Análise Fuzzy - Espaços Métrico Fuzzy e Introdução a Derivada Fuzzy

Aluno: Ricardo Augusto Watanabe
Orientador: Laécio Carvalho de Barros
Coorientador: Estevão Esmi Laureano

28/04/2015

Definições

Seja X um Espaço Métrico completo . Considere $\mathcal{H}(X)$ como sendo o espaço de todos os subconjuntos compactos de X. Considere também $\mathcal{K}(X)$ como sendo o espaço de todos os subconjuntos compactos e convexos de X.
Para qualquer $A \in \mathcal{H}(X)$ e $\epsilon > 0$ definimos a região ϵ:

$$A_\epsilon := \{x \in X | d(x, y) \leq \epsilon \text{ para algum } \; y \in A\}$$

Recordando-se a distância do ponto ao conjunto:

$$d(x, A) := \inf_{y \in A} d(x, y)$$

Observações

Em termos da região ϵ temos:

$$A_\epsilon = \{x | d(x, A) \leq \epsilon\}$$

Para conjuntos compactos A,B $\neq \emptyset$ definimos a separação Hausdorff:

$$d(A, B) := \sup_{x \in A} d(x, B)$$

Note que $d(A, B) \leq \epsilon \Leftrightarrow A \subset B_\epsilon$

E portanto esta condição não é simétrica em A e B.

Métrica Hausdorff

A Métrica Hausdorff é definida por:

$$d_h(A, B) := \max\{d(A, B), d(B, A)\} \tag{1}$$

Ou equivalentemente por:

$$d_h(A, B) := \inf\{\epsilon \geq 0\,;\ X \subseteq Y_\epsilon \text{ e } Y \subseteq X_\epsilon\}$$

é uma distância em $\mathcal{H}(X)$ (e também em $\mathcal{K}(X)$).

d_h realmente é métrica

1) Não-negativo

$$d_h(A, B) \geq 0$$

2) Princípio da Identidade dos Indiscerníveis

$$d_h(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B$$

3) Simetria

$$d_h(A, B) = d_h(B, A)$$

4) Desigualdade Triangular:

Basta provar que $d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$

Notas

Em particular, se A e B forem intervalos em $\mathbb{I}$, isto é, A $= [a_1, a_2]$ e B $= [b_1, b_2]$
Então teremos

$$d_h(A, B) := \max\{|a_1 - b1|, |a_2 - b_2|\}$$

A métrica de Hausdorff é usada no estudo de fractais.

Distância Hausdorff para números Fuzzy

Seja $D_\infty : \mathbb{R}_\mathbb{F} x \mathbb{R}_\mathbb{F} \rightarrow \mathbb{R}_+ \bigcup 0$

$$D_\infty(u, v) = \sup_{r \in [0,1]} \max\{|u_r^- - b_r^-|, |u_r^+ - b_r^+|\} \tag{2}$$

Ou equivalentemente

$$D_\infty(u, v) = \sup_{r \in [0,1]} \{d_h(u_r, v_r)\}$$

onde $u_r = [u_r^-, u_r^+]$ e $v_r = [v_r^-, v_r^+]$

D_p

Seja $1 \leq p \leq \infty$ e $D_p : \mathbb{R}_{\mathbb{F}} x \mathbb{R}_{\mathbb{F}} \to \mathbb{R}_+ \bigcup 0$

$$D_p(u,v) = \left(\int_0^1 [d_h(u_r, v_r)]^p \, dr \right)^{1/p} \tag{3}$$

$$D_p(u,v) = \left(\int_0^1 \left[\max\{|u_r^- - b_r^-|, |u_r^+ - b_r^+|\} \right]^p dr \right)^{1/p}$$

onde $u_r = [u_r^-, u_r^+]$ e $v_r = [v_r^-, v_r^+]$

D_∞ realmente é métrica

$(\mathbb{R}_\mathbb{F}, D_\infty)$ realmente é Espaço Métrico.
E ainda valem as seguintes propriedades:
$\forall u, v, w, e \in R_F$ temos

- $$D_\infty(u + w, v + w) = D_\infty(u, v)$$
- $$D_\infty(k.u, k.v) = |k| D_\infty(u, v)$$
- $$D_\infty(u + v, w + e) \leq D_\infty(u, w) + D_\infty(v, e).$$

D_p realmente é métrica

$(\mathbb{R}_\mathbb{F}, D_p)$ realmente é Espaço Métrico.
E ainda valem as seguintes propriedades:
$\forall u, v, w, e \in \mathbb{R}_\mathbb{F}$ temos

- $$D_p(u + w, v + w) = D_p(u, v)$$
- $$D_p(k.u, k.v) = |k| D_p(u, v)$$
- $$D_p(u + v, w + e) \leq D_p(u, w) + D_p(v, e).$$

Compacto- Definições

Um Espaço Métrico é localmente compacto se todo ponto do espaço admite uma vizinhança compacta.
Todo Espaço Métrico Compacto é Completo.

Teoremas

Theorem

Teorema 8.7: $(\mathbb{R}_{\mathbb{F}}, D_\infty)$ *não é localmente compacto.*

Proof: Construir uma sequência convergente $(u_n)_r$ de números fuzzy mostrar que a distância Hausdorff para números Fuzzy não é convergente.

Theorem

Teorema 8.9: $(\mathbb{R}_{\mathbb{F}}, D_p)$ *não é localmente compacto.*

Completo- Definições

Um Espaço Métrico é completo quando toda sequência de Cauchy converge no espaço.

Teoremas

Theorem

Teorema 8.5: $(\mathbb{R}_{\mathbb{F}}, D_{\infty})$ *é localmente completo.*

*Proof:*Mostrar que qualquer sequência de Cauchy para os extremos do intervalo convergem em $\mathbb{R}$. Depois mostrar que o intervalo satisfaz as condições do **Teorema de Caracterização de Negoita-Ralescu**, logo qualquer sequência de Cauchy de números fuzzy é convergente em $\mathbb{R}_{\mathbb{F}}$.

Theorem

Teorema 8.6: $(\mathbb{R}_{\mathbb{F}}, D_p)$ *não é completo.*

Proof: Contra-exemplo.

Separável- Definições

Um Espaço Métrico é separável se admite um subconjunto contável denso.
Para provarmos não ser separável basta exibirmos incontáveis bolas abertas disjuntas.

Teoremas

Theorem

Teorema 8.12: $(\mathbb{R}_{\mathbb{F}}, D_\infty)$ *não é separável.*

Proof: Basta usar a sequência feita no Teorema 8.7

Theorem

Teorema 8.11: $(\mathbb{R}_{\mathbb{F}}, D_p)$ *é separável.*

Aplicações

Theorem

Considere o Espaço Métrico usual $(\mathbb{R}, d)$*. Se* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é uniformemente contínua, então a extensão de Zadeh* $\widehat{f} : \mathbb{R}_{\mathbb{F}} \to \mathbb{R}_{\mathbb{F}}$ *é uniformemente contínua no espaço* $(\mathbb{R}, D_\infty)$

Theorem

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *e a extensão de Zadeh* $\widehat{f} : \mathbb{R}_{\mathbb{F}} \to \mathbb{R}_{\mathbb{F}}$ *então* f *é lipschitziana com constante* $k \in \mathbb{R}$ *se, e somente se,* $\widehat{f}$ *é lipschitziana com constante* $k \in \mathbb{R}$.

Mergulho de Números Fuzzy

Considere *fuzzy convexo* como sendo:

$$u\left(\lambda x + (1-\lambda)\, y\right) \geq \min\left(u(x), u(y)\right); \forall \lambda \in [0,1]$$

Considere $\mathbb{E}$ como sendo o espaço de números fuzzy convexos.

Theorem

O espaço métrico $(\mathbb{E}, D_\infty)$ pode ser imerso isometricamente em um espaço de Banach no corpo dos reais.

Logo funções no espaço de Banach podem ser naturalmente transportados para o espaço $(\mathbb{E}, D_\infty)$.

Conclusão

Vimos a definição da métrica de Hausdorff, suas propriedades e sua aplicação em diversas áreas. Também vimos a definição de distância Hausdorff para números fuzzy D_p e D_∞ bem como suas propriedades , mostramos que os espaços $(\mathbb{R}_\mathbb{F}, D_p)$ e $(\mathbb{R}_\mathbb{F}, D_\infty)$ são metrizáveise e ainda comparamos com os espaços L^p e L^∞ . Discutimos o Teorema de Representação de Negoita - Ralescu. Relembramos propriedades topológicas como Compacidade, Completude e Separabilidade. Também tivemos contato com algumas aplicações na área de fuzzy. Por fim discutimos o importante teorema de números fuzzy no espaço de Banach.

Acknowlegdment

Agradeço a todos pela atenção !