Um estudo sobre aritmética entre números fuzzy interativos e aplicações em biomatemática

Gustavo Barroso Dias Ignácio
Orientador: Prof. Dr. Laecio Carvalho de Barros
Co-orientador: Dr. Estevão Esmi Laureano

Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Matemática, Matemática Aplicada e Computação Científica
Departamento de Matemática Aplicada

Campinas, 11/06/2015

Agenda

1. Conceitos Preliminares.
2. Princípio de extensão sup-J.
3. Arimética baseada em t-normas.
4. Arimética completamente correlacionada.
5. Família de distribuição de possibilidade conjunta parametrizada.
6. Aplicações em biomatemática.

Norma de números fuzzy

Norma de Hausdorff de um número fuzzy

A norma de *Hausdorff* de um número fuzzy é definida como a função $||\cdot|| : \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \to [0, \infty)$ dada por:

$$||A|| = \bigvee_{x \in [A]^0} |x|, \quad \forall A \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}. \tag{1}$$

Distribuição de possibilidade conjunta

Distribuição de possibilidade conjunta

Um conjunto fuzzy $J \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ é denominado distribuição de possibilidade conjunta entre os números fuzzy $A_1, \ldots, A_n$ se:

$$A_i(x) = \bigvee \{J(x_1, \ldots, x_n) \,|\, (x_1, \ldots, x_n) \in X_1 \times \ldots \times X_n \text{ com } x_i = x\}. \quad (2)$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ e $i = 1, \ldots, n$.
Além disso, A_i é chamada de i-ésima distribuição marginal de J.

Distribuição de possibilidade conjunta

Distribuição de possibilidade conjunta

Um conjunto fuzzy $J \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ é denominado distribuição de possibilidade conjunta entre os números fuzzy $A_1, \ldots, A_n$ se:

$$A_i(x) = \bigvee \{J(x_1, \ldots, x_n) \,|\, (x_1, \ldots, x_n) \in X_1 \times \ldots \times X_n \text{ com } x_i = x\}. \quad (2)$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ e $i = 1, \ldots, n$.
Além disso, A_i é chamada de i-ésima distribuição marginal de J.

Exemplos de distribuições de possibilidade conjunta:

1. $J_\wedge(x_1, \ldots, x_n) = A_1(x_1) \wedge \ldots \wedge A_n(x_n)$
2. $J_{t_P}(x_1, \ldots, x_n) = A_1(x_1) * \ldots * A_n(x_n)$
3. $J_{t_D}(x_1, \ldots, x_n) = A_1(x_1)\, t_D \ldots t_D\, A_n(x_n)$

O princípio de extensão sup-J

Princípio de extensão sup-J

Seja $J \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ uma distribuição de possibilidade conjunta dos números fuzzy $A_1, \ldots, A_n \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ e $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Então, a extensão sup-J de f é definida por:

$$f_J(A_1, \ldots, A_n)(y) = \bigvee_{(x_1, \ldots, x_n) \in f^{-1}(y)} J(x_1, \ldots, x_n) \tag{3}$$

para todo $A_1, \ldots, A_n \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$.

O princípio de extensão sup-J

Princípio de extensão sup-J

Seja $J \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ uma distribuição de possibilidade conjunta dos números fuzzy $A_1, \ldots, A_n \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ e $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Então, a extensão sup-J de f é definida por:

$$f_J(A_1, \ldots, A_n)(y) = \bigvee_{(x_1,\ldots,x_n) \in f^{-1}(y)} J(x_1, \ldots, x_n) \tag{3}$$

para todo $A_1, \ldots, A_n \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$.

1. Se $J(x_1, \ldots, x_n) = A_1(x_1) \wedge \ldots \wedge A_n(x_n)$, então $f_J(A_1, \ldots, A_n)$ se reduz ao princípio de extensão proposto por *Zadeh*. Além disso, nesse caso, os números fuzzy $A_1, \ldots, A_n$ são ditos **não interativos**.

O princípio de extensão sup-J

Princípio de extensão sup-J

Seja $J \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ uma distribuição de possibilidade conjunta dos números fuzzy $A_1, \ldots, A_n \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ e $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Então, a extensão sup-J de f é definida por:

$$f_J(A_1, \ldots, A_n)(y) = \bigvee_{(x_1,\ldots,x_n)\in f^{-1}(y)} J(x_1, \ldots, x_n) \qquad (3)$$

para todo $A_1, \ldots, A_n \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$.

1. Se $J(x_1, \ldots, x_n) = A_1(x_1) \wedge \ldots \wedge A_n(x_n)$, então $f_J(A_1, \ldots, A_n)$ se reduz ao princípio de extensão proposto por *Zadeh*. Além disso, nesse caso, os números fuzzy $A_1, \ldots, A_n$ são ditos **não interativos**.
2. Se $J(x_1, \ldots, x_n) = A_1(x_1)\, t \ldots t\, A_n(x_n)$, onde t é uma t-norma qualquer, então $f_J(A_1, \ldots, A_n)$ se reduz ao princípio de extensão baseado em t-normas.

Generalização do teorema de *Nguyen*

Uma generalização do teorema de Nguyen

Sejam $A_1, \ldots, A_n$ números fuzzy com distribuição de possibilidade conjunta J e $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Então:

Generalização do teorema de *Nguyen*

Uma generalização do teorema de Nguyen

Sejam $A_1, \ldots, A_n$ números fuzzy com distribuição de possibilidade conjunta J e $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Então:

$$[f_J(A_1, \ldots, A_n)]^\alpha = f([J]^\alpha) = \{f(x) \in \mathbb{R} | x \in [J]^\alpha\} \text{ para todo } \alpha \in [0, 1].$$

Uma generalização do teorema de Nguyen

Sejam $A_1, \ldots, A_n$ números fuzzy com distribuição de possibilidade conjunta J e $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Então:

$$[f_J(A_1, \ldots, A_n)]^\alpha = f([J]^\alpha) = \{f(x) \in \mathbb{R} | x \in [J]^\alpha\} \text{ para todo } \alpha \in [0, 1].$$

Em particular, se os números fuzzy $A_1, \ldots, A_n$ forem não interativos:

$$[f_\wedge(A_1, \ldots, A_n)]^\alpha = f([A_1]^\alpha \times \ldots \times [A_n]^\alpha)$$

Operações aritméticas via princípio de extensão de Zadeh

Sejam A e B dois números fuzzy cujos α-níveis são dados, respectivamente, por $[a_1^\alpha, a_2^\alpha]$ e $[b_1^\alpha, b_2^\alpha]$.

1. **Soma:** $[+_\wedge(A, B)]^\alpha = +([A]^\alpha \times [B]^\alpha) = [A]^\alpha + [B]^\alpha = [a_1^\alpha, a_2^\alpha] + [b_1^\alpha, b_2^\alpha] = [a_1^\alpha + b_1^\alpha, a_2^\alpha + b_2^\alpha]$.

Operações aritméticas via princípio de extensão de Zadeh

Sejam A e B dois números fuzzy cujos α-níveis são dados, respectivamente, por $[a_1^\alpha, a_2^\alpha]$ e $[b_1^\alpha, b_2^\alpha]$.

1. **Soma:** $[+_\wedge(A,B)]^\alpha = +([A]^\alpha \times [B]^\alpha) = [A]^\alpha + [B]^\alpha = [a_1^\alpha, a_2^\alpha] + [b_1^\alpha, b_2^\alpha] = [a_1^\alpha + b_1^\alpha, a_2^\alpha + b_2^\alpha]$.
2. **Subtração:** $[-_\wedge(A,B)]^\alpha = -([A]^\alpha \times [B]^\alpha) = [A]^\alpha - [B]^\alpha = [a_1^\alpha, a_2^\alpha] - [b_1^\alpha, b_2^\alpha] = [a_1^\alpha - b_2^\alpha, a_2^\alpha - b_1^\alpha]$.

Operações aritméticas via princípio de extensão de Zadeh

Sejam A e B dois números fuzzy cujos α-níveis são dados, respectivamente, por $[a_1^\alpha, a_2^\alpha]$ e $[b_1^\alpha, b_2^\alpha]$.

1. **Soma:** $[+_\wedge(A, B)]^\alpha = +([A]^\alpha \times [B]^\alpha) = [A]^\alpha + [B]^\alpha = [a_1^\alpha, a_2^\alpha] + [b_1^\alpha, b_2^\alpha] = [a_1^\alpha + b_1^\alpha, a_2^\alpha + b_2^\alpha]$.
2. **Subtração:** $[-_\wedge(A, B)]^\alpha = -([A]^\alpha \times [B]^\alpha) = [A]^\alpha - [B]^\alpha = [a_1^\alpha, a_2^\alpha] - [b_1^\alpha, b_2^\alpha] = [a_1^\alpha - b_2^\alpha, a_2^\alpha - b_1^\alpha]$.
3. **Multiplicação por escalar:**

$$[f_{\delta_\wedge}(A)]^\alpha = \begin{cases} [\delta a_1^\alpha, \delta a_2^\alpha] & \text{se } \delta \geq 0 \\ [\delta a_2^\alpha, \delta a_1^\alpha] & \text{se } \delta < 0 \end{cases}$$

Operações aritméticas via princípio de extensão de Zadeh

Sejam A e B dois números fuzzy cujos α-níveis são dados, respectivamente, por $[a_1^\alpha, a_2^\alpha]$ e $[b_1^\alpha, b_2^\alpha]$.

1. **Soma:** $[+_\wedge(A,B)]^\alpha = +([A]^\alpha \times [B]^\alpha) = [A]^\alpha + [B]^\alpha = [a_1^\alpha, a_2^\alpha] + [b_1^\alpha, b_2^\alpha] = [a_1^\alpha + b_1^\alpha, a_2^\alpha + b_2^\alpha]$.
2. **Subtração:** $[-_\wedge(A,B)]^\alpha = -([A]^\alpha \times [B]^\alpha) = [A]^\alpha - [B]^\alpha = [a_1^\alpha, a_2^\alpha] - [b_1^\alpha, b_2^\alpha] = [a_1^\alpha - b_2^\alpha, a_2^\alpha - b_1^\alpha]$.
3. **Multiplicação por escalar:**

$$[f_{\delta_\wedge}(A)]^\alpha = \begin{cases} [\delta a_1^\alpha, \delta a_2^\alpha] & \text{se } \delta \geq 0 \\ [\delta a_2^\alpha, \delta a_1^\alpha] & \text{se } \delta < 0 \end{cases}$$

4. **Produto:**
$[*_\wedge(A,B)]^\alpha = *([A]^\alpha \times [B]^\alpha) = [A]^\alpha * [B]^\alpha = [a_1^\alpha, a_2^\alpha] * [b_1^\alpha, b_2^\alpha] =$
$[\min\{a_1^\alpha b_1^\alpha, a_1^\alpha\ b_2^\alpha, a_2^\alpha b_1^\alpha, a_2^\alpha b_2^\alpha\}, \max\{a_1^\alpha b_1^\alpha, a_1^\alpha\ b_2^\alpha, a_2^\alpha b_1^\alpha, a_2^\alpha b_2^\alpha\}]$.

Operações aritméticas via princípio de extensão de Zadeh

Sejam A e B dois números fuzzy cujos α-níveis são dados, respectivamente, por $[a_1^\alpha, a_2^\alpha]$ e $[b_1^\alpha, b_2^\alpha]$.

1. **Soma:** $[+_\wedge(A,B)]^\alpha = +([A]^\alpha \times [B]^\alpha) = [A]^\alpha + [B]^\alpha = [a_1^\alpha, a_2^\alpha] + [b_1^\alpha, b_2^\alpha] = [a_1^\alpha + b_1^\alpha, a_2^\alpha + b_2^\alpha]$.
2. **Subtração:** $[-_\wedge(A,B)]^\alpha = -([A]^\alpha \times [B]^\alpha) = [A]^\alpha - [B]^\alpha = [a_1^\alpha, a_2^\alpha] - [b_1^\alpha, b_2^\alpha] = [a_1^\alpha - b_2^\alpha, a_2^\alpha - b_1^\alpha]$.
3. **Multiplicação por escalar:**
$$[f_{\delta_\wedge}(A)]^\alpha = \begin{cases} [\delta a_1^\alpha, \delta a_2^\alpha] & \text{se } \delta \geq 0 \\ [\delta a_2^\alpha, \delta a_1^\alpha] & \text{se } \delta < 0 \end{cases}$$
4. **Produto:**
$[*_\wedge(A,B)]^\alpha = *([A]^\alpha \times [B]^\alpha) = [A]^\alpha * [B]^\alpha = [a_1^\alpha, a_2^\alpha] * [b_1^\alpha, b_2^\alpha] =$
$[\min\{a_1^\alpha b_1^\alpha, a_1^\alpha\ b_2^\alpha, a_2^\alpha b_1^\alpha, a_2^\alpha b_2^\alpha\}, \max\{a_1^\alpha b_1^\alpha, a_1^\alpha\ b_2^\alpha, a_2^\alpha b_1^\alpha, a_2^\alpha b_2^\alpha\}]$.
5. **Divisão:** Suponha que $0 \notin [B]^0$.
$[\div_\wedge(A,B)]^\alpha = \div([A]^\alpha \times [B]^\alpha) = \frac{[A]^\alpha}{[B]^\alpha} = \frac{[a_1^\alpha, a_2^\alpha]}{[b_1^\alpha, b_2^\alpha]} = [a_1^\alpha, a_2^\alpha] *_\wedge [\frac{1}{b_2^\alpha}, \frac{1}{b_1^\alpha}]$.

Operações aritméticas via t-norma drástica

Sejam A e B dois números fuzzy cujos α-níveis são dados, respectivamente, por $[a_1^\alpha, a_2^\alpha]$ e $[b_1^\alpha, b_2^\alpha]$. Então:

1. **Soma de Números Fuzzy:**
   $[+_{t_D}(A,B)]^\alpha = [\min\{a_1^\alpha + b_1^1, b_1^\alpha + a_1^1\}, \max\{a_2^\alpha + b_2^1, b_2^\alpha + a_2^1\}].$

Operações aritméticas via t-norma drástica

Sejam A e B dois números fuzzy cujos α-níveis são dados, respectivamente, por $[a_1^\alpha, a_2^\alpha]$ e $[b_1^\alpha, b_2^\alpha]$. Então:

1. **Soma de Números Fuzzy:**
   $[+_{t_D}(A, B)]^\alpha = [\min\{a_1^\alpha + b_1^1, b_1^\alpha + a_1^1\}, \max\{a_2^\alpha + b_2^1, b_2^\alpha + a_2^1\}]$.
2. **Subtração de Números Fuzzy:**
   $[-_{t_D}(A, B)]^\alpha = [\min\{a_1^\alpha - b_2^1, a_1^1 - b_2^\alpha\}, \max\{a_2^\alpha - b_1^1, a_2^1 - b_1^\alpha\}]$.

Operações aritméticas via t-norma drástica

Sejam A e B dois números fuzzy cujos α-níveis são dados, respectivamente, por $[a_1^\alpha, a_2^\alpha]$ e $[b_1^\alpha, b_2^\alpha]$. Então:

1. **Soma de Números Fuzzy:**
   $[+_{t_D}(A,B)]^\alpha = [\min\{a_1^\alpha + b_1^1, b_1^\alpha + a_1^1\}, \max\{a_2^\alpha + b_2^1, b_2^\alpha + a_2^1\}]$.
2. **Subtração de Números Fuzzy:**
   $[-_{t_D}(A,B)]^\alpha = [\min\{a_1^\alpha - b_2^1, a_1^1 - b_2^\alpha\}, \max\{a_2^\alpha - b_1^1, a_2^1 - b_1^\alpha\}]$.
3. **Multiplicação de Número Fuzzy por escalar:**

$$[f_{\delta\, t_D}(A)]^\alpha = \begin{cases} [\delta a_1^\alpha, \delta a_2^\alpha] & \text{se } \delta \geq 0 \\ [\delta a_2^\alpha, \delta a_1^\alpha] & \text{se } \delta < 0 \end{cases}$$

Operações aritméticas via t-norma drástica

Sejam A e B dois números fuzzy cujos α-níveis são dados, respectivamente, por $[a_1^\alpha, a_2^\alpha]$ e $[b_1^\alpha, b_2^\alpha]$. Então:

1. **Soma de Números Fuzzy:**
   $[+_{t_D}(A,B)]^\alpha = [\min\{a_1^\alpha + b_1^1, b_1^\alpha + a_1^1\}, \max\{a_2^\alpha + b_2^1, b_2^\alpha + a_2^1\}].$
2. **Subtração de Números Fuzzy:**
   $[-_{t_D}(A,B)]^\alpha = [\min\{a_1^\alpha - b_2^1, a_1^1 - b_2^\alpha\}, \max\{a_2^\alpha - b_1^1, a_2^1 - b_1^\alpha\}].$
3. **Multiplicação de Número Fuzzy por escalar:**

$$[f_{\delta\, t_D}(A)]^\alpha = \begin{cases} [\delta a_1^\alpha, \delta a_2^\alpha] & \text{se } \delta \geq 0 \\ [\delta a_2^\alpha, \delta a_1^\alpha] & \text{se } \delta < 0 \end{cases}$$

4. **Produto de Números Fuzzy:**
   $[*_{t_D}(A,B)]^\alpha = [\min\{a_1^\alpha b_1^1, b_1^\alpha a_1^1\}, \max\{a_2^\alpha b_2^1, b_2^\alpha a_2^1\}].$

Operações aritméticas via t-norma drástica

Sejam A e B dois números fuzzy cujos α-níveis são dados, respectivamente, por $[a_1^\alpha, a_2^\alpha]$ e $[b_1^\alpha, b_2^\alpha]$. Então:

1. **Soma de Números Fuzzy:**
   $[+_{t_D}(A,B)]^\alpha = [\min\{a_1^\alpha + b_1^1, b_1^\alpha + a_1^1\}, \max\{a_2^\alpha + b_2^1, b_2^\alpha + a_2^1\}]$.
2. **Subtração de Números Fuzzy:**
   $[-_{t_D}(A,B)]^\alpha = [\min\{a_1^\alpha - b_2^1, a_1^1 - b_2^\alpha\}, \max\{a_2^\alpha - b_1^1, a_2^1 - b_1^\alpha\}]$.
3. **Multiplicação de Número Fuzzy por escalar:**

$$[f_{\delta\, t_D}(A)]^\alpha = \begin{cases} [\delta a_1^\alpha, \delta a_2^\alpha] & \text{se } \delta \geq 0 \\ [\delta a_2^\alpha, \delta a_1^\alpha] & \text{se } \delta < 0 \end{cases}$$

4. **Produto de Números Fuzzy:**
   $[*_{t_D}(A,B)]^\alpha = [\min\{a_1^\alpha b_1^1, b_1^\alpha a_1^1\}, \max\{a_2^\alpha b_2^1, b_2^\alpha a_2^1\}]$.
5. **Divisão de Números Fuzzy:** Suponha que $0 \notin [B]^0$.
   $[\div_{t_D}(A,B)]^\alpha = [a_1^\alpha, a_2^\alpha] *_{t_D} [\frac{1}{b_2^\alpha}, \frac{1}{b_1^\alpha}]$.

Exemplo - Soma de números próximos de zero

Considere os números fuzzy triangulares $A = B = (-1, 0, 1)$ que modelam a expressão "próximo de zero".

Exemplo - Soma de números próximos de zero

Considere os números fuzzy triangulares $A = B = (-1, 0, 1)$ que modelam a expressão "próximo de zero".

Soma via princípio de extensão de Zadeh

1. $[+_\wedge(A, B)]^\alpha = [A]^\alpha + [B]^\alpha = [(0-(-1))\alpha - 1, (0-1)\alpha + 1] + [(0-(-1))\alpha - 1, (0-1)\alpha + 1] = [2\alpha - 2, -2\alpha + 2]$.

Exemplo - Soma de números próximos de zero

Considere os números fuzzy triangulares $A = B = (-1, 0, 1)$ que modelam a expressão "próximo de zero".

Soma via princípio de extensão de Zadeh

1. $[+_\wedge(A, B)]^\alpha = [A]^\alpha + [B]^\alpha = [(0 - (-1))\alpha - 1, (0 - 1)\alpha + 1] + [(0 - (-1))\alpha - 1, (0 - 1)\alpha + 1] = [2\alpha - 2, -2\alpha + 2]$.
2. Portanto: $+_\wedge(A, B) = (-2; 0; 2)$.

Exemplo - Soma de números próximos de zero

Considere os números fuzzy triangulares $A = B = (-1, 0, 1)$ que modelam a expressão "próximo de zero".

Soma via princípio de extensão de Zadeh

1. $[+_{\wedge}(A, B)]^{\alpha} = [A]^{\alpha} + [B]^{\alpha} = [(0 - (-1))\alpha - 1, (0 - 1)\alpha + 1] + [(0 - (-1))\alpha - 1, (0 - 1)\alpha + 1] = [2\alpha - 2, -2\alpha + 2]$.
2. Portanto: $+_{\wedge}(A, B) = (-2; 0; 2)$.
3. $|| +_{\wedge} (A, B)|| = 2$.

Exemplo - Soma de números próximos de zero

Considere os números fuzzy triangulares $A = B = (-1, 0, 1)$ que modelam a expressão "próximo de zero".

Soma via princípio de extensão de Zadeh

1. $[+_\wedge(A, B)]^\alpha = [A]^\alpha + [B]^\alpha = [(0-(-1))\alpha - 1, (0-1)\alpha + 1] + [(0-(-1))\alpha - 1, (0-1)\alpha + 1] = [2\alpha - 2, -2\alpha + 2]$.
2. Portanto: $+_\wedge(A, B) = (-2; 0; 2)$.
3. $|| +_\wedge (A, B)|| = 2$.

Soma baseada na t-norma drástica

1. $[+_{t_D}(A, B)]^\alpha = [\min\{a_1^\alpha + 0, b_1^\alpha + 0\}, \max\{a_2^\alpha + 0, b_2^\alpha + 0\}] = [a_1^\alpha, a_2^\alpha]$.

Exemplo - Soma de números próximos de zero

Considere os números fuzzy triangulares $A = B = (-1, 0, 1)$ que modelam a expressão "próximo de zero".

Soma via princípio de extensão de Zadeh

1. $[+_\wedge(A, B)]^\alpha = [A]^\alpha + [B]^\alpha = [(0 - (-1))\alpha - 1, (0 - 1)\alpha + 1] + [(0 - (-1))\alpha - 1, (0 - 1)\alpha + 1] = [2\alpha - 2, -2\alpha + 2]$.
2. Portanto: $+_\wedge(A, B) = (-2; 0; 2)$.
3. $|| +_\wedge (A, B)|| = 2$.

Soma baseada na t-norma drástica

1. $[+_{t_D}(A, B)]^\alpha = [\min\{a_1^\alpha + 0, b_1^\alpha + 0\}, \max\{a_2^\alpha + 0, b_2^\alpha + 0\}] = [a_1^\alpha, a_2^\alpha]$.
2. $+_{t_D}(A, B) = (-1; 0; 1)$.

Exemplo - Soma de números próximos de zero

Considere os números fuzzy triangulares $A = B = (-1, 0, 1)$ que modelam a expressão "próximo de zero".

Soma via princípio de extensão de Zadeh

1. $[+_\wedge(A, B)]^\alpha = [A]^\alpha + [B]^\alpha = [(0 - (-1))\alpha - 1, (0 - 1)\alpha + 1] + [(0 - (-1))\alpha - 1, (0 - 1)\alpha + 1] = [2\alpha - 2, -2\alpha + 2]$.
2. Portanto: $+_\wedge(A, B) = (-2; 0; 2)$.
3. $|| +_\wedge (A, B)|| = 2$.

Soma baseada na t-norma drástica

1. $[+_{t_D}(A, B)]^\alpha = [\min\{a_1^\alpha + 0, b_1^\alpha + 0\}, \max\{a_2^\alpha + 0, b_2^\alpha + 0\}] = [a_1^\alpha, a_2^\alpha]$.
2. $+_{t_D}(A, B) = (-1; 0; 1)$.
3. $|| +_{t_D} (A, B)|| = 1$.

Limitantes - princípio de extensão baseado em t-normas

Limitante inferior e superior para t-normas

Sejam a e b números reais quaisquer e $\wedge$ e t_D as t-normas do mínimo e drástica, respectivamente. Então, para qualquer t-norma T, o seguinte resultado é válido:

$$a \wedge b \geq a \, T \, b \geq a \, t_D \, b$$

Limitantes - princípio de extensão baseado em t-normas

Limitante inferior e superior para t-normas

Sejam a e b números reais quaisquer e $\wedge$ e t_D as t-normas do mínimo e drástica, respectivamente. Então, para qualquer t-norma T, o seguinte resultado é válido:

$$a \ \wedge \ b \geq \ a \ T \ b \geq a \ t_D \ b$$

Sejam A e B números fuzzy cujos α-níveis são dados, respectivamente, por $[a_1^\alpha, a_2^\alpha]$ e $[b_1^\alpha, b_2^\alpha]$. Seja $\bullet : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qualquer uma das operações artiméticas. Então, para todo $\alpha \in [0,1]$, o seguinte resultado é válido:

$$[\bullet_{t_D}(A,B)]^\alpha \subseteq [\bullet_T(A,B)]^\alpha \subseteq [\bullet_\wedge(A,B)]^\alpha.$$

Limitantes - princípio de extensão baseado em t-normas

Limitante inferior e superior para t-normas

Sejam a e b números reais quaisquer e $\wedge$ e t_D as t-normas do mínimo e drástica, respectivamente. Então, para qualquer t-norma T, o seguinte resultado é válido:

$$a \ \wedge \ b \geq \ a \ T \ b \geq a \ t_D \ b$$

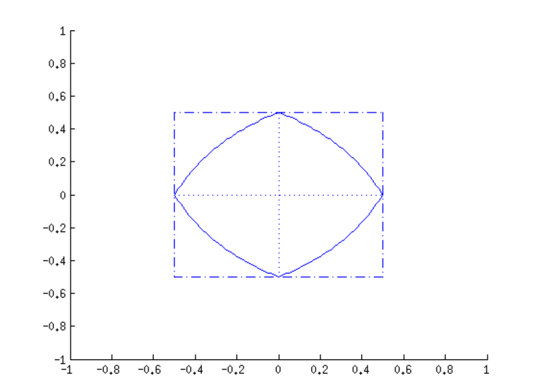
Sejam A e B números fuzzy cujos α-níveis são dados, respectivamente, por $[a_1^\alpha, a_2^\alpha]$ e $[b_1^\alpha, b_2^\alpha]$. Seja $\bullet : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qualquer uma das operações artiméticas. Então, para todo $\alpha \in [0,1]$, o seguinte resultado é válido:

$$[\bullet_{t_D}(A,B)]^\alpha \subseteq [\bullet_T(A,B)]^\alpha \subseteq [\bullet_\wedge(A,B)]^\alpha.$$

$$|| \bullet_{t_D} (A,B)|| \leq || \bullet_T (A,B)|| \leq || \bullet_\wedge (A,B)||.$$

Limitantes - princípio de extensão baseado em t-normas

Considere os números fuzzy triangulares $A_1 = A_2 = (-1; 0; 1)$.
A figura abaixo ilusta os 0.5-níveis das distribuições de possibilidade conjuntas J_{t_D} (pontilhado), J_{t_p} (contínuo) e $J_\wedge$ (traço e ponto) entre A_1 e A_2:



Exemplo - Soma de números próximos de zero

Considere os números fuzzy triangulares $A = B = (-1, 0, 1)$ que modelam a expressão "próximo de zero". Então, para qualquer t-norma T:

Exemplo - Soma de números próximos de zero

Considere os números fuzzy triangulares $A = B = (-1, 0, 1)$ que modelam a expressão "próximo de zero". Então, para qualquer t-norma T:

$$1 = || +_{t_D} (A, B)|| \leq || +_t (A, B)|| \leq || +_\wedge (A, B)|| = 2.$$

Exemplo - Soma de números próximos de zero

Considere os números fuzzy triangulares $A = B = (-1, 0, 1)$ que modelam a expressão "próximo de zero". Então, para qualquer t-norma T:

$$1 = || +_{t_D} (A, B)|| \leq || +_t (A, B)|| \leq || +_\wedge (A, B)|| = 2.$$

Ao utilizarmos as extensões baseadas em t-normas, as normas da soma entre A e B ficam restritas ao intervalo $[1, 2]$.

Exemplo - Soma de números próximos de zero

Considere os números fuzzy triangulares $A = B = (-1, 0, 1)$ que modelam a expressão "próximo de zero". Então, para qualquer t-norma T:

$$1 = || +_{t_D} (A, B)|| \leq || +_t (A, B)|| \leq || +_\wedge (A, B)|| = 2.$$

Ao utilizarmos as extensões baseadas em t-normas, as normas da soma entre A e B ficam restritas ao intervalo $[1, 2]$.

Podemos utilizar extensões não baseadas em t-normas para dar origem a somas com norma inferior a 1.

Números fuzzy completamente correlacionados

Dois números fuzzy A e B são ditos completamente correlacionados se existir $q, r \in \mathbb{R}$, com $q \neq 0$, tal que sua distribuição de possibilidade conjunta J seja definida por:

Números fuzzy completamente correlacionados

Dois números fuzzy A e B são ditos completamente correlacionados se existir $q, r \in \mathbb{R}$, com $q \neq 0$, tal que sua distribuição de possibilidade conjunta J seja definida por:

Números fuzzy completamente correlacionados

$$\begin{aligned} J_{(q,r)}(x,y) &= A(x)\chi_{\{qx+r=y\}}(x,y) \\ &= B(y)\chi_{\{qx+r=y\}}(x,y) \\ &\quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{4}$$

$\chi_{\{qx+r=y\}}$ é a função característica do subconjunto $\{(x, qx+r) \mid x \in \mathbb{R}\}$ do $\mathbb{R}^2$, isto é:

$$\chi_{\{qx+r=y\}}(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } qx + r = y \\ 0 & \text{c.c} \end{cases} .$$

Aritmética entre números fuzzy completamente correlacionados

Sejam A e B dois números fuzzy cujos α-níveis são dados, respectivamente, por $[a_1^\alpha, a_2^\alpha]$ e $[b_1^\alpha, b_2^\alpha]$. Então:

Aritmética entre números fuzzy completamente correlacionados

Sejam A e B dois números fuzzy cujos α-níveis são dados, respectivamente, por $[a_1^\alpha, a_2^\alpha]$ e $[b_1^\alpha, b_2^\alpha]$. Então:

1. **Soma:** $[+_{J_{(q,r)}}(A,B)]^\alpha = \{(x+y) \in \mathbb{R} | A(x) \geq \alpha \text{ e } qx + r = y\} =$
$\{(q+1)x + r \in \mathbb{R} | A(x) \geq \alpha\} =$
$(q+1)\{x \in \mathbb{R} | A(x) \geq \alpha\} + r = (q+1)[A]^\alpha + r$

Aritmética entre números fuzzy completamente correlacionados

Sejam A e B dois números fuzzy cujos α-níveis são dados, respectivamente, por $[a_1^\alpha, a_2^\alpha]$ e $[b_1^\alpha, b_2^\alpha]$. Então:

1. **Soma:** $[+_{J_{(q,r)}}(A,B)]^\alpha = \{(x+y) \in \mathbb{R} | A(x) \geq \alpha \text{ e } qx + r = y\} = \{(q+1)x + r \in \mathbb{R} | A(x) \geq \alpha\} = (q+1)\{x \in \mathbb{R} | A(x) \geq \alpha\} + r = (q+1)[A]^\alpha + r$
2. **Subtração:** $[-_{J_{(q,r)}}(A,B)]^\alpha = \{(x-y) \in \mathbb{R} | A(x) \geq \alpha \text{ e } qx + r = y\} = \{(1-q)x - r \in \mathbb{R} | A(x) \geq \alpha\} = (1-q)\{x \in \mathbb{R} | A(x) \geq \alpha\} - r = (1-q)[A]^\alpha - r$

Aritmética entre números fuzzy completamente correlacionados

Sejam A e B dois números fuzzy cujos α-níveis são dados, respectivamente, por $[a_1^\alpha, a_2^\alpha]$ e $[b_1^\alpha, b_2^\alpha]$. Então:

1. **Soma:** $[+_{J_{(q,r)}}(A,B)]^\alpha = \{(x+y) \in \mathbb{R} | A(x) \geq \alpha \text{ e } qx + r = y\} = \{(q+1)x + r \in \mathbb{R} | A(x) \geq \alpha\} = (q+1)\{x \in \mathbb{R} | A(x) \geq \alpha\} + r = (q+1)[A]^\alpha + r$
2. **Subtração:** $[-_{J_{(q,r)}}(A,B)]^\alpha = \{(x-y) \in \mathbb{R} | A(x) \geq \alpha \text{ e } qx + r = y\} = \{(1-q)x - r \in \mathbb{R} | A(x) \geq \alpha\} = (1-q)\{x \in \mathbb{R} | A(x) \geq \alpha\} - r = (1-q)[A]^\alpha - r$
3. **Produto:** $[*_{J_{(q,r)}}(A,B)]^\alpha = \{(xy) \in \mathbb{R} | A(x) \geq \alpha \text{ e } qx + r = y\} = \{qx^2 + rx \in \mathbb{R} | A(x) \geq \alpha\}$

Aritmética entre números fuzzy completamente correlacionados

Sejam A e B dois números fuzzy cujos α-níveis são dados, respectivamente, por $[a_1^\alpha, a_2^\alpha]$ e $[b_1^\alpha, b_2^\alpha]$. Então:

1. **Soma:** $[+_{J_{(q,r)}}(A, B)]^\alpha = \{(x + y) \in \mathbb{R} | A(x) \geq \alpha \text{ e } qx + r = y\} = \{(q + 1)x + r \in \mathbb{R} | A(x) \geq \alpha\} = (q + 1)\{x \in \mathbb{R} | A(x) \geq \alpha\} + r = (q + 1)[A]^\alpha + r$
2. **Subtração:** $[-_{J_{(q,r)}}(A, B)]^\alpha = \{(x - y) \in \mathbb{R} | A(x) \geq \alpha \text{ e } qx + r = y\} = \{(1 - q)x - r \in \mathbb{R} | A(x) \geq \alpha\} = (1 - q)\{x \in \mathbb{R} | A(x) \geq \alpha\} - r = (1 - q)[A]^\alpha - r$
3. **Produto:** $[*_{J_{(q,r)}}(A, B)]^\alpha = \{(xy) \in \mathbb{R} | A(x) \geq \alpha \text{ e } qx + r = y\} = \{qx^2 + rx \in \mathbb{R} | A(x) \geq \alpha\}$
4. **Divisão:** suponha que $0 \notin [B]^0$. $[\div_{J_{(q,r)}}(A, B)]^\alpha = \{(x/y) \in \mathbb{R} | A(x) \geq \alpha \text{ e } qx + r = y\} = \{\frac{x}{qx+r} \in \mathbb{R} | A(x) \geq \alpha\}$

Propriedades da soma completamente correlacionada

Sejam A e B são dois números fuzzy tais que $A(x) = B(qx + r), \forall x \in \mathbb{R}$, com $q, r \in \mathbb{R}$ e $q \neq 0$ então. Se $[+_{\wedge}(A, B)]^{\alpha}$ e $[+_{J_{(q,r)}}(A, B)]^{\alpha}$ representarem, respectivamente, os α-níveis das extensões de *Zadeh* e a extensão sup-$J_{(q,r)}$ (completamente correlacionada) para a soma, temos:

Propriedades da soma completamente correlacionada

Sejam A e B são dois números fuzzy tais que $A(x) = B(qx + r), \forall x \in \mathbb{R}$, com $q, r \in \mathbb{R}$ e $q \neq 0$ então. Se $[+_{\wedge}(A, B)]^{\alpha}$ e $[+_{J_{(q,r)}}(A, B)]^{\alpha}$ representarem, respectivamente, os α-níveis das extensões de *Zadeh* e a extensão sup-$J_{(q,r)}$ (completamente correlacionada) para a soma, temos:

1. Se $q > 0$, então $[+_{J_{(q,r)}}(A, B)]^{\alpha} = [+_{\wedge}(A, B)]^{\alpha}, \forall \alpha \in [0, 1]$.

Propriedades da soma completamente correlacionada

Sejam A e B são dois números fuzzy tais que $A(x) = B(qx + r), \forall x \in \mathbb{R}$, com $q, r \in \mathbb{R}$ e $q \neq 0$ então. Se $[+_{\wedge}(A, B)]^{\alpha}$ e $[+_{J_{(q,r)}}(A, B)]^{\alpha}$ representarem, respectivamente, os α-níveis das extensões de *Zadeh* e a extensão sup-$J_{(q,r)}$ (completamente correlacionada) para a soma, temos:

1. Se $q > 0$, então $[+_{J_{(q,r)}}(A, B)]^{\alpha} = [+_{\wedge}(A, B)]^{\alpha}, \forall \alpha \in [0, 1]$.
2. Se $q < 0$, então: $[+_{J_{(q,r)}}(A, B)]^{\alpha} \subseteq [+_{\wedge}(A, B)]^{\alpha}, \forall \alpha \in [0, 1]$.

Propriedades da soma completamente correlacionada

Sejam A e B são dois números fuzzy tais que $A(x) = B(qx + r), \forall x \in \mathbb{R}$, com $q, r \in \mathbb{R}$ e $q \neq 0$ então. Se $[+_{\wedge}(A, B)]^{\alpha}$ e $[+_{J_{(q,r)}}(A, B)]^{\alpha}$ representarem, respectivamente, os α-níveis das extensões de *Zadeh* e a extensão sup-$J_{(q,r)}$ (completamente correlacionada) para a soma, temos:

1. Se $q > 0$, então $[+_{J_{(q,r)}}(A, B)]^{\alpha} = [+_{\wedge}(A, B)]^{\alpha}, \forall \alpha \in [0, 1]$.
2. Se $q < 0$, então: $[+_{J_{(q,r)}}(A, B)]^{\alpha} \subseteq [+_{\wedge}(A, B)]^{\alpha}, \forall \alpha \in [0, 1]$.
3. Se $q = -1$, então: $[+_{J_{(q,r)}}(A, B)]^{\alpha} = \{r\}, \forall \alpha \in [0, 1]$.

Propriedades da soma completamente correlacionada

Sejam A e B são dois números fuzzy tais que $A(x) = B(qx + r), \forall x \in \mathbb{R}$, com $q, r \in \mathbb{R}$ e $q \neq 0$ então. Se $[+_{\wedge}(A, B)]^{\alpha}$ e $[+_{J_{(q,r)}}(A, B)]^{\alpha}$ representarem, respectivamente, os α-níveis das extensões de *Zadeh* e a extensão sup-$J_{(q,r)}$ (completamente correlacionada) para a soma, temos:

1. Se $q > 0$, então $[+_{J_{(q,r)}}(A, B)]^{\alpha} = [+_{\wedge}(A, B)]^{\alpha}, \forall \alpha \in [0, 1]$.
2. Se $q < 0$, então: $[+_{J_{(q,r)}}(A, B)]^{\alpha} \subseteq [+_{\wedge}(A, B)]^{\alpha}, \forall \alpha \in [0, 1]$.
3. Se $q = -1$, então: $[+_{J_{(q,r)}}(A, B)]^{\alpha} = \{r\}, \forall \alpha \in [0, 1]$.
4. Além disso, se $r = 0$, temos $[+_{J_{(q,r)}}(A, B)]^{\alpha} = \{0\}, \forall \alpha \in [0, 1]$.

Exemplo - Soma de números próximos de zero

Considere os números fuzzy triangulares $A = B = (-1, 0, 1)$ que modelam a expressão "próximo de zero".

Exemplo - Soma de números próximos de zero

Considere os números fuzzy triangulares $A = B = (-1, 0, 1)$ que modelam a expressão "próximo de zero".

1. A e B podem ser completamente correlacionados negativamente com $q = -1$ e $r = 0$.

Exemplo - Soma de números próximos de zero

Considere os números fuzzy triangulares $A = B = (-1, 0, 1)$ que modelam a expressão "próximo de zero".

1. A e B podem ser completamente correlacionados negativamente com $q = -1$ e $r = 0$.
2. $+_{J_{(q,r)}}(A, B) = \chi_{\{0\}}$

Exemplo - Soma de números próximos de zero

Considere os números fuzzy triangulares $A = B = (-1, 0, 1)$ que modelam a expressão "próximo de zero".

1. A e B podem ser completamente correlacionados negativamente com $q = -1$ e $r = 0$.
2. $+_{J_{(q,r)}}(A, B) = \chi_{\{0\}}$
3. $|| +_{J_{(q,r)}} (A, B)|| = 0$

Exemplo - Soma de números próximos de zero

Considere os números fuzzy triangulares $A = B = (-1, 0, 1)$ que modelam a expressão "próximo de zero".

1. A e B podem ser completamente correlacionados negativamente com $q = -1$ e $r = 0$.
2. $+_{J_{(q,r)}}(A, B) = \chi_{\{0\}}$
3. $|| +_{J_{(q,r)}} (A, B)|| = 0$

$$0 = ||+_{J_{(q,r)}}(A, B)|| < 1 = ||+_{t_D}(A, B)|| \leq ||+_t(A, B)|| \leq ||+_\wedge(A, B)|| = 2.$$

Exemplo - Soma de números próximos de zero

1. Podemos gerar somas com normas inferiores às geradas via princípio de extensão baseado em t-normas.

Exemplo - Soma de números próximos de zero

1. Podemos gerar somas com normas inferiores às geradas via princípio de extensão baseado em t-normas.
2. Esse resultado só foi possível graças à correspondência linear entre as funções de pertinência de A em B.

Exemplo - Soma de números próximos de zero

1. Podemos gerar somas com normas inferiores às geradas via princípio de extensão baseado em t-normas.
2. Esse resultado só foi possível graças à correspondência linear entre as funções de pertinência de A em B.
3. Caso os números fuzzy não fossem completamente correlacionados, como gerar, de maneira prática, somas (ou qualquer outra operação aritmética) com normas inferiores às geradas via t-normas?

Exemplo - Soma de números próximos de zero

1. Podemos gerar somas com normas inferiores às geradas via princípio de extensão baseado em t-normas.
2. Esse resultado só foi possível graças à correspondência linear entre as funções de pertinência de A em B.
3. Caso os números fuzzy não fossem completamente correlacionados, como gerar, de maneira prática, somas (ou qualquer outra operação aritmética) com normas inferiores às geradas via t-normas?
4. Seria possível ter controle sobre a norma das extensões das operações aritméticas entre qualquer par de números fuzzy?

Exemplo - Soma de números próximos de zero

1. Podemos gerar somas com normas inferiores às geradas via princípio de extensão baseado em t-normas.
2. Esse resultado só foi possível graças à correspondência linear entre as funções de pertinência de A em B.
3. Caso os números fuzzy não fossem completamente correlacionados, como gerar, de maneira prática, somas (ou qualquer outra operação aritmética) com normas inferiores às geradas via t-normas?
4. Seria possível ter controle sobre a norma das extensões das operações aritméticas entre qualquer par de números fuzzy?
5. Mais precisamente, seria possível construir uma sequência de distribuições de possibilidade conjuntas para qualquer par de números fuzzy cuja norma da correspondente extensão das operações aritméticas seja crescente?

Uma família de distribuição de possibilidade conjunta parametrizada

Dados dois números fuzzy arbitrários $A_1, A_2 \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ e uma operação aritmética $\bullet : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qualquer, definimos as funções $f_{\wedge}^{i}, f_{\vee}^{i} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, da seguinte forma:

Uma família de distribuição de possibilidade conjunta parametrizada

Dados dois números fuzzy arbitrários $A_1, A_2 \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ e uma operação aritmética $\bullet : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qualquer, definimos as funções $f^i_\wedge, f^i_\vee : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, da seguinte forma:

$$f^i_\wedge(z) = \bigwedge_{w \in [A_{3-i}]^{A_i(z)}} |w \bullet z| \quad \text{para todo } z \in \mathbb{R} \text{ e } i = 1, 2 \tag{5}$$

e

$$f^i_\vee(z) = \bigvee_{w \in [A_{3-i}]^{A_i(z)}} |w \bullet z| \quad \text{para todo } z \in \mathbb{R} \text{ e } i = 1, 2. \tag{6}$$

Uma família de distribuição de possibilidade conjunta parametrizada

Dados dois números fuzzy arbitrários $A_1, A_2 \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ e uma operação aritmética $\bullet : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qualquer, definimos as funções $f^i_\wedge, f^i_\vee : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, da seguinte forma:

$$f^i_\wedge(z) = \bigwedge_{w \in [A_{3-i}]^{A_i(z)}} |w \bullet z| \text{ para todo } z \in \mathbb{R} \text{ e } i = 1, 2 \tag{5}$$

e

$$f^i_\vee(z) = \bigvee_{w \in [A_{3-i}]^{A_i(z)}} |w \bullet z| \text{ para todo } z \in \mathbb{R} \text{ e } i = 1, 2. \tag{6}$$

Seja $\upsilon_\gamma : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida abaixo, para $\gamma \in [0, 1]$:

$$\upsilon_\gamma(x_1, x_2) = \bigvee_{i \in \{1,2\}} [(1 - \gamma) f^i_\wedge(x_i) + \gamma f^i_\vee(x_i)]. \tag{7}$$

Uma família de distribuição de possibilidade conjunta parametrizada

Teorema:

Dados dois números fuzzy $A_1, A_2 \in \mathbb{R}(\mathcal{F})$ e uma operação aritmética qualquer $\bullet : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, o conjunto fuzzy $J_\gamma^\bullet$, dado por:

$$J_\gamma^\bullet(x_1, x_2) = \begin{cases} A_1(x_1) \wedge A_2(x_2) & , |x_1 \bullet x_2| \leq \upsilon_\gamma(x_1, x_2) \\ 0 & , \text{c.c} \end{cases} \tag{8}$$

é uma distribuição de possibilidade conjunta entre A_1 e A_2, para todo $\gamma \in [0, 1]$.

Operações aritméticas baseadas na família de distribuição de possibilidade conjunta $J_\gamma^\bullet$

Sejam A e B dois números fuzzy quaisquer. As operações aritméticas, baseadas na distribuição de possibilidade $J_\gamma^\bullet$, são dadas por:

Operações aritméticas baseadas na família de distribuição de possibilidade conjunta $J_\gamma^\bullet$

Sejam A e B dois números fuzzy quaisquer. As operações aritméticas, baseadas na distribuição de possibilidade $J_\gamma^\bullet$, são dadas por:

1. **Soma:** $+_{J_\gamma^+}(A,B)(z) = \bigvee_{\{(x,y)|x+y=z\}} J_\gamma^+(x,y)$

Operações aritméticas

Operações aritméticas baseadas na família de distribuição de possibilidade conjunta $J_\gamma^\bullet$

Sejam A e B dois números fuzzy quaisquer. As operações aritméticas, baseadas na distribuição de possibilidade $J_\gamma^\bullet$, são dadas por:

1. **Soma:** $+_{J_\gamma^+}(A,B)(z) = \bigvee_{\{(x,y)|x+y=z\}} J_\gamma^+(x,y)$
2. **Subtração:** $-_{J_\gamma^-}(A,B)(z) = \bigvee_{\{(x,y)|x-y=z\}} J_\gamma^-(x,y)$

Operações aritméticas

Operações aritméticas baseadas na família de distribuição de possibilidade conjunta $J_\gamma^\bullet$

Sejam A e B dois números fuzzy quaisquer. As operações aritméticas, baseadas na distribuição de possibilidade $J_\gamma^\bullet$, são dadas por:

1. **Soma:** $+_{J_\gamma^+}(A,B)(z) = \bigvee_{\{(x,y)|x+y=z\}} J_\gamma^+(x,y)$
2. **Subtração:** $-_{J_\gamma^-}(A,B)(z) = \bigvee_{\{(x,y)|x-y=z\}} J_\gamma^-(x,y)$
3. **Produto:** $*_{J_\gamma^*}(A,B)(z) = \bigvee_{\{(x,y)|xy=z\}} J_\gamma^*(x,y)$

Operações aritméticas

Operações aritméticas baseadas na família de distribuição de possibilidade conjunta $J_\gamma^\bullet$

Sejam A e B dois números fuzzy quaisquer. As operações aritméticas, baseadas na distribuição de possibilidade $J_\gamma^\bullet$, são dadas por:

1. **Soma:** $+_{J_\gamma^+}(A,B)(z) = \bigvee_{\{(x,y)|x+y=z\}} J_\gamma^+(x,y)$
2. **Subtração:** $-_{J_\gamma^-}(A,B)(z) = \bigvee_{\{(x,y)|x-y=z\}} J_\gamma^-(x,y)$
3. **Produto:** $*_{J_\gamma^*}(A,B)(z) = \bigvee_{\{(x,y)|xy=z\}} J_\gamma^*(x,y)$
4. **Divisão:** suponha $0 \notin [B]^0$.
   $\div_{J_\gamma^\div}(A,B)(z) = \bigvee_{\{(x,y)|x/y=z\}} J_\gamma^\div(x,y)$

Exemplo: soma de números fuzzy interativos baseada na distribuição de possibilidade conjunta J_0^+

Sejam A_1 e A_2 os números fuzzy triagulares $A_1 = A_2 = (-1; 0; 1)$. A distribuição de possibilidade conjunta J_0^+ entre A_1 e A_2 é construída da seguinte forma:

Exemplo: soma de números fuzzy interativos baseada na distribuição de possibilidade conjunta J_0^+

Sejam A_1 e A_2 os números fuzzy triagulares $A_1 = A_2 = (-1; 0; 1)$. A distribuição de possibilidade conjunta J_0^+ entre A_1 e A_2 é construída da seguinte forma:

$$f_{\wedge}^{1}(x_1) = \bigwedge_{w \in [A_2]^{A_1(x_1)}} |w + x_1| = |-x_1 + x_1| = 0 \ \ \forall x_1 \in [A_1]^0. \tag{9}$$

Exemplo: soma de números fuzzy interativos baseada na distribuição de possibilidade conjunta J_0^+

Sejam A_1 e A_2 os números fuzzy triagulares $A_1 = A_2 = (-1; 0; 1)$. A distribuição de possibilidade conjunta J_0^+ entre A_1 e A_2 é construída da seguinte forma:

$$f_\wedge^1(x_1) = \bigwedge_{w \in [A_2]^{A_1(x_1)}} |w + x_1| = |-x_1 + x_1| = 0 \;\; \forall x_1 \in [A_1]^0. \tag{9}$$

$$f_\wedge^2(x_2) = \bigwedge_{w \in [A_1]^{A_2(x_2)}} |w + x_2| = |-x_2 + x_2| = 0 \;\; \forall x_2 \in [A_2]^0. \tag{10}$$

Exemplo: soma de números fuzzy interativos baseada na distribuição de possibilidade conjunta J_0^+

Sejam A_1 e A_2 os números fuzzy triagulares $A_1 = A_2 = (-1; 0; 1)$. A distribuição de possibilidade conjunta J_0^+ entre A_1 e A_2 é construída da seguinte forma:

$$f_{\wedge}^1(x_1) = \bigwedge_{w \in [A_2]^{A_1(x_1)}} |w + x_1| = |-x_1 + x_1| = 0 \ \ \forall x_1 \in [A_1]^0. \tag{9}$$

$$f_{\wedge}^2(x_2) = \bigwedge_{w \in [A_1]^{A_2(x_2)}} |w + x_2| = |-x_2 + x_2| = 0 \ \ \forall x_2 \in [A_2]^0. \tag{10}$$

$$\upsilon_0(x_1, x_2) = \bigvee_{i \in \{1,2\}} f_{\wedge}^i(x_i) = f_{\wedge}^1(x_1) \vee f_{\wedge}^2(x_2) = 0. \tag{11}$$

Exemplo: soma de números fuzzy interativos baseada na distribuição de possibilidade conjunta J_0^+

Exemplo: soma de números fuzzy interativos baseada na distribuição de possibilidade conjunta J_0^+

$$J_0^+(x_1, x_2) = \begin{cases} A_1(x_1) \wedge A_2(x_2) & , |x_1 + x_2| \leq 0 \\ 0 & , \text{c.c} \end{cases} \tag{12}$$

Exemplo: soma de números fuzzy interativos baseada na distribuição de possibilidade conjunta J_0^+

$$J_0^+(x_1, x_2) = \begin{cases} A_1(x_1) \wedge A_2(x_2) & , |x_1 + x_2| \leq 0 \\ 0 & , \text{c.c} \end{cases} \tag{12}$$

1. Logo, $[J_0^+(A_1, A_2)]^\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x = -y \text{ e } x \in [A_1]^\alpha\}$ para todo $\alpha \in [0, 1]$.

Exemplo: soma de números fuzzy interativos baseada na distribuição de possibilidade conjunta J_0^+

$$J_0^+(x_1, x_2) = \begin{cases} A_1(x_1) \wedge A_2(x_2) & , |x_1 + x_2| \leq 0 \\ 0 & , \text{c.c} \end{cases} \tag{12}$$

1. Logo, $[J_0^+(A_1, A_2)]^\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x = -y \text{ e } x \in [A_1]^\alpha\}$ para todo $\alpha \in [0, 1]$.
2. $$+_{J_0^+}(A_1, A_2)(z) = \begin{cases} 1 & , \text{ se } z = 0 \\ 0 & , \text{c.c} \end{cases}$$

Exemplo: soma de números fuzzy interativos baseada na distribuição de possibilidade conjunta J_0^+

$$J_0^+(x_1, x_2) = \begin{cases} A_1(x_1) \wedge A_2(x_2) & , |x_1 + x_2| \leq 0 \\ 0 & , \text{c.c} \end{cases} \tag{12}$$

1. Logo, $[J_0^+(A_1, A_2)]^\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x = -y \text{ e } x \in [A_1]^\alpha\}$ para todo $\alpha \in [0, 1]$.
2. $$+_{J_0^+}(A_1, A_2)(z) = \begin{cases} 1 & , \text{ se } z = 0 \\ 0 & , \text{c.c} \end{cases}$$
3. $+_{J_0^+}(A_1, A_2) = \chi_{\{0\}}$

Exemplo: soma de números fuzzy interativos baseada na distribuição de possibilidade conjunta J_0^+

$$J_0^+(x_1, x_2) = \begin{cases} A_1(x_1) \wedge A_2(x_2) & , |x_1 + x_2| \leq 0 \\ 0 & , \text{c.c} \end{cases} \quad (12)$$

1. Logo, $[J_0^+(A_1, A_2)]^\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x = -y \text{ e } x \in [A_1]^\alpha\}$ para todo $\alpha \in [0, 1]$.
2. $$+_{J_0^+}(A_1, A_2)(z) = \begin{cases} 1 & , \text{ se } z = 0 \\ 0 & , \text{c.c} \end{cases}$$
3. $+_{J_0^+}(A_1, A_2) = \chi_{\{0\}}$
4. $|| +_{J_0^+} (A_1, A_2)|| = 0.$

Soma de números fuzzy interativos baseada na distribuição de possibilidade conjunta J_1^+

Sejam A_1 e A_2 os números fuzzy triagulares $A_1 = A_2 = (-1; 0; 1)$. A distribuição de possibilidade conjunta J_1^+ entre A_1 e A_2 é construída da seguinte forma:

Soma de números fuzzy interativos baseada na distribuição de possibilidade conjunta J_1^+

Sejam A_1 e A_2 os números fuzzy triagulares $A_1 = A_2 = (-1; 0; 1)$. A distribuição de possibilidade conjunta J_1^+ entre A_1 e A_2 é construída da seguinte forma:

$$f_{\vee}^{1}(x_1) = \bigvee_{w \in [A_2]^{A_1(x_1)}} |w + x_1| = |x_1 + x_1| = 2|x_1| \ \ \forall x_1 \in [A_1]^0. \qquad (13)$$

Soma de números fuzzy interativos baseada na distribuição de possibilidade conjunta J_1^+

Sejam A_1 e A_2 os números fuzzy triagulares $A_1 = A_2 = (-1; 0; 1)$. A distribuição de possibilidade conjunta J_1^+ entre A_1 e A_2 é construída da seguinte forma:

$$f_{\vee}^1(x_1) = \bigvee_{w \in [A_2]^{A_1(x_1)}} |w + x_1| = |x_1 + x_1| = 2|x_1| \ \ \forall x_1 \in [A_1]^0. \tag{13}$$

$$f_{\vee}^2(x_2) = \bigvee_{w \in [A_1]^{A_2(x_2)}} |w + x_2| = |x_2 + x_2| = 2|x_2| \ \ \forall x_2 \in [A_2]^0. \tag{14}$$

Soma de números fuzzy interativos baseada na distribuição de possibilidade conjunta J_1^+

Sejam A_1 e A_2 os números fuzzy triagulares $A_1 = A_2 = (-1; 0; 1)$. A distribuição de possibilidade conjunta J_1^+ entre A_1 e A_2 é construída da seguinte forma:

$$f_\vee^1(x_1) = \bigvee_{w \in [A_2]^{A_1(x_1)}} |w + x_1| = |x_1 + x_1| = 2|x_1| \ \ \forall x_1 \in [A_1]^0. \tag{13}$$

$$f_\vee^2(x_2) = \bigvee_{w \in [A_1]^{A_2(x_2)}} |w + x_2| = |x_2 + x_2| = 2|x_2| \ \ \forall x_2 \in [A_2]^0. \tag{14}$$

$$\upsilon_0(x_1, x_2) = \bigvee_{i \in \{1,2\}} f_\vee^i(x_i) = \max\{2|x_1|, 2|x_2|\}. \tag{15}$$

Soma de números fuzzy interativos baseada na distribuição de possibilidade conjunta J_1^+

Soma de números fuzzy interativos baseada na distribuição de possibilidade conjunta J_1^+

$$J_1^+(x_1, x_2) = \begin{cases} A_1(x_1) \wedge A_2(x_2) & , |x_1 + x_2| \leq \max\{2|x_1|, 2|x_2|\} \\ 0 & , \text{c.c} \end{cases} \tag{16}$$

Soma de números fuzzy interativos baseada na distribuição de possibilidade conjunta J_1^+

$$J_1^+(x_1, x_2) = \begin{cases} A_1(x_1) \wedge A_2(x_2) & , |x_1 + x_2| \leq \max\{2|x_1|, 2|x_2|\} \\ 0 & , \text{c.c} \end{cases} \tag{16}$$

1. A inequação $|x_1 + x_2| \leq \max\{2|x_1|, 2|x_2|\}$ é sempre satisfeita.

Soma de números fuzzy interativos baseada na distribuição de possibilidade conjunta J_1^+

$$J_1^+(x_1,x_2) = \begin{cases} A_1(x_1) \wedge A_2(x_2) & , |x_1+x_2| \leq \max\{2|x_1|, 2|x_2|\} \\ 0 & , \text{c.c} \end{cases} \quad (16)$$

1. A inequação $|x_1+x_2| \leq \max\{2|x_1|, 2|x_2|\}$ é sempre satisfeita.
2. Logo, $[J_1^+(A_1,A_2)]^\alpha = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x \in [A_1]^\alpha \text{ e } y \in [A_2]^\alpha\}$ para todo $\alpha \in [0,1]$.

Soma de números fuzzy interativos baseada na distribuição de possibilidade conjunta J_1^+

$$J_1^+(x_1, x_2) = \begin{cases} A_1(x_1) \wedge A_2(x_2) & , |x_1 + x_2| \leq \max\{2|x_1|, 2|x_2|\} \\ 0 & , \text{c.c} \end{cases} \quad (16)$$

1. A inequação $|x_1 + x_2| \leq \max\{2|x_1|, 2|x_2|\}$ é sempre satisfeita.
2. Logo, $[J_1^+(A_1, A_2)]^\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \in [A_1]^\alpha \text{ e } y \in [A_2]^\alpha\}$ para todo $\alpha \in [0, 1]$.
3. $J_1^+(x_1, x_2) = A_1(x_1) \wedge A_2(x_2)\ \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

Soma de números fuzzy interativos baseada na distribuição de possibilidade conjunta J_1^+

$$J_1^+(x_1, x_2) = \begin{cases} A_1(x_1) \wedge A_2(x_2) & , |x_1 + x_2| \leq \max\{2|x_1|, 2|x_2|\} \\ 0 & , \text{c.c} \end{cases} \quad (16)$$

1. A inequação $|x_1 + x_2| \leq \max\{2|x_1|, 2|x_2|\}$ é sempre satisfeita.
2. Logo, $[J_1^+(A_1, A_2)]^\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \in [A_1]^\alpha$ e $y \in [A_2]^\alpha\}$ para todo $\alpha \in [0, 1]$.
3. $J_1^+(x_1, x_2) = A_1(x_1) \wedge A_2(x_2)\ \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.
4. $+_{J_1^+}(A_1, A_2) = (-2; 0; 2)$.

Soma de números fuzzy interativos baseada na distribuição de possibilidade conjunta J_1^+

$$J_1^+(x_1, x_2) = \begin{cases} A_1(x_1) \wedge A_2(x_2) & , |x_1 + x_2| \leq \max\{2|x_1|, 2|x_2|\} \\ 0 & , \text{c.c} \end{cases} \quad (16)$$

1. A inequação $|x_1 + x_2| \leq \max\{2|x_1|, 2|x_2|\}$ é sempre satisfeita.
2. Logo, $[J_1^+(A_1, A_2)]^\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \in [A_1]^\alpha \text{ e } y \in [A_2]^\alpha\}$ para todo $\alpha \in [0, 1]$.
3. $J_1^+(x_1, x_2) = A_1(x_1) \wedge A_2(x_2)\ \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.
4. $+_{J_1^+}(A_1, A_2) = (-2; 0; 2)$.
5. $|| +_{J_1^+} (A, B)|| = 2$.

Soma de números fuzzy interativos baseada na distribuição de possibilidade conjunta J_γ^+

Sejam A_1 e A_2 os números fuzzy triagulares $A_1 = A_2 = (-1; 0; 1)$. Então:

Soma de números fuzzy interativos baseada na distribuição de possibilidade conjunta J_γ^+

Sejam A_1 e A_2 os números fuzzy triagulares $A_1 = A_2 = (-1; 0; 1)$. Então:

$$|| +_{J_\gamma^+} (A_1, A_2)|| = 2\gamma$$

Soma de números fuzzy interativos baseada na distribuição de possibilidade conjunta J_γ^+

Sejam A_1 e A_2 os números fuzzy triagulares $A_1 = A_2 = (-1; 0; 1)$. Então:

$$|| +_{J_\gamma^+} (A_1, A_2)|| = 2\gamma$$

1. Nesse exemplo, as extensões do operador soma, baseadas na família de distribuição de possibilidade conjunta J_γ^+, formam um mapeamento crescente com relação ao parâmetro γ.

Soma de números fuzzy interativos baseada na distribuição de possibilidade conjunta J_γ^+

Sejam A_1 e A_2 os números fuzzy triagulares $A_1 = A_2 = (-1; 0; 1)$. Então:

$$|| +_{J_\gamma^+} (A_1, A_2)|| = 2\gamma$$

1. Nesse exemplo, as extensões do operador soma, baseadas na família de distribuição de possibilidade conjunta J_γ^+, formam um mapeamento crescente com relação ao parâmetro γ.
2. Essas extensões dão origem a somas com a menor $(\gamma = 0)$ e maior norma $(\gamma = 1)$ possíveis.

Soma de números fuzzy interativos baseada na distribuição de possibilidade conjunta J_γ^+

Sejam A_1 e A_2 os números fuzzy triagulares $A_1 = A_2 = (-1; 0; 1)$. Então:

$$|| +_{J_\gamma^+} (A_1, A_2)|| = 2\gamma$$

1. Nesse exemplo, as extensões do operador soma, baseadas na família de distribuição de possibilidade conjunta J_γ^+, formam um mapeamento crescente com relação ao parâmetro γ.
2. Essas extensões dão origem a somas com a menor $(\gamma = 0)$ e maior norma $(\gamma = 1)$ possíveis.
3. Além disso, essas extensões permitem acessar, de maneira prática, somas extendidas com normas intermediárias.

Propriedades da arimética baseada na família de distribuição de possibilidade $J_\gamma^\bullet$

As normas das extensões sup-$J_\gamma^\bullet$ formam um mapeamento crescente com relação ao parâmetro γ

Propriedades da arimética baseada na família de distribuição de possibilidade $J^{\bullet}_{\gamma}$

As normas das extensões sup-$J^{\bullet}_{\gamma}$ formam um mapeamento crescente com relação ao parâmetro γ

Teorema: Mapeamento crescente

Sejam A_1 e A_2 dois números fuzzy e $\bullet : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma operação aritmética qualquer. Se $J^{\bullet}_{\gamma_1}$ e $J^{\bullet}_{\gamma_2}$ forem duas distribuições de possibilidade conjunta para A_1 e A_2, com $\gamma_1, \gamma_2 \in [0, 1]$, e $\gamma_1 \leq \gamma_2$, então, as extensões sup-$J^{\bullet}_{\gamma}$ do operador $\bullet$, aplicadas em (A_1, A_2), obedecem a seguinte relação:

Propriedades da arimética baseada na família de distribuição de possibilidade $J_\gamma^\bullet$

As normas das extensões sup-$J_\gamma^\bullet$ formam um mapeamento crescente com relação ao parâmetro γ

Teorema: Mapeamento crescente

Sejam A_1 e A_2 dois números fuzzy e $\bullet : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma operação aritmética qualquer. Se $J_{\gamma_1}^\bullet$ e $J_{\gamma_2}^\bullet$ forem duas distribuições de possibilidade conjunta para A_1 e A_2, com $\gamma_1, \gamma_2 \in [0,1]$, e $\gamma_1 \leq \gamma_2$, então, as extensões sup-$J_\gamma^\bullet$ do operador $\bullet$, aplicadas em (A_1,A_2), obedecem a seguinte relação:

$$|| \bullet_{J_{\gamma_1}^\bullet} (A_1, A_2)|| \leq || \bullet_{J_{\gamma_2}^\bullet} (A_1, A_2)||.$$

Propriedades da aritmética baseada na família de distribuição de possibilidade $J_\gamma^\bullet$

As extensões sup-$J_1^\bullet$ geram extensões do operador $\bullet$ com a maior norma possível.

Propriedades da aritmética baseada na família de distribuição de possibilidade $J_\gamma^\bullet$

As extensões sup-$J_1^\bullet$ geram extensões do operador $\bullet$ com a maior norma possível.

Teorema

Sejam A_1 e A_2 dois números fuzzy quaisquer. Sejam, também, $\bullet_{J_1^\bullet}(A_1, A_2)$ e $\bullet_\wedge(A_1, A_2)$ os conjuntos fuzzy resultantes da extensão sup-J_γ, com $\gamma = 1$ e de *Zadeh*, respectivamente, da operação aritmética $\bullet$ entre (A_1, A_2). Então:

Propriedades da aritmética baseada na família de distribuição de possibilidade $J_\gamma^\bullet$

As extensões sup-$J_1^\bullet$ geram extensões do operador $\bullet$ com a maior norma possível.

Teorema

Sejam A_1 e A_2 dois números fuzzy quaisquer. Sejam, também, $\bullet_{J_1^\bullet}(A_1, A_2)$ e $\bullet_\wedge(A_1, A_2)$ os conjuntos fuzzy resultantes da extensão sup-J_γ, com $\gamma = 1$ e de *Zadeh*, respectivamente, da operação aritmética $\bullet$ entre (A_1, A_2). Então:

$$\bullet_{J_1^\bullet}(A_1, A_2) = \bullet_\wedge(A_1, A_2) \rightarrow ||\bullet_{J_1^\bullet}(A_1, A_2)|| = ||\bullet_\wedge(A_1, A_2)||$$

Propriedades da aritmética baseada na família de distribuição de possibilidade $J_\gamma^\bullet$

As extensões sup-$J_1^\bullet$ geram extensões do operador $\bullet$ com a maior norma possível.

Teorema

Sejam A_1 e A_2 dois números fuzzy quaisquer. Sejam, também, $\bullet_{J_1^\bullet}(A_1, A_2)$ e $\bullet_\wedge(A_1, A_2)$ os conjuntos fuzzy resultantes da extensão sup-J_γ, com $\gamma = 1$ e de *Zadeh*, respectivamente, da operação aritmética $\bullet$ entre (A_1, A_2). Então:

$$\bullet_{J_1^\bullet}(A_1, A_2) = \bullet_\wedge(A_1, A_2) \rightarrow || \bullet_{J_1^\bullet} (A_1, A_2)|| = || \bullet_\wedge (A_1, A_2)||$$

O teorema acima é resultado direto da seguinte propriedade:

$$J_1^\bullet(A_1, A_2)(x_1, x_2) = A_1(x_1) \wedge A_2(x_2).$$

Propriedades da aritmética baseada na família de distribuição de possibilidade $J_\gamma^\bullet$

Corolário

Sejam A_1 e A_2 dois números fuzzy quaisquer. Então:

$$\bullet_{J_\gamma^\bullet}(A_1, A_2) \subseteq \bullet_\wedge(A_1, A_2).$$

Em particular,

$$|| \bullet_{J_\gamma^\bullet} (A_1, A_2)|| \leq || \bullet_\wedge (A_1, A_2)||,$$

para todo $\gamma \in [0, 1]$.

Propriedades da aritmética baseada na família de distribuição de possibilidade $J_\gamma^\bullet$

Teorema

Sejam A_1 e A_2 dois números fuzzy tais que $A_1(x) = A_2(qx + r), \forall x, y \in \mathbb{R}$, $q, r \in \mathbb{R}$ com $q < 0$. Sejam também $+_{J_0^+}(A_1, A_2)$ e $+_{J_{(q,r)}}(A_1, A_2)$ os conjuntos fuzzy resultantes das extensões sup-J_γ^+, com $\gamma = 0$, e a extensão obtida quando A_1 e A_2 são completamente correlacionados, respectivamente, do operador soma em (A_1, A_2). Então, as normas das somas extendidas é a mesma:

$$|| +_{J_0^+} (A_1, A_2)|| = || +_{J_{(q,r)}} (A_1, A_2)||$$

Propriedades da aritmética baseada na família de distribuição de possibilidade $J_\gamma^\bullet$

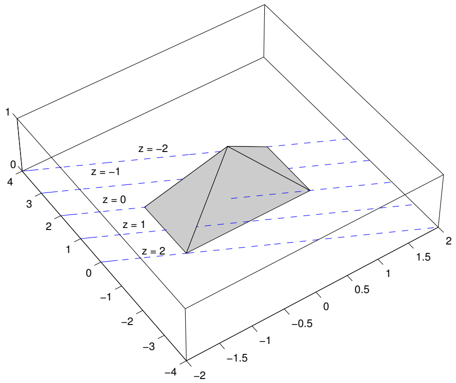
Teorema

Sejam A_1 e A_2 dois números fuzzy tais que $A_1(x) = A_2(qx + r), \forall x, y \in \mathbb{R}$, $q, r \in \mathbb{R}$ com $q < 0$. Sejam também $+_{J_0^+}(A_1, A_2)$ e $+_{J_{(q,r)}}(A_1, A_2)$ os conjuntos fuzzy resultantes das extensões sup-J_γ^+, com $\gamma = 0$, e a extensão obtida quando A_1 e A_2 são completamente correlacionados, respectivamente, do operador soma em (A_1, A_2). Então, as normas das somas extendidas é a mesma:

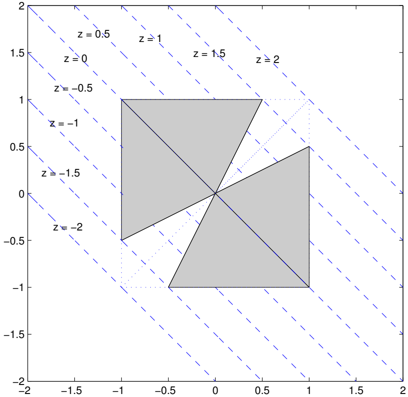
$$|| +_{J_0^+} (A_1, A_2)|| = || +_{J_{(q,r)}} (A_1, A_2)||$$

1. A igualdade do teorema acima é apenas para normas.
2. Em geral, as distribuições de possibilidade conjuntas $J_0^+(A_1, A_2)$ e $J_{(q,r)}(A_1, A_2)$ são distintas.

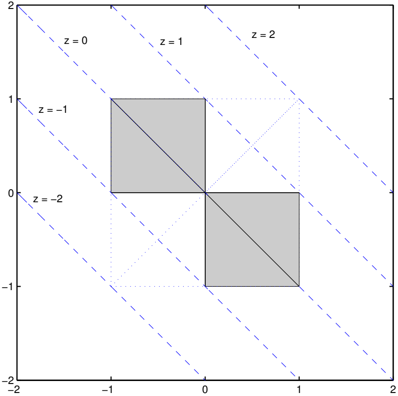
Distribuição de possibilidade conjunta entre $A_1 = A_2 = (-1; 0; 1)$ com $\gamma = 1$



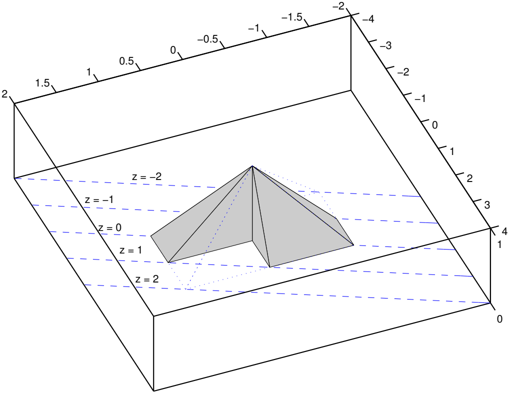
Distribuição de possibilidade conjunta entre $A_1 = A_2 = (-1; 0; 1)$ com $\gamma = 0.75$



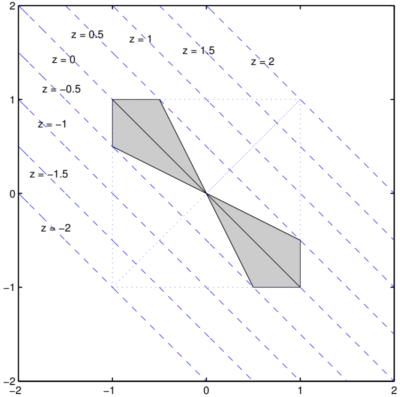
Distribuição de possibilidade conjunta entre $A_1 = A_2 = (-1; 0; 1)$ com $\gamma = 0.5$



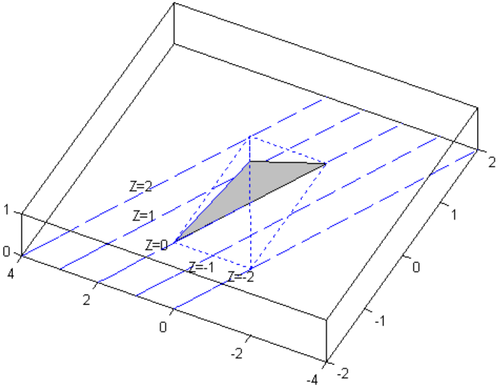
Distribuição de possibilidade conjunta entre $A_1 = A_2 = (-1; 0; 1)$ com $\gamma = 0.5$



Distribuição de possibilidade conjunta entre $A_1 = A_2 = (-1; 0; 1)$ com $\gamma = 0.25$



Distribuição de possibilidade conjunta entre $A_1 = A_2 = (-1; 0; 1)$ com $\gamma = 0$



Aplicações em biomatemática: Modelo de decaimento exponencial

Aplicações em biomatemática: Modelo de decaimento exponencial

PVI - Decaimento exponencial

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = -px(t) \\ \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{17}$$

Aplicações em biomatemática: Modelo de decaimento exponencial

PVI - Decaimento exponencial

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = -px(t) \\ \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{17}$$

Solução analítica

$$x(t) = Ce^{-pt} \tag{18}$$

Aplicações em biomatemática: Modelo de decaimento exponencial

PVI - Decaimento exponencial

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = -px(t) \\ \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{17}$$

Solução analítica

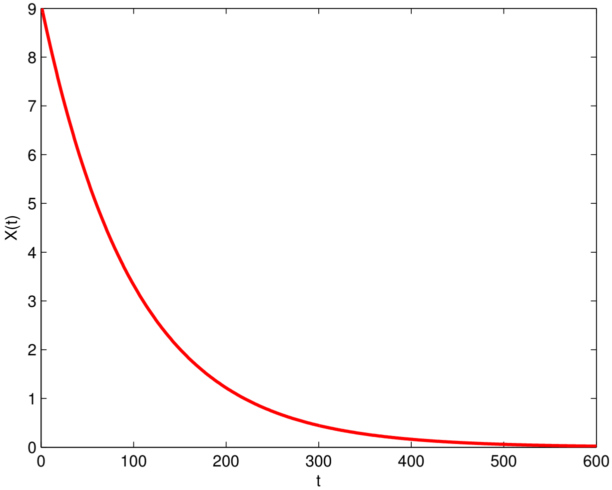
$$x(t) = Ce^{-pt} \tag{18}$$

Solução numérica

Solução numérica via método de *Euler*:

$$x_{k+1} = x_k + h(-px_k) \tag{19}$$

Aplicações em biomatemática: Modelo de decaimento exponencial



Aplicações em biomatemática: Modelo de decaimento exponencial fuzzy

PVI fuzzy - Decaimento exponencial

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -px \\ \\ x(0) = (a; b; c) \end{cases} \tag{20}$$

Aplicações em biomatemática: Modelo de decaimento exponencial fuzzy

PVI fuzzy - Decaimento exponencial

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -px \\ \\ x(0) = (a; b; c) \end{cases} \tag{20}$$

Utilizando aritmética fuzzy, podemos obter soluções numéricas para PVI utilizando o método de Euler.

Aplicações em biomatemática: Modelo de decaimento exponencial fuzzy

PVI fuzzy - Decaimento exponencial

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -px \\ \\ x(0) = (a; b; c) \end{cases} \tag{20}$$

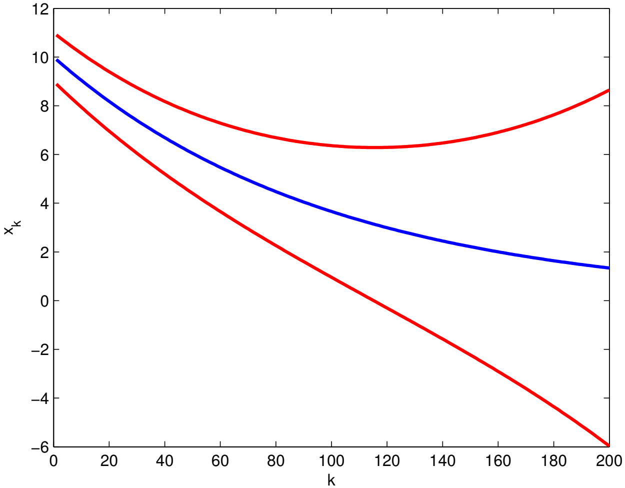
Utilizando aritmética fuzzy, podemos obter soluções numéricas para PVI utilizando o método de Euler.

Solução numérica

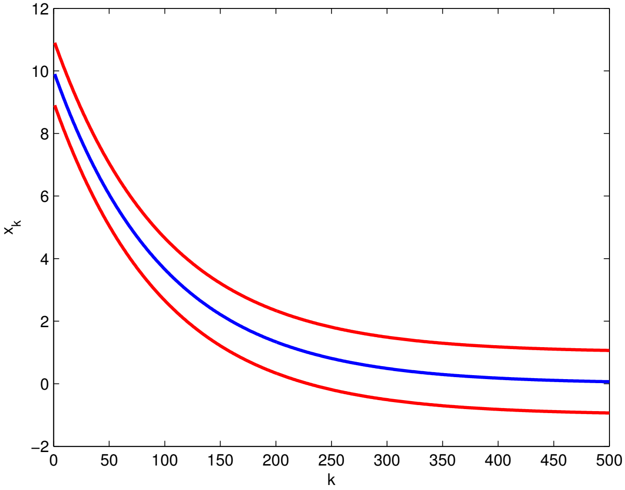
$$x_{k+1} = x_k +_J (-hpx_k) \tag{21}$$

Dependendo da distribuição de possibilidade conjunta J entre x_k e $-hpx_k$, a dinâmica do PVI é alterada.

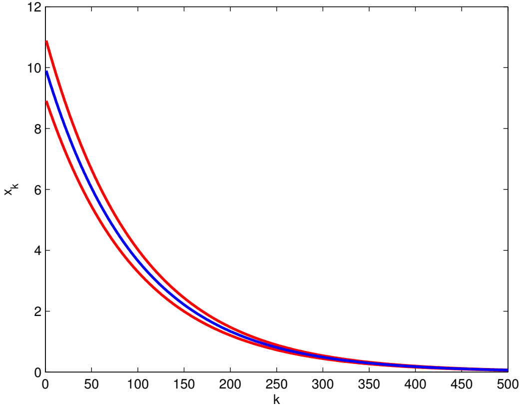
Dinâmica do suporte de (x_k) via princípio de extensão de Zadeh



Dinâmica do suporte de (x_k) via PEBTN com a t-norma drástica



Dinâmica do suporte de (x_k) via soma completamente correlacionada



Aplicações em biomatemática: modelo de transmissão de doenças SI

Consideraremos as seguintes hipóteses:

1. Curto período de tempo: desconsiderar fenômenos como nascimento e morte.
2. Uma vez infectado o indivíduo permanecerá infectuoso.
3. O percentual de indivíduos suscetíveis decresce proporcionalmente à taxa de encontros encontros entre suscetíveis e infectados.
4. O percentual de indivíduos infectados cresce proporcionalmente à taxa de encontros entre suscetíveis e infectados.
5. Taxa de encontros é representada pelo produto SI.

Aplicações em biomatemática: modelo de transmissão de doenças SI

PVI - Modelo de trasmissão de doenças SI

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = -\delta S(t)I(t) \quad , S(0) = S_0 \\ \\ \frac{dI(t)}{dt} = \delta S(t)I(t) \quad , I(0) = I_0 \end{cases} \tag{22}$$

Onde $\delta \in \mathbb{R}_+$ é um parâmetro do sistema que pode ser interpretado como a taxa de transmissão da doença.

O modelo impõe, naturalmente, a seguinte restrição:

$$S(t) + I(t) = 1, \ \forall t > 0$$

Aplicações em biomatemática: modelo de transmissão de doenças SI

Podemos representar o sistema (22) pelo seguinte PVI:

PVI - Modelo de trasmissão de doenças SI

$$\begin{cases} \frac{dI(t)}{dt} = \delta(1 - I(t))I(t) \\ \\ I(0) = I_0. \end{cases} \tag{23}$$

Aplicações em biomatemática: modelo de transmissão de doenças SI

Podemos representar o sistema (22) pelo seguinte PVI:

PVI - Modelo de trasmissão de doenças SI

$$\begin{cases} \frac{dI(t)}{dt} = \delta(1 - I(t))I(t) \\ \\ I(0) = I_0. \end{cases} \tag{23}$$

Solução analítica

$$I(t) = \frac{I_0 e^{\delta t}}{S_0 + I_0 e^{\delta t}}. \tag{24}$$

Aplicações em biomatemática: modelo de transmissão de doenças SI

Podemos representar o sistema (22) pelo seguinte PVI:

PVI - Modelo de trasmissão de doenças SI

$$\begin{cases} \frac{dI(t)}{dt} = \delta(1 - I(t))I(t) \\ \\ I(0) = I_0. \end{cases} \tag{23}$$

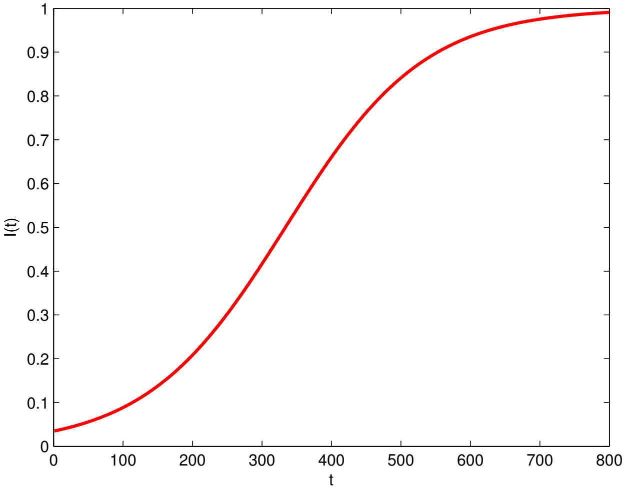
Solução analítica

$$I(t) = \frac{I_0 e^{\delta t}}{S_0 + I_0 e^{\delta t}}. \tag{24}$$

Solução numérica

$$I_{k+1} = I_k + h\delta(1 - I_k)I_k. \tag{25}$$

Aplicações em biomatemática: modelo de transmissão de doenças SI



Aplicações em biomatemática: modelo de transmissão de doenças SI fuzzy

PVI fuzzy

$$\begin{cases} \frac{dI(t)}{dt} = \delta S(t) I(t) \\ \\ I(0) = (a; b; c). \end{cases} \tag{26}$$

Aplicações em biomatemática: modelo de transmissão de doenças SI fuzzy

PVI fuzzy

$$\begin{cases} \frac{dI(t)}{dt} = \delta S(t) I(t) \\ \\ I(0) = (a; b; c). \end{cases} \tag{26}$$

Iterações método de Euler

$$I_{k+1} = I_k +_{J_1} h\delta S_k *_{J_2} I_k. \tag{27}$$

Aplicações em biomatemática: modelo de transmissão de doenças SI fuzzy

PVI fuzzy

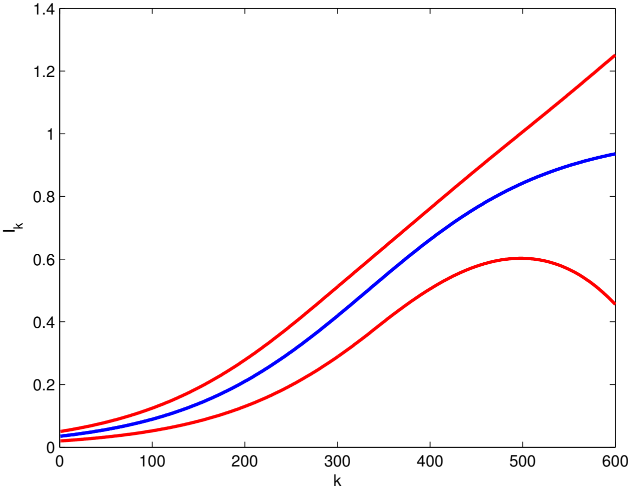
$$\begin{cases} \frac{dI(t)}{dt} = \delta S(t)I(t) \\ \\ I(0) = (a; b; c). \end{cases} \tag{26}$$

Iterações método de Euler

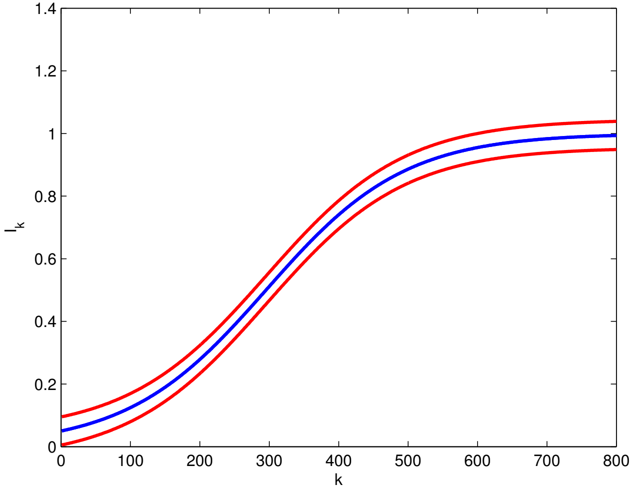
$$I_{k+1} = I_k +_{J_1} h\delta S_k *_{J_2} I_k. \tag{27}$$

1. Uma vez que temos a restrição $I_k + S_k = 1$, vamos considerar que I_k e S_k são completamente correlacionados negativamente. $J_2 = J_{(q,r)}$, com $q < 0$.
2. Dependendo da distribuição de possibilidade conjunta J_1 entre I_k e $h\delta S_k *_{J_{(q,r)}} I_k$, a dinâmica do PVI é alterada.

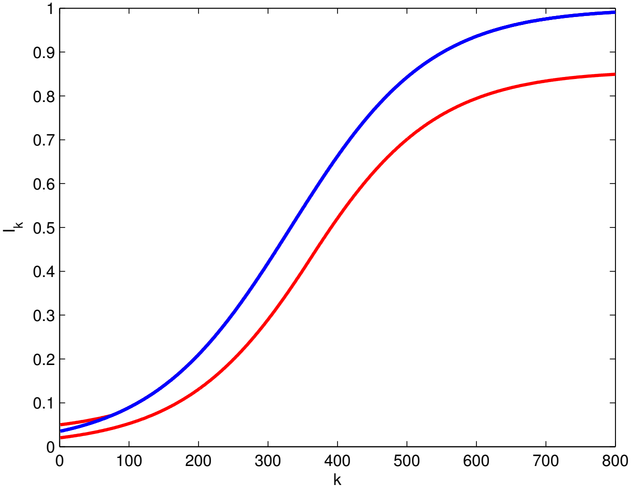
Dinâmica do suporte de (I_k) via princípio de extensão de *Zadeh*



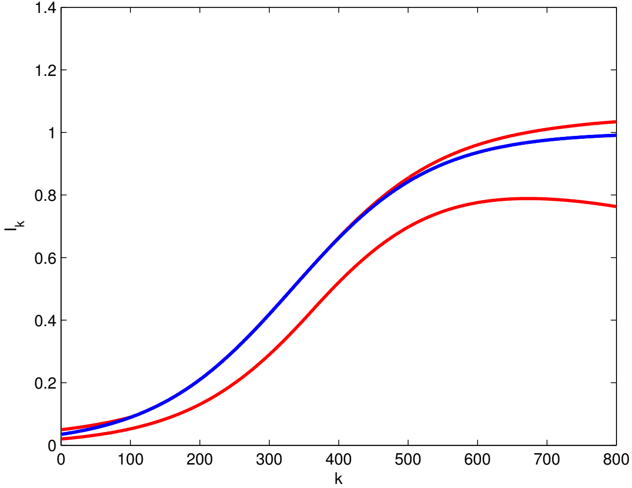
Dinâmica do suporte de (I_k) via t-norma drástica



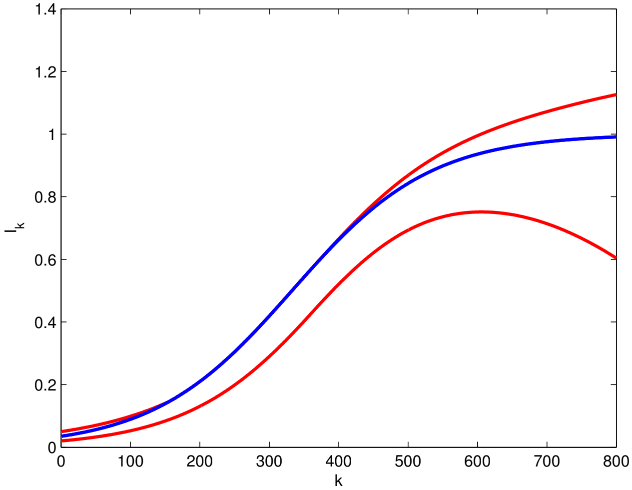
Dinâmica do suporte de (I_k) via extensão sup-J_0^+



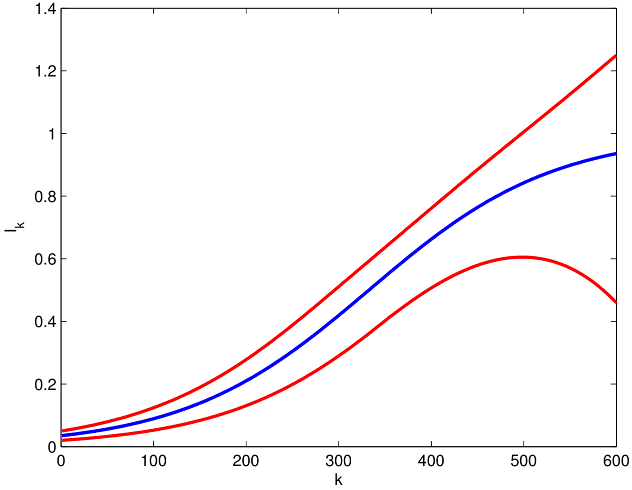
Dinâmica do suporte de (I_k) via extensão sup-$J^{+}_{0,25}$



Dinâmica do suporte de (I_k) via extensão sup-$J^+_{0,5}$



Dinâmica do suporte de (I_k) via extensão sup-J_1^+




OBRIGADO
PELA ATENÇÃO
GERADORMEMES.COM