

Aula 12

Transformada do Produto, da Derivada e da Integral.

MA311 - Cálculo III

Marcos Eduardo Valle

Departamento de Matemática Aplicada
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Universidade Estadual de Campinas

Introdução

A transformada da solução de um problema de valor inicial muitas vezes aparece como o produto de duas transformadas. O produto das transformadas, porém, não é a transformada da produto!

Exemplo 1

Considere o problema de valor inicial

$$x'' + x = \cos(t), \quad x(0) = 0 \quad \text{e} \quad x'(0) = 0.$$

Nesse caso, encontramos

$$X(s) = \frac{s}{(s^2 + 1)^2} = \frac{s}{s^2 + 1} \frac{1}{s^2 + 1} = \mathcal{L}\{\cos(t)\} \mathcal{L}\{\sin(t)\},$$

cuja solução é

$$x(t) = \frac{1}{2}t \sin(t) \neq \cos(t) \sin(t).$$

Convolução

Felizmente, podemos determinar uma função cuja transformada corresponde ao produto das transformadas usando a convolução:

Definição 2 (Convolução)

Dadas duas funções f e g contínuas por partes para $t \geq 0$, a convolução de f e g é a função definida por:

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau)d\tau, \quad \forall t \geq 0.$$

Também denotamos a convolução por $f(t) * g(t)$.

Teorema 3 (Comutatividade)

A convolução é comutativa, ou seja, vale

$$f * g = g * f.$$

Exemplo 4

Determine a convolução de $\cos(t)$ e $\sin(t)$.

Observação:

Lembre-se que

$$\cos a \sin b = \frac{1}{2}(\sin(a + b) - \sin(a - b)).$$

Exemplo 4

Determine a convolução de $\cos(t)$ e $\sin(t)$.

Observação:

Lembre-se que

$$\cos a \sin b = \frac{1}{2}(\sin(a + b) - \sin(a - b)).$$

Resposta: Temos que

$$\cos(t) * \sin(t) = \frac{1}{2}t \sin(t).$$

Observe que

$$\mathcal{L}\{\cos(t) * \sin(t)\} = \frac{s}{(s^2 + 1)^2} = \mathcal{L}\{\cos(t)\} \mathcal{L}\{\sin(t)\}.$$

Transformada da Convolução

O seguinte teorema estabelece uma relação entre a transformada da convolução e o produto das transformadas.

Teorema 5 (Transformada da Convolução)

Considere funções f e g , contínuas por partes para todo $t \geq 0$. Se $|f(t)| \leq Me^{ct}$ e $|g(t)| \leq Me^{ct}$ quando $t \rightarrow \infty$, então a transformada da convolução existe e satisfaz

$$\mathcal{L}\{f(t) * g(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\} \mathcal{L}\{g(t)\}, \quad \forall s > c.$$

Além disso, temos

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)G(s)\} = f(t) * g(t).$$

Exemplo 6

Sabendo que

$$\mathcal{L}\{\sin(2t)\} = \frac{2}{s^2 + 4} \quad \text{e} \quad \mathcal{L}\{e^t\} = \frac{1}{s - 1},$$

use a convolução para determinar a transformada inversa

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s - 1)(s^2 + 4)}\right\}.$$

Exemplo 6

Sabendo que

$$\mathcal{L}\{\text{sen}(2t)\} = \frac{2}{s^2 + 4} \quad \text{e} \quad \mathcal{L}\{e^t\} = \frac{1}{s - 1},$$

use a convolução para determinar a transformada inversa

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s - 1)(s^2 + 4)}\right\}.$$

Resposta:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s - 1)(s^2 + 4)}\right\} = \frac{1}{5}\left(2e^t - \text{sen}(2t) - 2\cos(2t)\right).$$

Análise de Sistemas

Considere um sistema descrito pela EDO

$$ax'' + bx' + cx = f(t),$$

em que $x(t)$ é chamada *saída* ou *resposta* e $f(t)$ é a *entrada*.
Por simplicidade, vamos admitir $x(0) = 0$ e $x'(0) = 0$.

Aplicando a transformada de Laplace, encontramos

$$X(s) = \frac{1}{as^2 + bs + c} F(s) = W(s)F(s).$$

A função $W(s) = 1/(as^2 + bs + c)$ é chamada *função de transferência* do sistema e

$$w(t) = \mathcal{L}^{-1}\{W(s)\},$$

é chamada *função peso*. A função peso não depende de $f(t)$!

Princípio de Duhamel

Da convolução, temos que a resposta do sistema é

$$x(t) = w(t) * f(t) = \int_0^t w(\tau) f(t - \tau) d\tau.$$

A fórmula acima, chamada *princípio de Duhamel*, permite estudar o comportamento (resposta) do sistema para diferentes funções de entrada f .

Exemplo 7

Considere um sistema descrito pelo PVI

$$x'' + 6x' + 10x = f(t), \quad x(0) = 0 \quad \text{e} \quad x'(0) = 0,$$

em que f representa uma força externa. Nesse caso, temos a função de transferência

$$W(s) = \frac{1}{s^2 + 6s + 10} = \frac{1}{(s + 3)^2 + 1},$$

e a função peso

$$w(t) = e^{-3t} \text{sen}(t).$$

Pelo princípio de Duhamel, temos

$$x(t) = \int_0^t e^{-3\tau} \text{sen}(\tau) f(t - \tau) d\tau.$$

Derivada da Transformada

O seguinte resultado estabelece uma conexão com a derivada da transformada $F(s)$ com a transformada de $-tf(t)$.

Teorema 8 (Derivada da Transformada)

Se f é uma função contínua por partes para todo $t \geq 0$ e $|f(t)| \leq Me^{ct}$ quando $t \rightarrow \infty$, então

$$\mathcal{L}\{-tf(t)\} = F'(s), \quad \forall s > c,$$

em que $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$. Equivalentemente,

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = -\frac{1}{t}\mathcal{L}\{F'(s)\}.$$

De um modo geral, temos

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n F^{(n)}(s).$$

Exemplo 9

Determine $\mathcal{L}\{t^2 \text{sen}(kt)\}$.

Exemplo 9

Determine $\mathcal{L}\{t^2 \text{sen}(kt)\}$.

Resposta:

$$\mathcal{L}\{t^2 \text{sen}(kt)\} = \frac{6ks^2 - 2k^3}{(s^2 + k^2)^3}.$$

Exemplo 10

Determine $\mathcal{L}^{-1}\{\tan^{-1}(1/s)\}$.

Exemplo 10

Determine $\mathcal{L}^{-1}\{\tan^{-1}(1/s)\}$.

Resposta:

$$\mathcal{L}^{-1}\{\tan^{-1}(1/s)\} = \frac{\text{sen}(t)}{t}.$$

Integral da Transformada

O seguinte teorema relaciona a integral da transformada $F(s)$ com o quociente $f(t)/t$, se o último for “bem comportado” quando $t \rightarrow 0$.

Teorema 11 (Integral da Transformada)

Considere uma função f contínua por partes para todo $t \geq 0$ tal que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t)}{t} \text{ existe e é finito.}$$

Se $|f(t)| \leq Me^{ct}$ quando $t \rightarrow \infty$, então

$$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty F(\sigma) d\sigma, \quad \forall s > c.$$

Equivalentemente,

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = t\mathcal{L}^{-1}\left\{\int_s^\infty F(\sigma) d\sigma\right\}.$$

Exemplo 12

Determine $\mathcal{L}\left\{\frac{\sinh(t)}{t}\right\}$.

Observação:

Sabemos que

$$\mathcal{L}\{\sinh(t)\} = \frac{1}{s^2 - 1}.$$

Exemplo 12

Determine $\mathcal{L}\left\{\frac{\sinh(t)}{t}\right\}$.

Observação:

Sabemos que

$$\mathcal{L}\{\sinh(t)\} = \frac{1}{s^2 - 1}.$$

Resposta:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\sinh(t)}{t}\right\} = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{s+1}{s-1}\right).$$

Exemplo 13

Encontre $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s}{(s^2 - 1)^2}\right\}$.

Observação:

Sabemos que

$$\mathcal{L}\{\sinh(t)\} = \frac{1}{s^2 - 1}.$$

Exemplo 13

Encontre $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s}{(s^2 - 1)^2}\right\}$.

Observação:

Sabemos que

$$\mathcal{L}\{\sinh(t)\} = \frac{1}{s^2 - 1}.$$

Resposta:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s}{(s^2 - 1)^2}\right\} = t\sinh(t).$$