Aula 14 Sistemas de Equações Diferenciais Ordinárias Lineares de Primeira Ordem.

MA311 - Cálculo III

Marcos Eduardo Valle

Departamento de Matemática Aplicada
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Universidade Estadual de Campinas

Um sistema de equações diferenciais de ordinárias de primeira ordem é um conjunto de equações que envolvem as variáveis dependentes, suas derivadas de primeira ordem, e a variável independente.

Nessa disciplina, admitiremos que um sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem pode ser escrito como

$$\begin{cases} x_1' &= f_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ x_2' &= f_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ &\vdots \\ x_n' &= f_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \end{cases}$$

em que $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são variáveis dependentes (funções) da variável independente t.

Sistemas e Equações de Ordem Superior

Uma equação diferencial de ordem n,

$$x^{(n)} = f(t, x, x', x'', \ldots, x^{(n-1)}),$$

pode ser escrito de forma equivalente como um sistema equações diferenciais de primeira ordem.

Com efeito, defina $x_1, x_2, \ldots, x_n$ da seguinte forma:

$$x_1 = x, \quad x_2 = x', \quad x_3 = x'' \quad \text{e} \quad x_n = x^{(n-1)}.$$

Dessa forma, obtemos o sistema

$$\begin{cases} x_1' &= x_2, \\ x_2' &= x_3, \\ &\vdots \\ x_{n-1}' &= x_n, \\ x_n' &= f(t, x_1, x_2, \ldots, x_n). \end{cases}$$

Exemplo 1

Escreva a equação

$$x^{(3)} + 3x'' + 2x' - 5x = \mathrm{sen}(2t),$$

como um sistema de equações diferenciais de primeira ordem.

Exemplo 1

Escreva a equação

$$x^{(3)} + 3x'' + 2x' - 5x = \text{sen}(2t),$$

como um sistema de equações diferenciais de primeira ordem.

Resposta: O sistema equivalente é

$$\begin{cases} x_1' & = x_2, \\ x_2' & = x_3, \\ x_3' & = 5x_1 - 2x_2 - 3x_3 + \text{sen}(2t). \end{cases}$$

Exemplo 2

Escreva o sistema

$$\begin{cases} 2x'' &= -6x + 2y \\ y'' &= 2x - 2y + 40\,\text{sen}(3t), \end{cases}$$

como um sistema de equações diferenciais de primeira ordem.

Exemplo 2

Escreva o sistema

$$\begin{cases} 2x'' &= -6x + 2y \\ y'' &= 2x - 2y + 40\,\text{sen}(3t), \end{cases}$$

como um sistema de equações diferenciais de primeira ordem.

Resposta: O sistema equivalente é

$$\begin{cases} x_1' &= x_2, \\ x_2' &= -3x_1 + x_3, \\ x_3' &= x_4 \\ x_4' &= 2x_1 - 2x_3 + 40\,\text{sen}(3t). \end{cases}$$

Notação Vetorial

Denotando

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

podemos escrever um sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem de forma compacta como

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), \tag{1}$$

em que **f** é uma função que associa cada o par $(t, \mathbf{x})$ a um vetor com n componentes.

Uma solução é uma função vetorial $\mathbf{x}(t)$ que satisfaz (1) para todo t num intervalo $\alpha < t < \beta$.

Problema de Valor Inicial

Um **problema de valor inicial** (PVI) é um sistema $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ acompanhando de uma condição inicial

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x_1(t_0) & = x_1^0, \\ x_2(t_0) & = x_2^0, \\ & \vdots \\ x_n(t_0) & = x_n^0, \end{cases}$$

em que t_0 e $\mathbf{x}^0 = \left[x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right]^T$ são dados.

Existência e Unicidade da Solução

O seguinte teorema garante a existência e unicidade da solução de um problema de valor inicial envolvendo um sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem.

Teorema 3

Suponha que cada uma das funções $f_1, f_2, \ldots, f_n$ e suas derivadas parciais com respeito a $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são contínuas numa região

$$R = \{(t, \mathbf{x}) : \alpha < t < \beta, \alpha_1 < x_1 < \beta_1, \ldots, \alpha_n < x_n < \beta_n\}.$$

Se $(t_0, \mathbf{x}^0) \in R$, então o problema de valor inicial

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \quad e \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0,$$

admite uma única solução para $t \in I \subseteq (\alpha, \beta)$.

Sistema Linear

Um sistema $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ é dito **linear** se **f** é linear em **x**. Caso contrário, o sistema é dito **não-linear**.

Equivalentemente, um sistema $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ é linear se pode ser escrito como:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x} + \mathbf{g}(t),$$

em que

$$\mathbf{P}(t) = \begin{bmatrix} p_{11}(t) & p_{12}(t) & \dots & p_{1n}(t) \\ p_{21}(t) & p_{22}(t) & \dots & p_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1}(t) & p_{n2}(t) & \dots & p_{nn}(t) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{g}(t) = \begin{bmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \\ \vdots \\ g_n(t) \end{bmatrix},$$

são funções de t.

Existência e Unicidade da Solução

O seguinte teorema garante a existência e unicidade da solução de um problema de valor inicial envolvendo um sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem linear.

Teorema 4

Suponha que $p_{ij}(t)$ e $g_i(t)$, para qualquer $i, j = 1, \ldots, n$, são contínuas contínuas para $t \in (\alpha, \beta)$. Se $t_0 \in (\alpha, \beta)$, então o problema de valor inicial

$$\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t) + \mathbf{g}(t) \quad e \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0,$$

admite uma única solução para todo $t \in (\alpha, \beta)$.

Sistema Linear Homogêneo

Um sistema linear $\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x} + \mathbf{g}(t)$ é dito **homogêneo** se $\mathbf{g}(t)$ é o vetor nulo, ou seja, o sistema pode ser escrito como

$$\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}.$$

Caso contrário, o sistema é dito não-homogêneo.

Teorema 5 (Princípio da Superposição)

Se $\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)} \dots, \mathbf{x}^{(k)}$ são soluções de

$$\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t),$$

então qualquer combinação linear

$$c_1\mathbf{x}^{(1)} + c_2\mathbf{x}^{(2)} + \dots + c_k\mathbf{x}^{(k)}$$

é também uma solução do sistema linear homogêneo.

Wronskiano

Dizemos que $\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)} \dots, \mathbf{x}^{(n)}$ são soluções do sistema

$$\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x},$$

linearmente independentes em (α, β) se o determinante

$$W[\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)} \dots, \mathbf{x}^{(n)}](t) = \begin{vmatrix} x_1^{(1)}(t) & x_1^{(2)}(t) & \dots & x_1^{(n)}(t) \\ x_2^{(1)}(t) & x_2^{(2)}(t) & \dots & x_2^{(n)}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n^{(1)}(t) & x_n^{(2)}(t) & \dots & x_n^{(n)}(t) \end{vmatrix},$$

chamado **wronskiano**, é não nulo para todo $t \in (\alpha, \beta)$.

Observação:

Pode-se mostrar que $W[\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}]$ ou é identicamente nulo ou nunca se anula para $t \in (\alpha, \beta)$.

Solução Geral de um Sistema Linear Homogêneo

Qualquer solução $\mathbf{x}$ de um sistema linear homogêneo

$$\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x},$$

definida para $t \in (\alpha, \beta)$, pode ser expressa de forma única como uma combinação linear

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{x}^{(1)} + c_2\mathbf{x}^{(2)} + \ldots + c_n\mathbf{x}^{(n)}, \tag{2}$$

de n soluções $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}$ linearmente independentes em (α, β).

A expressão (2) é chamada **solução geral** dos sistema

$$\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}.$$

Sistemas Lineares Homogêneos com Coeficientes Constantes

Um sistema linear homogêneo $\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}$ tem coeficientes constantes se se $P(t)$ é constante, ou seja,

$$\mathbf{P}(t) \equiv \mathbf{A},$$

em que $\mathbf{A}$ é uma matriz que não depende de t.

Em outras palavras, um sistema linear homogêneo com coeficientes constantes pode ser escrito como:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}.$$

Faremos uma breve revisão de conceitos de auto-valor e auto-vetor antes de prosseguir com o estudo desses sistemas.

Revisão de Auto-valores e Auto-vetores

Considere uma matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Dizemos que um vetor não-nulo $\boldsymbol{\xi} = [\xi_1, \ldots, \xi_n]^T$ é um **auto-vetor** de **A** associado ao **auto-valor** r se

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\xi} = r\boldsymbol{\xi}.$$

Observação 1:

Note que, se $\boldsymbol{\xi}$ é um auto-vetor, então $\boldsymbol{\eta} = c\boldsymbol{\xi}$ é também um auto-vetor para qualquer $c \neq 0$.

Observação 2:

Em palavras, um auto-vetor define uma direção na qual a matriz se comporta como um escalar!

Se ξ é um auto-vetor associado a r, então

$$(\mathbf{A} - r\mathbf{I})\xi = \mathbf{0},$$

em que $\mathbf{I}$ denota a matriz identidade e $\mathbf{0}$ é o vetor nulo.

A equação acima admite solução não-nula se e somente se

$$\det(\mathbf{A} - r\mathbf{I}) = 0.$$

A equação

$$p(r) = \det(\mathbf{A} - r\mathbf{I}),$$

define um polinômio de grau n, chamado **polinômio característico** de **A**.

As raízes do polinômio característico são auto-valores de **A**.

Conhecendo um auto-valor r, determinamos o auto-vetor associado ξ resolvendo o sistema linear

$$(\mathbf{A} - r\mathbf{I})\xi = \mathbf{0},$$

que admite infinitas soluções.

Observação 1:

Podemos determinar pelo menos um auto-vetor associado a cada raiz do polinômio característico.

Observação 2:

Se o polinômio característico possui n raízes distintas $r_1, r_2, \ldots, r_n$, então podemos determinar n auto-vetores $\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \ldots, \xi^{(n)}$. Além disso, pode-se mostrar que os n auto-vetores são linearmente independentes.

Exemplo 6

Determine os auto-valores e auto-vetores da matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo 6

Determine os auto-valores e auto-vetores da matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Resposta: Os auto-valores são $r_1 = 3$ e $r_2 = -1$.
Os auto-vetores associados são

$$\xi^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \xi^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Obs: Múltiplos não-nulos desses vetores também serão auto-vetores de **A**.

Vamos agora retornar aos sistemas lineares homogêneo com coeficientes constantes.

Exemplo 7

Determine a solução geral do sistema linear homogêneo com coeficientes constantes $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ em que

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Vamos agora retornar aos sistemas lineares homogêneo com coeficientes constantes.

Exemplo 7

Determine a solução geral do sistema linear homogêneo com coeficientes constantes $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ em que

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Resposta: Admitindo que uma solução pode ser escrita como

$$\mathbf{x} = \xi e^{rt},$$

concluímos que ξ e r devem satisfazer a equação

$$r\xi e^{rt} = \mathbf{A}\xi e^{rt} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{A}\xi = r\xi,$$

ou seja, ξ é um auto-vetor associado ao auto-valor r.

Sabemos que os auto-valores de $\mathbf{A}$ são $r_1 = 3$ e $r_2 = -1$ e os auto-vetores são

$$\xi^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \xi^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Portanto, temos as soluções

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} e^{3t} \quad \text{e} \quad \mathbf{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} e^{-t},$$

que são linearmente independentes.
Concluindo, a solução geral do sistema $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ é

$$\mathbf{x} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} e^{-t}.$$

Exemplo 8

Encontre a solução geral do sistema

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

Exemplo 8

Encontre a solução geral do sistema

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

Resposta: Os auto-valores e auto-vetores são:

$$r_1 = 2, \xi^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad r_2 = r_3 = -1, \xi^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \xi^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Portanto, a solução geral é:

$$\mathbf{x} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-t} + c_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-t}.$$

Considerações Finais

De um modo geral, admitimos que um sistema linear homogêneo com coeficientes constantes $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ admite uma solução da forma

$$\mathbf{x} = \xi e^{rt}.$$

Derivando e substituindo na equação, obtemos

$$r\xi e^{rt} = \mathbf{A}\xi e^{rt} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{A}\xi = r\xi,$$

ou seja, ξ é um auto-vetor associado ao auto-valor r.

Se a matriz $\mathbf{A}$ possui auto-vetores $\xi^{(1)}, \ldots, \xi^{(n)}$ linearmente independentes, então a solução geral do sistema linear homogêneo com coeficientes constantes $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ é

$$\mathbf{x} = c_1\xi^{(1)}e^{r_1 t} + c_2\xi^{(2)}e^{r_2 t} + \ldots + c_n\xi^{(n)}e^{r_n t}.$$