Aula 18
Séries e Alguns Testes de Convergência.

MA311 - Cálculo III

Marcos Eduardo Valle

Departamento de Matemática Aplicada
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Universidade Estadual de Campinas

Revisão

A soma dos n primeiros termos de uma sequência $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$,

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i,$$

é chamada **soma parcial**.

Uma **série infinita**, ou simplesmente **série**,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$$

é obtida somando todos os termos de uma sequência $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Dizemos que a série $\sum a_n$ **converge** se a sequência $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ das somas parciais for convergente. Caso contrário, dizemos que a série **diverge**.

Teorema 1

Se $\sum a_n, \sum b_n$ *convergem, então as séries*

$$\sum ca_n, \quad \sum(a_n + b_n) \quad e \quad \sum(a_n - b_n),$$

também convergem e vale:

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$
3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$

Teorema 2

Se a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge, então* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Teorema 3 (Teste para Divergência)

Se $\lim_{n\to\infty} a_n$ *não existe ou se* $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, *então a série* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverge.*

Exemplo 4

Determine se a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{5n^2+4},$$

converge ou diverge.

Exemplo 4

Determine se a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{5n^2+4},$$

converge ou diverge.

Resposta: Como

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{5n^2+4} = \frac{1}{5} \neq 0,$$

a série diverge.

Teorema 5 (Teste da Integral)

Suponha que f seja uma função contínua, positiva e decrescente em $[1, \infty)$. Se $a_n = f(n)$, então

- *Se $\int_1^{\infty} f(x)dx$ for* ***convergente****, então $\sum_{i=1}^{n} a_n$* ***converge****.*
- *Se $\int_1^{\infty} f(x)dx$ for* ***divergente****, então $\sum_{i=1}^{n} a_n$* ***diverge****.*

Exemplo 6

Teste a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ quanto à sua convergência ou divergência.

Exemplo 6

Teste a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ quanto à sua convergência ou divergência.

Resposta: Como

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2+1}dx = \frac{\pi}{4},$$

concluímos pelo teste da integral que a série converge.

Exemplo 7

Determine se a série harmônica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

converge ou diverge.

Exemplo 7

Determine se a série harmônica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

converge ou diverge.

Resposta: Como

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = \ln(x)\Big|_1^{\infty} = +\infty,$$

concluímos que a série diverge pelo teste da integral.

Exemplo 8

Para quais valores de p a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, chamada p-série, converge?

Exemplo 8

Para quais valores de p a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, chamada p-série, converge?

Resposta: A p-série converge se $p > 1$ e diverge se $p \leqslant 1$.

Teorema 9 (Teste da Comparação)

Suponha que $\sum a_n$ e $\sum b_n$ sejam ambas séries com termos positivos tais que $a_n \leqslant b_n$ para todo $n > N$.

- *Se $\sum b_n$ **converge**, então $\sum a_n$ também **converge**.*
- *Se $\sum a_n$ **diverge**, então $\sum b_n$ também **diverge**.*

Exemplo 10

Teste a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n}$ quanto à sua convergência ou divergência.

Exemplo 10

Teste a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n}$ quanto à sua convergência ou divergência.

Resposta: Como

$$\frac{\ln(n)}{n} > \frac{1}{n}, \quad \forall n \geqslant 3,$$

e a série $\sum_{n=1}^{n} \frac{1}{n}$ diverge, pelo teste da comparação, a série em questão também diverge.

Teorema 11 (Teste da Comparação no Limite)

Suponha que $\sum a_n$ *e* $\sum b_n$ *sejam ambas séries com termos positivos. Se*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c,$$

em que $c > 0$ *é um número finito, então ambas as séries convergem ou ambas divergem.*

Exemplo 12

Teste a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2 + 3n}{\sqrt{5 + n^5}}$ quanto à sua convergência ou divergência.

Exemplo 12

Teste a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2 + 3n}{\sqrt{5 + n^5}}$ quanto à sua convergência ou divergência.

Resposta: Como os termos dominantes no numerador e no denominador são $2n^2$ e $\sqrt{n^5}$, consideramos

$$a_n = \frac{2n^2 + 3n}{\sqrt{5 + n^5}} \quad \text{e} \quad b_n = \frac{2n^2}{\sqrt{n^5}}.$$

Desse modo,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n^2 + 3n)}{(\sqrt{5 + n^5})} \frac{(\sqrt{n^5})}{(2n^2)} = 1.$$

Como a série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$ diverge, pelo teste da comparação no limite, a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ também diverge.

Série Absolutamente Convergente

Definição 13

Uma série $\sum a_n$ é dita **absolutamente convergente** se a série de valores absolutos $\sum |a_n|$ for convergente.

Teorema 14

Se uma série $\sum a_n$ for absolutamente convergente, então ela é convergente.

Exemplo 15

Determine se a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2}$ converge ou diverge.

Exemplo 15

Determine se a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2}$ converge ou diverge.

Resposta: Como

$$\frac{|\cos n|}{n^2} \leqslant \frac{1}{n^2},$$

e $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge, pelo teste da comparação a série é absolutamente convergente. Portanto, a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2}$ converge.

Teorema 16 (Teste da Razão)

Dada uma série $\sum a_n$, suponha que

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L,$$

em que L é um número não-negativo ou infinito. Tem-se:

- *Se $L < 1$, então $\sum a_n$ é absolutamente convergente.*
- *Se $L > 1$, então $\sum a_n$ diverge.*
- *Nada podemos afirmar se $L = 1$.*

Exemplo 17

Avalie a série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^3}{3^n}$ quanto à sua convergência ou divergência.

Exemplo 17

Avalie a série $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^3}{3^n}$ quanto à sua convergência ou divergência.

Resposta: Como

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{3} < 1,$$

a série converge pelo teste da razão.

Exemplo 18

Avalie a convergência da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$.

Exemplo 18

Avalie a convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$.

Resposta: Como

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = e > 1,$$

a série diverge pelo teste da razão.

Teorema 19 (Teste da Raiz)

Dada uma série $\sum a_n$*, suponha que*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L,$$

em que L *é um número não-negativo ou infinito. Tem-se:*

- *Se* $L < 1$*, então* $\sum a_n$ *é absolutamente convergente.*
- *Se* $L > 1$*, então* $\sum a_n$ *diverge.*
- *Nada podemos afirmar se* $L = 1$*.*

Exemplo 20

Teste a convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+3}{3n+2} \right)^n$.

Exemplo 20

Teste a convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+3}{3n+2} \right)^n$.

Resposta: Como

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{2}{3} < 1,$$

a série converge pelo teste da raiz.