' - xy' + (1+x)y = 0.$$

Resposta: Derivando $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$ obtemos a **equação indicial**

$$r(r-1) + p_0 r + q_0 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (r-1)(2r-1) = 0,$$

cujas raízes são $r_1 = 1$ e $r_2 = 1/2$, chamados **exponentes na singularidade.** Além disso, temos a relação de recorrência

$$a_n = -\frac{a_{n-1}}{[(r+n)-1][2(r+n)-1]}, \quad \forall n \geqslant 1.$$

Para $r = r_1 = 1$, encontramos

$$a_n = \frac{(-1)^n 2^n}{(2n+1)!} a_0, \quad \forall n \geqslant 1.$$

Logo, uma solução é

$$y_1(x) = x\left[1 + \sum_{n=1} \frac{(-1)^n 2^n}{(2n+1)!} x^n\right], \quad \forall x > 0.$$

Para $r = r_2 = 1/2$, encontramos

$$a_n = \frac{(-1)^n 2^n}{(2n)!} a_0, \quad \forall n \geqslant 1.$$

Portanto, uma segunda solução é

$$y_2(x) = x^{1/2}\left[1 + \sum_{n=1} \frac{(-1)^n 2^n}{(2n)!} x^n\right], \quad \forall x > 0.$$

Finalmente, a solução geral da EDO é

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x), \quad \forall x > 0.$$

Método de Frobenius

Suponha que $x_0 = 0$ é ponto singular da EDO

$$x^2 y'' + x[xp(x)]y' + [x^2 q(x)]y = 0.$$

Sejam r_1 e r_2, com $r_1 \geqslant r_2$, raízes da equação indicial

$$F(r) = r(r-1) + p_0 r + q_0,$$

em que

$$p_0 = \lim_{x \to 0} xp(x) \quad \text{e} \quad q_0 = \lim_{x \to 0} x^2 q(x).$$

Primeira Solução

Admitindo

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r_1}, \quad 0 < x < R,$$

encontramos uma solução da forma

$$y_1(x) = x^{r_1}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_1)x^n\right], \quad 0 < x < R,$$

em que os coeficientes a_n satisfazem a relação de recorrência

$$F(r+n)a_n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k\left[(r+k)p_{n-k} + q_{n-k}\right] = 0, \quad \forall n \geqslant 1,$$

com $a_0 = 1$ e $r = r_1$.

Raízes distintas que não diferem por um inteiro

Se $r_1 - r_2$ não é zero nem um inteiro positivo, então uma segunda solução linearmente independente é dada por

$$y_2(x) = x^{r_2}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_2)x^n\right], \quad 0 < x < R,$$

em que os coeficientes a_n satisfazem a mesma relação de recorrência

$$F(r+n)a_n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k\left[(r+k)p_{n-k} + q_{n-k}\right] = 0, \quad \forall n \geqslant 1,$$

com $a_0 = 1$ mas $r = r_2$.

Raízes repetidas ou diferindo por um inteiro positivo

Se $r_1 = r_2$, então uma segunda solução linearmente independente é obtida admitindo

$$y_2(x) = y_1(x)\ln x + x^{r_1}\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n, \quad 0 < x < R.$$

Se $r_1 - r_2 = N$, um inteiro positivo, então uma segunda solução linearmente independente é obtida admitindo

$$y_2(x) = c_0 y_1(x)\ln x + x^{r_2}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n\right]. \quad 0 < x < R.$$

Nas expressões acima, os coeficientes b_n e c_n podem ser obtidos substituindo na EDO a expressão para y_2.

Exemplo 3

Determine as duas soluções linearmente independentes da equação de Bessel de ordem zero

$$x^2y'' + xy' + x^2y = 0,$$

a direita de $x_0 = 0$.

Observação

A equação de Bessel de ordem ν é

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0.$$

Exemplo 3

Determine as duas soluções linearmente independentes da equação de Bessel de ordem zero

$$x^2y'' + xy' + x^2y = 0,$$

a direita de $x_0 = 0$.

Observação

A equação de Bessel de ordem ν é

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0.$$

Resposta: A relação indicial é

$$F(r) = r(r-1) + r = r^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad r_1 = r_2 = 0,$$

portanto, temos raízes repetidas.

Admitindo

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \forall x > 0,$$

obtemos $a_1 = 0$ e a relação de recorrência

$$a_n = -\frac{1}{n^2} a_{n-2}, \quad \forall n \geqslant 2.$$

Logo,

$$a_{2m} = \frac{(-1)^m}{2^{2m}(m!)^2} a_0 \quad \text{e} \quad a_{2m+1} = 0, \quad \forall m = 1, 2, \ldots.$$

Portanto, uma solução, chamada **função de Bessel de primeira espécie de ordem zero**, é

$$J_0(x) \equiv y_1(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}, \quad \forall x > 0.$$

Admitindo

$$y_2(x) = y_1(x)\ln(x) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n, \forall x > 0.$$

Derivando e substituindo na EDO obtemos a relação de recorrência

$$b_1 + 4b_2 x + \sum_{n=3}^{\infty} [n^2 b_n + b_{n-2}] x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{4n}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n-1}.$$

Logo, para $m = 1, 2, \ldots$, temos

$$b_{2m} = \frac{(-1)^{m+1}}{2^{2m}(m!)^2}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right) \quad \text{e} \quad b_{2m-1} = 0.$$

Portanto, uma segunda solução linearmente independente, chamada **função de Bessel de segunda espécie de ordem zero**, é

$$Y_0(x) \equiv y_2(x) = J_0(x)\ln(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right)\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}.$$