Aula 2
Equações Separáveis e Substituição de Variáveis

MA311 - Cálculo III

Marcos Eduardo Valle

Departamento de Matemática Aplicada
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Universidade Estadual de Campinas

Equação Separável

Uma EDO de primeira ordem

$$y' = f(t, y), \tag{1}$$

é dita **separável** se os termos que envolvem as variáveis podem ser separados pelo sinal de igualdade.

Formalmente, podemos escrever uma EDO separável como

$$g(y)y' = f(t).$$

Equivalentemente, na forma diferencial temos

$$g(y)dy = f(x)dx.$$

Integrando membro-a-membro, obtemos

$$G(y) = F(x) + c,$$

em que c é uma constante e $F(x)$ e $G(y)$ são primitivas de $f(x)$ e $g(y)$, respectivamente.

Exemplo 1

A Lei do resfriamento de Newton é expressa pela EDO

$$\frac{dT}{dt} = -\kappa(T - T_a),$$

em que $T(t)$ é a temperatura de um corpo no tempo t, T_a é a temperatura do ambiente (suposta constante) e $\kappa > 0$ é a condutividade térmica do material que constitui o corpo (também suposta constante). Determine a função T, que descreve a temperatura do corpo, supondo que a temperatura inicial é $T(0) = T_0$.

Exemplo 1

A Lei do resfriamento de Newton é expressa pela EDO

$$\frac{dT}{dt} = -\kappa(T - T_a),$$

em que $T(t)$ é a temperatura de um corpo no tempo t, T_a é a temperatura do ambiente (suposta constante) e $\kappa > 0$ é a condutividade térmica do material que constitui o corpo (também suposta constante). Determine a função T, que descreve a temperatura do corpo, supondo que a temperatura inicial é $T(0) = T_0$.

Resposta: A EDO é separável e a solução do PVI é:

$$T(t) = T_a + (T_0 - T_a)e^{-\kappa t}.$$

Exemplo 2

Determine a solução geral da EDO

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{1 + y^2},$$

em que $y \equiv y(x)$ é uma função de x.

Exemplo 2

Determine a solução geral da EDO

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{1+y^2},$$

em que $y \equiv y(x)$ é uma função de x.

Resposta: A solução da EDO é

$$y + \frac{y^3}{3} = \frac{x^3}{3} + c,$$

em que c é uma constante.
Note que essa equação define y implicitamente.

Exemplo 3

Resolva o PVI

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 + 4x + 2}{2(y - 1)}, \quad y(0) = -1.$$

Exemplo 3

Resolva o PVI

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 + 4x + 2}{2(y-1)}, \quad y(0) = -1.$$

Resposta: A solução do PVI é

$$y^2 - 2y = x^3 + 2x^2 + 2x + 3.$$

Explicitamente, temos

$$y = 1 - \sqrt{x^3 + 2x^2 + 2x + 4}.$$

Substituição de Variáveis

Muitas vezes, uma EDO complicada pode ser reduzida a uma equação equivalente mais simples fazendo uma mudança de variável apropriada.

Infelizmente, não há regras ou métodos que levam à uma substituição de variáveis bem sucedida.

Apresentaremos aqui alguns exemplos.

Exemplo 4

Resolva a EDO

$$\frac{dy}{dx} = (x + y + 3)^2,$$

em que $y \equiv y(x)$ é uma função de x.

Exemplo 4

Resolva a EDO

$$\frac{dy}{dx} = (x + y + 3)^2,$$

em que $y \equiv y(x)$ é uma função de x.

Resposta: Efetuando a mudança de variável

$$v = x + y + 3,$$

encontramos uma EDO separável em v. Resolvendo a nova equação e retornando à variável y, obtemos a solução geral

$$y(x) = \text{tg}(x + c) - x - 3,$$

em que c é uma constante.

Exemplo 5

De um modo geral, uma EDO a forma

$$\frac{dy}{dx} = f(ax + by + c),$$

em que a, b, c são constantes com $b \neq 0$, pode ser transformada na EDO

Exemplo 5

De um modo geral, uma EDO a forma

$$\frac{dy}{dx} = f(ax + by + c),$$

em que a, b, c são constantes com $b \neq 0$, pode ser transformada na EDO

$$\frac{dv}{dx} = bf(v) + a,$$

após a substituição

$$v = ax + by + c.$$

Exemplo 6

Uma EDO da forma

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right),$$

em que $y \equiv y(x)$, pode ser resolvida tomando

$$v = \frac{y}{x}.$$

Exemplo 6

Uma EDO da forma

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right),$$

em que $y \equiv y(x)$, pode ser resolvida tomando

$$v = \frac{y}{x}.$$

Nesse caso, a EDO fica

$$x\frac{dv}{dx} = f(v),$$

que é separável.

Exemplo 7

Equação de Bernoulli Uma equação da forma

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = q(t)y^{\alpha},$$

em que α é uma constante real, é chamada **equação de Bernoulli.**

Exemplo 7

Equação de Bernoulli Uma equação da forma

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = q(t)y^{\alpha},$$

em que α é uma constante real, é chamada **equação de Bernoulli**. No caso em que $\alpha \neq 0$ e $\alpha \neq 1$, efetuamos a substituição

$$v = y^{1-\alpha}.$$

Dessa forma, obtemos a equação linear

$$\frac{dv}{dt} + (1-\alpha)p(t)v = (1-\alpha)q(t),$$

que pode ser resolvida usando fator integrante.

Considerações Finais

Na aula de hoje vimos duas técnicas para resolver EDOs não-lineares.

Primeiro, podemos integrar membro-a-membro uma EDO separável.

Segundo, muitas vezes podemos transformar uma EDO complicada numa mais simples efetuando uma mudança de variável apropriada.

Como exemplo de mudança de variável, apresentamos a equação de Bernoulli.