

Aula 19

Séries Alternadas e Séries de Potência.

MA311 - Cálculo III

Marcos Eduardo Valle

Departamento de Matemática Aplicada
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Universidade Estadual de Campinas

Revisão

A soma dos n primeiros termos de uma sequência $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$,

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i,$$

é chamada **soma parcial**.

Uma **série infinita**, ou simplesmente **série**,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

é obtida somando todos os termos de uma sequência $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Dizemos que a série $\sum a_n$ **converge** se a sequência $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ das somas parciais for convergente. Caso contrário, dizemos que a série **diverge**.

Série Alternada

Uma **série alternada** é aquela cujos termos alternam entre positivos e negativos. Em geral, podemos escrever uma série alternada como

$$\sum (-1)^n b_n \quad \text{ou} \quad \sum (-1)^{n+1} b_n,$$

em que b_n são todos não-negativos.

Teorema 1 (Teste da Série Alternada)

Se uma série alternada satisfizer

1. $b_{n+1} \leq b_n$, para todo $n > N$,
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$,

*então a série **converge**.*

Exemplo 2

Avalie a convergência da série harmônica alternada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

Exemplo 2

Avalie a convergência da série harmônica alternada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

Resposta: Como

$$b_{n+1} = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} = b_n \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0,$$

pele teste da série alternada temos que a série converge.

Exemplo 3

Teste a convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3n}{4n-1}$.

Exemplo 3

Teste a convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3n}{4n-1}$.

Resposta: Como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n 3n}{4n-1},$$

não existe, pelo teste da divergência concluímos que a série diverge.

Exemplo 4

Teste a convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2}{n^3 + 1}$.

Exemplo 4

Teste a convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2}{n^3 + 1}$.

Resposta: Como

$$b_{n+1} = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} = b_n \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0,$$

pelo teste da série alternada temos que a série converge.

Séries de Potências

Uma **série de potências** centrada em a ou em torno de a é uma série da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - a)^n = c_0 + c_1(x - a) + c_2(x - a)^2 + c_3(x - a)^3 + \dots,$$

em que x é uma variável, a é fixo e os coeficientes c_n 's são constantes.

Uma série de potências define uma função

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - a)^n,$$

cujo domínio é o conjunto de todos os pontos para os quais a série converge, que inclui o ponto $x = a$.

Exemplo 5

Para quais valores de x a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n}$ converge?

Exemplo 5

Para quais valores de x a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n}$ converge?

Resposta: Primeiro, observe que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(x-3)^{n+1}}{n+1}}{\frac{(x-3)^n}{n}} \right| = |x-3|.$$

Logo, pelo teste da razão, a série converge se $|x-3| < 1$, ou seja, $2 < x < 4$.

Quando $|x-3| = 1$, ou seja, $x = 2$ ou $x = 4$. Para $x = 2$, temos a série harmônica alternada $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ que é convergente.

Para $x = 4$, temos a série harmônica $\sum \frac{1}{n}$, que diverge.

Concluindo, a série de potências converge para $2 \leq x < 4$.

Exemplo 6

Para quais valores de x a série $\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$ é convergente?

Exemplo 6

Para quais valores de x a série $\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$ é convergente?

Resposta: Pelo teste da razão, temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)!x^{n+1}}{n!x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1)|x| = \infty, \forall x \neq 0.$$

Logo, a série converge apenas para $x = 0$.

Exemplo 7

Encontre o domínio da função de Bessel de ordem 0 definida por

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n} (n!)^2}.$$

Exemplo 7

Encontre o domínio da função de Bessel de ordem 0 definida por

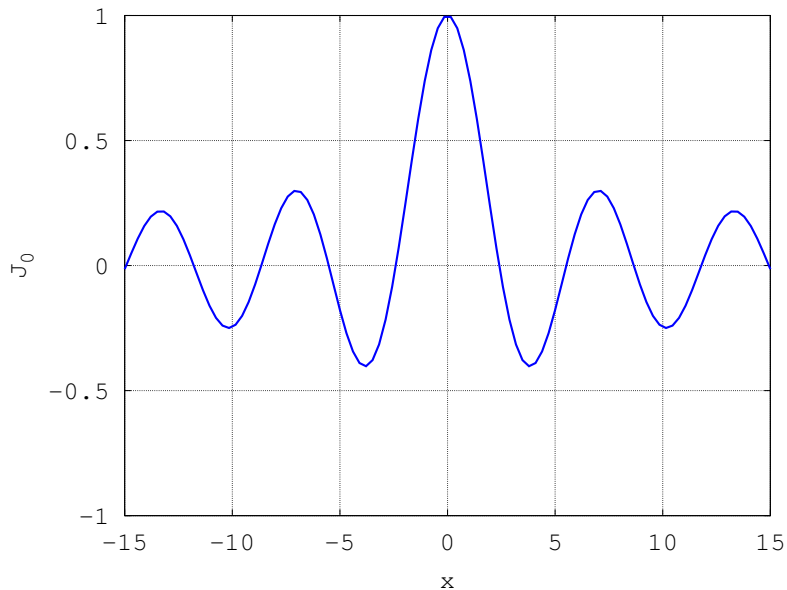
$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n} (n!)^2}.$$

Resposta: Primeiro, observe que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(-1)^{n+1} x^{2n+1}}{2^{2n+1} (n+1!)^2}}{\frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n} (n!)^2}} \right| = 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Logo, pelo teste da razão, a série converge todo x , ou seja, o domínio da função de Bessel J_0 é \mathbb{R} .

Função de Bessel de Ordem 0



Teorema 8

Para uma série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - a)^n$, existem apenas três possibilidades:

1. Existe $R > 0$, chamado **raio de convergência**, tal que a série converge se $|x - a| < R$ e diverge se $|x - a| > R$.
2. A série converge apenas quando $x = a$. Nesse caso, dizemos que o raio de convergência é $R = 0$.
3. A série converge para todo $x \in \mathbb{R}$. Nesse caso, dizemos que o raio de convergência é $R = \infty$.

O **intervalo de convergência** de uma série é o conjunto dos pontos para os quais a série converge.

Série	Raio de Convergência	Intervalo de Convergência
$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$	$R = 1$	$(-1, 1)$
$\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$	$R = 0$	$\{0\}$
$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n}$	$R = 1$	$[2, 4)$
$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}$	$R = \infty$	$(-\infty, +\infty)$

Exemplo 9

Encontre o raio de convergência e o intervalo de convergência da série

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-3)^n \frac{x^n}{\sqrt{n+1}}.$$

Exemplo 9

Encontre o raio de convergência e o intervalo de convergência da série

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-3)^n \frac{x^n}{\sqrt{n+1}}.$$

Resposta: O raio de convergência é $R = \frac{1}{3}$ e o intervalo de convergência é $(-\frac{1}{3}, +\frac{1}{3}]$.

Exemplo 10

Encontre o raio de convergência e o intervalo de convergência da série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(x+2)^n}{3^{n+1}}.$$

Exemplo 10

Encontre o raio de convergência e o intervalo de convergência da série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(x+2)^n}{3^{n+1}}.$$

Resposta: O raio de convergência é $R = 3$ e o intervalo de convergência é $(-5, 1)$.