Aplicações em Biomatemática via Sistemas p-fuzzy

Ricardo Augusto Watanabe[1]
Estevao Esmi Laureano [2]
Laecio Carvalho de Barros[3]

[1,2,3]Department of Applied Mathematics
Institute of Mathematics, Statistics, and Scientific Computing
University of Campinas - Brazil

MT808 – Tópicos em Biomatemática, 2015

Resumo

Resumo

Fuzzificação (Dicionário, Declaração)

Definição

Neste módulo as entradas do sistema são convertidas em conjuntos fuzzy. Mais precisamente, corresponde a uma função que associa uma entrada $\mathbf{x} \in \mathbb{R}$ a um conjunto fuzzy $\mathbb{R}^n_{\mathbb{F}}$.

Resumo

Módulo de Inferência

Definição

este módulo é composto por uma **base de regras fuzzy**, que contém o conhecimento parcial dado sobre o fenômeno de interesse, e de um método de **inferência fuzzy**, que é responsável por generalizar o conhecimento parcial descrito na base de regras para todo o domínio fuzzy.

Base de Regras

Definição

É composta por regras do tipo "Se $\mathbf{x}$ é A_i então $\mathbf{y}$ é B_i", para $i = 1, \ldots, k$, onde A_i e B_i denotam conjuntos fuzzy em $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$ respectivamente.
Cada regra da forma acima será referida por R_i.

Base de Regras

Definição

É composta por regras do tipo "Se **x** é A_i então **y** é B_i", para $i = 1, \ldots, k$, onde A_i e B_i denotam conjuntos fuzzy em $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$ respectivamente.
Cada regra da forma acima será referida por R_i.

Regra de Mamdani

A Regra de Mamdani consiste em estabelecer a conexão entre a função de pertinência dos antecedentes (φ_{A_i}) e a função de pertinência dos consequentes (φ_{B_j}) pela função mínimo ($\wedge$) e modelar o conectivo lógico "**ou**" pela função do máximo ($\vee$).

Método de Inferência

Definição

Neste módulo, o conjunto de todas as proposições da base de regras é modelado por uma **relação fuzzy** que nada mais é que um subconjunto fuzzy de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$.

Método de Inferência

Definição

Neste módulo, o conjunto de todas as proposições da base de regras é modelado por uma **relação fuzzy** que nada mais é que um subconjunto fuzzy de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$.

Método de Inferência de Mamdani

Para o método de inferência de Mamdani obtemos a relação fuzzy M dada por:

$$\varphi_M(\mathbf{y},\mathbf{x}) = \bigvee_{i=1}^{k} \varphi_{R_i}(\mathbf{y},\mathbf{x}) = \bigvee_{i=1}^{k} \left(\varphi_{B_i}(\mathbf{y}) \bigwedge \varphi_{A_i}(\mathbf{x}) \right). \tag{1}$$

Outros Controladores

Takagi-Sugeno-Kang

O metodo de Takagi-Sugeno-Kang consiste em estabelecer a conexão entre a função de pertinência dos antecedentes (φ_{A_i}) e a função de pertinência dos consequentes (φ_{B_j}) via função das variáveis de entrada e ainda modelar os conectivos lógicos "**e**" e "**ou**" via t-normas e s-normas.

Resumo

Módulo de Defuzzificação

Definição

Neste módulo o conjunto fuzzy de saída B, que representa a incerteza envolvida no modelo, passa a ser representado por um valor crisp (numero real no caso). Este processo é dado por um mapeamento $D : \mathbb{R}^m_{\mathbb{F}} \rightarrow \mathbb{R}^m$.

Resumo

Definição

Definição

- Dado $Y \subseteq X$ espaço topológico, $\bar{Y}$ denota o fecho de Y.
    - Y é dito denso se $\bar{Y} = X$.
    - Y é dito denso em lugar nenhum se $\bar{Y} = \emptyset$
- $C_\epsilon(x)$ denota a ϵ-vizinhança do ponto $x \in X$.

Definição-Aproximador Universal

$$\bar{Y} = \{x \in X | \forall \epsilon > 0, C_\epsilon(x) \cap Y \neq \emptyset\}$$

Não é muito construtiva...

Aproximadores Universais - J.Buckley & T.Feuring

Definição

- Seja $\mathcal{C}[a, b]$ o conjunto de todas funçãoes contínuas $f : [a, b] \rightarrow \mathcal{R}$.
- $UA[a, b]$ é um subconjunto denso de $\mathcal{C}[a, b]$.

Então dada $f \in \mathcal{C}[a, b]$ e $\epsilon > 0$, $\exists g \in UA[a, b]$ tal que $|g(x) - f(x)| < \epsilon, \forall x \in [a, b]$.

Aproximadores Universais - L.Kóczy

L.Castro, L.Kóczy entre outros chamam a atenção para certas classes de controladores.

Alguns Resultados Negativos

- B.Moser discute restrições com relações a base de regras e como é possível formar um subconjunto denso em lugar nenhum no espaco das funções contínuas em relação a norma do supremo, ou seja, o conjunto é quase-discreto.

Aproximadores Universais - L.Kóczy

L.Castro, L.Kóczy entre outros chamam a atenção para certas classes de controladores.

Alguns Resultados Negativos

- B.Moser discute restrições com relações a base de regras e como é possível formar um subconjunto denso em lugar nenhum no espaco das funções contínuas em relação a norma do supremo, ou seja, o conjunto é quase-discreto.
- K. Hornik...

Aproximadores Universais - K. Hornik

K. Hornik argumenta que o número de regras usados nos controladores é a razão dos aproximadores universais estarem presentes em vários sistemas fuzzy.

Theorem

Sejam $\delta > O$, $X \subset \mathbb{R}^n$ *com* $X \subset [x_{10}, x_{11}]x...x[x_{n0}, x_{n1}]$. *Existe uma seqüência de sistemas fuzzy* S_r, *com domínio em* X *tais que* $\lim_{r \to \infty} r.e_r(\delta) = O$, *sendo* r *o número de regras em* S_r.

Porém...o limite de sistemas pode não ser um sistema!!
(Uma sequência de funções pode não ser uma função.)

Resumo

Dinâmica Populacional

- Malthus:

$$\frac{dP}{dt} = \lambda P$$

- Verhust:

$$\frac{dP}{dt} = \alpha P \left(1 - \frac{P}{K}\right)$$

- Montroll

$$\frac{dP}{dt} = \alpha p \left[1 - \left(\frac{P}{K}\right)^{\beta}\right]$$

Exemplo de Dinâmica Populacional

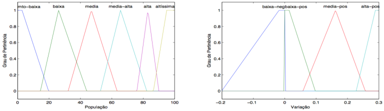

Figura 5.6: Função de pertinência das variáveis *população* e *variação*.

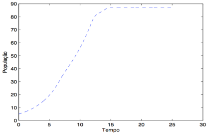

Figura 5.7: Aproximação para o modelo de Verhulst com $x(0) = 5$ - terceira simulação.

*Imagem retirada da tese de Marina Dias

Dinâmica Populacional-Presa vs Predador

Equação de Lokta-Volterra:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - \alpha xy \\ \frac{dy}{dt} = -by + \beta xy \end{cases}$$

A base de regras é do tipo: "Se xé A e y é B então ΔX é ΔA e ΔY é ΔB. "

Ainda assim, uma análise dos autovalores da matriz jacobiana deve ser feita para a estabilidade.

Exemplo de Dinâmica Populacional

6. se a população é *altíssima* (AL) então a variação é *baixa negativa* (B_n).

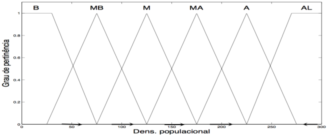

Figura 4.3: Conjuntos fuzzy dos termos linguísticos da variável *população* T_p.

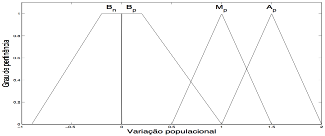

Figura 4.4: Conjuntos fuzzy dos termos linguísticos da variável *variação da população* $T_{\Delta p}$.

*Imagem retirada da tese de Moisés Cecconcellos

Exemplo de Dinâmica Populacional

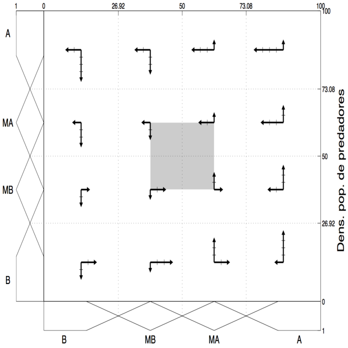

Figura 4.15: Base de regras para uma interação *presa-predador*.

*Imagem retirada da tese de Moisés Cecconcellos

Resumo

Ecossistemas

- Considere uma comunidade com n populações: $N_i(t), i = 1, \ldots, n$.
- A dinâmica da comunidade é descrita por EDO's de primeira ordem não-lineares.
- Considere N_i^* o ponto de equilíbrio (se existir) do sistema.

Para estudarmos a estabilidade da comunidade próximo do equilíbrio considere:

$$N_i(t) = N_i^* + x_i(t)$$

onde $x_i(t)$ mede perturbações pequenas da população. Temos:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}(t)$$

onde **A** é a matriz de interação.

Estabilidade

Pergunta1

Quais condições permitem inferir a estabilidade de uma comunidade?

Estabilidade

Pergunta1

Quais condições permitem inferir a estabilidade de uma comunidade?

Pergunta2

Sabendo-se apenas a topologia da estrutura trófica, como inferir a estabilidade da comunidade?

Estabilidade

Pergunta1

Quais condições permitem inferir a estabilidade de uma comunidade?

Pergunta2

Sabendo-se apenas a topologia da estrutura trófica, como inferir a estabilidade da comunidade?

Pergunta3

É de se esperar que redes mais complexas sejam mais estáveis que redes mais simples?

Pergunta1

Resposta Algébrica

A condição necessária e suficiente para que o ponto de equilíbrio seja estável é que todos autovalores da matrix de interação($\mathbf{A}$) tenham parte real negativa.

Pergunta1

Resposta Algébrica

A condição necessária e suficiente para que o ponto de equilíbrio seja estável é que todos autovalores da matrix de interação($\mathbf{A}$) tenham parte real negativa.

- A matrix de interação revela **MUITOS** fatos biológicos (Wiliamson):

$$\begin{matrix} ++ & +0 & +- \\ 0+ & 00 & 0- \\ -+ & -0 & -- \end{matrix}$$

Pergunta1

Resposta Algébrica (um pouco mais biológica)

(i) $a_{ii} \leq 0$, $\forall i$

(ii) $a_{ii} \neq 0$, para ao menos um i.

(iii) $a_{ij} a_{ji} \leq 0$, $\forall i \neq j$.

(iv) $a_{ij} a_{jk} \ldots a_{qr} a_{ri} = 0$, para $i \neq j \neq \ldots \neq q \neq r$

(v) $det \mathbf{A} \neq 0$

Pergunta1

Resposta Algébrica (um pouco mais biológica)

(i) $a_{ii} \leq 0$, $\forall i$

(ii) $a_{ii} \neq 0$, para ao menos um i.

(iii) $a_{ij}a_{ji} \leq 0$, $\forall i \neq j$.

(iv) $a_{ij}a_{jk} \dots a_{qr}a_{ri} = 0$, para $i \neq j \neq \dots \neq q \neq r$

(v) $det\mathbf{A} \neq 0$

Observações:

- Se (i) a (v) não forem satisfeitas, não necessariamente significa que a matrix seja instável.
- Esta análise diz respeito **apenas** a pequenas perturbações

Pergunta1

i-ii Efeito intraespecífico:

(i) Requer que a população não exiba resposta desestabilizadora.
(ii) Demanda que ao menos uma população seja auto-estabilizadora.

Pergunta1

i-ii Efeito intraespecífico:

(i) Requer que a população não exiba resposta desestabilizadora.

(ii) Demanda que ao menos uma população seja auto-estabilizadora.

(iii) Relações simbióticas têm o mesmo caráter estabilizador que a competição.

Pergunta1

- i-ii Efeito intraespecífico:
  - (i) Requer que a população não exiba resposta desestabilizadora.
  - (ii) Demanda que ao menos uma população seja auto-estabilizadora.
- (iii) Relações simbióticas têm o mesmo caráter estabilizador que a competição.
- (iv) A condição proibe loops fechados de 3 ou mais membros da comunidade.

Pergunta1

- i-ii Efeito intraespecífico:
  - (i) Requer que a população não exiba resposta desestabilizadora.
  - (ii) Demanda que ao menos uma população seja auto-estabilizadora.
- (iii) Relações simbióticas têm o mesmo caráter estabilizador que a competição.
- (iv) A condição proibe loops fechados de 3 ou mais membros da comunidade.
- (v) Mais populações do que equações.

Exemplos Pergunta2

- Comunidade com 4 espécies:

Menor quantidade de links interespecífico. Por exemplo 3 espécies de herbívoros e 1 planta:

Example

$$A_a = \begin{pmatrix} - & + & + & + \\ - & - & 0 & 0 \\ - & 0 & - & 0 \\ - & 0 & 0 & - \end{pmatrix}$$

Maior quantidade de links interespecífico. Por exemplo 1 espécie de planta e uma hierarquia de 3 níveis de onívoros:

Example

$$A_b = \begin{pmatrix} - & + & + & + \\ - & - & + & + \\ - & - & - & + \\ - & - & - & - \end{pmatrix}$$

Pergunta2

- Se não existir dependência intraespecífica na densidade populacional então a comunidade B pode atingir equilíbrio , enquanto que a comunidade A usualmente não atinge.
- Havendo dependência intraespecífica na densidade populacional, supomos uma resposta negativa. Logo ambas comunidades podem atingir o equilíbrio.

Pergunta2 e Pergunta3

Example

A matriz A_a satisfaz as condições (i)-(v) e portanto é qualitativamente estável.
A matriz A_b não satisfaz a condição (iv) e portanto não é qualitativamente estável: A_b pode ou não corresponder a um equilíbrio estável.

Resposta Pergunta3 70-80

Tendo em vista o modelo matemático apresentado, em geral, aumento de complexidade tende a diminuir a estabilidade.

Resposta Pergunta3 Atual

Estabilidade das comunidades dependem de MUITOS outros fatores (a grande maioria não-linear).

Ecossistemas (Fuzzy) Perguntas

Pergunta1

Existem condições algébricas análogas em fuzzy?

Pergunta2

Se sim, quais são?

OBRIGADO!

OBRIGADO!