TÓPICOS EM BIOMATEMÁTICA
MT 808

Álgebra Linear Quaterniônica e a Implementação Computacional do Modelo CV – QHNN

Fidelis Zanetti de Castro
Orientador: Marcos E. R. do Valle Mesquita
IMECC – UNICAMP

Este trabalho é baseado nas seguintes referências:

- Valle, M. E., **A Novel Continuous - Valued Quaternionic Hopfield Neural Network**, 2014 Brazilian Conference on Intelligent Systems, pp. 97–102, 2014.
- Isokawa, T., Nishimura,H., Matsui, N., **Quaternionic Neural Networks for Associative Memories**, Complex-Valued Neural Networks, A. Hirose, Ed. Wiley-IEEE Press, pp. 103–131, 2013.
- Yuan, S. -F., Wang, Q. -W., Duan, X. -F., **On solutions of the quaternion matrix $AX = B$ and their applications in color image restoration**, Applied Mathematics and Computation, vol.221, pp. 10–20, 2013.
- Rodman, L., **Topics in Quaternion Linear Algebra**, Princeton Series in Applied Mathematics, 2014.
- Lee, D. -L., **Improvements of Complex-Valued Hopfield Associative Memory by Using Generalized Projection Rules**, IEEE Transactions on Neural Networks, vol. 17, pp. 1341 – 1347, 2006.
- Jankowski, S., Lozowski, A., Zurada, J. M., **Complex-Valued Multistate Neural Associative Memory**, IEEE Transactions on Neural Networks, vol. 7, pp. 1491 – 1496, 1996.

A apresentação deste trabalho foi dividida nas seguintes etapas:

1. Quatérnios: definições básicas e propriedades.
2. Matrizes e vetores quaterniônicos.
3. A inversa generalizada quaterniônica de Moore - Penrose.
4. Relação lacônica entre os quatérnios e o software Matlab.
5. O modelo CV – QHNN.
6. Trabalhos futuros.

O que são os quatérnios?

São números hipercomplexos que podem ser escritos na forma $q = q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k}$ onde **i**, **j** e **k** são três tipos de números imaginários (denominados unidades hiperimaginárias) que satisfazem as relações $\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{ijk} = -1\cdot$ O conjunto dos quatérnios é representado por $\mathbb{H}\cdot$

- Os quatérnios foram introduzidos pelo irlandês *William Rowan Hamilton* na sua obra *Álgebra dos quatérnios* em meados do século XIX, mais precisamente em 1843·
- A álgebra dos quatérnios é a **única** álgebra associativa e divisional que pode ser definida ao lado da álgebra dos reais e dos complexos.
- Um quatérnio q pode ser representado de diferentes modos:
- Representação algébrica: $q = q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k}\cdot$
- Representação como quádrupla de números reais: $q = (q_0, q_1, q_2, q_3)\cdot$
- Representação ângulo-fase:
$q = |q|e^{\mathbf{i}\phi}e^{\mathbf{k}\psi}e^{\mathbf{j}\theta}, \quad \phi \in [-\pi, \pi), \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), \psi \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})\cdot$

O que são os quatérnios?

São números hipercomplexos que podem ser escritos na forma $q = q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k}$ onde **i**, **j** e **k** são três tipos de números imaginários (denominados unidades hiperimaginárias) que satisfazem as relações $\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{ijk} = -1\cdot$ O conjunto dos quatérnios é representado por $\mathbb{H}\cdot$

- Os quatérnios foram introduzidos pelo irlandês *William Rowan Hamilton* na sua obra *Álgebra dos quatérnios* em meados do século XIX, mais precisamente em 1843·
- A álgebra dos quatérnios é a **única** álgebra associativa e divisional que pode ser definida ao lado da álgebra dos reais e dos complexos.
- Um quatérnio q pode ser representado de diferentes modos:
- Representação algébrica: $q = q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k}\cdot$
- Representação como quádrupla de números reais: $q = (q_0, q_1, q_2, q_3)\cdot$
- Representação ângulo-fase: $q = |q|e^{\mathbf{i}\phi}e^{\mathbf{k}\psi}e^{\mathbf{j}\theta}, \quad \phi \in [-\pi, \pi), \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), \psi \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})\cdot$

O que são os quatérnios?

São números hipercomplexos que podem ser escritos na forma $q = q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k}$ onde **i**, **j** e **k** são três tipos de números imaginários (denominados unidades hiperimaginárias) que satisfazem as relações $\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{ijk} = -1\cdot$ O conjunto dos quatérnios é representado por $\mathbb{H}\cdot$

- Os quatérnios foram introduzidos pelo irlandês *William Rowan Hamilton* na sua obra *Álgebra dos quatérnios* em meados do século XIX, mais precisamente em 1843·
- A álgebra dos quatérnios é a **única** álgebra associativa e divisional que pode ser definida ao lado da álgebra dos reais e dos complexos.
- Um quatérnio q pode ser representado de diferentes modos:
- Representação algébrica: $q = q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k}\cdot$
- Representação como quádrupla de números reais: $q = (q_0, q_1, q_2, q_3)\cdot$
- Representação ângulo-fase:
  $q = |q|e^{\mathbf{i}\phi}e^{\mathbf{k}\psi}e^{\mathbf{j}\theta}, \quad \phi \in [-\pi, \pi), \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), \psi \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})\cdot$

O que são os quatérnios?

São números hipercomplexos que podem ser escritos na forma $q = q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k}$ onde **i**, **j** e **k** são três tipos de números imaginários (denominados unidades hiperimaginárias) que satisfazem as relações $\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{ijk} = -1\cdot$ O conjunto dos quatérnios é representado por $\mathbb{H}\cdot$

- Os quatérnios foram introduzidos pelo irlandês *William Rowan Hamilton* na sua obra *Álgebra dos quatérnios* em meados do século XIX, mais precisamente em 1843·
- A álgebra dos quatérnios é a **única** álgebra associativa e divisional que pode ser definida ao lado da álgebra dos reais e dos complexos.
- Um quatérnio q pode ser representado de diferentes modos:
- Representação algébrica: $q = q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k}\cdot$
- Representação como quádrupla de números reais: $q = (q_0, q_1, q_2, q_3)\cdot$
- Representação ângulo-fase: $q = |q|e^{\mathbf{i}\phi}e^{\mathbf{k}\psi}e^{\mathbf{j}\theta}, \quad \phi \in [-\pi, \pi), \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), \psi \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]\cdot$

O que são os quatérnios?

São números hipercomplexos que podem ser escritos na forma $q = q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k}$ onde **i**, **j** e **k** são três tipos de números imaginários (denominados unidades hiperimaginárias) que satisfazem as relações $\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{ijk} = -1\cdot$ O conjunto dos quatérnios é representado por $\mathbb{H}\cdot$

- Os quatérnios foram introduzidos pelo irlandês *William Rowan Hamilton* na sua obra *Álgebra dos quatérnios* em meados do século XIX, mais precisamente em 1843·
- A álgebra dos quatérnios é a **única** álgebra associativa e divisional que pode ser definida ao lado da álgebra dos reais e dos complexos.
- Um quatérnio q pode ser representado de diferentes modos:
- Representação algébrica: $q = q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k}\cdot$
- Representação como quádrupla de números reais: $q = (q_0, q_1, q_2, q_3)\cdot$
- Representação ângulo-fase:
  $q = |q|e^{\mathbf{i}\phi}e^{\mathbf{k}\psi}e^{\mathbf{j}\theta}, \quad \phi \in [-\pi, \pi), \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), \psi \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})\cdot$

O que são os quatérnios?

São números hipercomplexos que podem ser escritos na forma $q = q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k}$ onde **i**, **j** e **k** são três tipos de números imaginários (denominados unidades hiperimaginárias) que satisfazem as relações $\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{ijk} = -1\cdot$ O conjunto dos quatérnios é representado por $\mathbb{H}\cdot$

- Os quatérnios foram introduzidos pelo irlandês *William Rowan Hamilton* na sua obra *Álgebra dos quatérnios* em meados do século XIX, mais precisamente em 1843·
- A álgebra dos quatérnios é a **única** álgebra associativa e divisional que pode ser definida ao lado da álgebra dos reais e dos complexos.
- Um quatérnio q pode ser representado de diferentes modos:
- Representação algébrica: $q = q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k}\cdot$
- Representação como quádrupla de números reais: $q = (q_0, q_1, q_2, q_3)\cdot$
- Representação ângulo-fase:
  $q = |q|e^{\mathbf{i}\phi}e^{\mathbf{k}\psi}e^{\mathbf{j}\theta}, \quad \phi \in [-\pi, \pi), \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), \psi \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})\cdot$

O que são os quatérnios?

São números hipercomplexos que podem ser escritos na forma $q = q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k}$ onde **i**, **j** e **k** são três tipos de números imaginários (denominados unidades hiperimaginárias) que satisfazem as relações $\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{ijk} = -1\cdot$ O conjunto dos quatérnios é representado por $\mathbb{H}\cdot$

- Os quatérnios foram introduzidos pelo irlandês *William Rowan Hamilton* na sua obra *Álgebra dos quatérnios* em meados do século XIX, mais precisamente em 1843·
- A álgebra dos quatérnios é a **única** álgebra associativa e divisional que pode ser definida ao lado da álgebra dos reais e dos complexos.
- Um quatérnio q pode ser representado de diferentes modos:
- Representação algébrica: $q = q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k}\cdot$
- Representação como quádrupla de números reais: $q = (q_0, q_1, q_2, q_3)\cdot$
- Representação ângulo-fase: $q = |q|e^{\mathbf{i}\phi}e^{\mathbf{k}\psi}e^{\mathbf{j}\theta}, \quad \phi \in [-\pi, \pi), \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), \psi \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})\cdot$

- Representação vetorial: $q = q_0 + \vec{q}$, onde $\vec{q} = (q_1, q_2, q_3)$.
- As partes real e vetorial de um quatérnio podem ser denotadas por $Re\{q\} := q_0$ e $Ve\{q\} := \vec{q}$.
- Representação em função de números complexos: $q = (q_0 + q_1\mathbf{i}) + (q_2 + q_3\mathbf{i})\mathbf{j}$.
- Note que $\mathbf{1}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ formam uma base para o conjunto $\mathbb{H}$.
- O conjugado e o módulo de um quatérnio q são definidos respectivamente por: $q^* = \bar{q} = q_0 - \vec{q}$ e $|q| = \sqrt{\bar{q}q} = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}$.
- Um quatérnio q é dito unitário quando $|q| = 1$. Denotamos por $\mathbb{S}$ o conjunto de todos os quatérnios unitários, isto é, $\mathbb{S} = \{q \in \mathbb{H} : |q| = 1\}$.
- Perceba que o conjunto $\mathbb{S}$ pode ser interpretado como uma hiperesfera unitária em $\mathbb{R}^4$.
- O produto pq de dois quatérnios $p = p_0 + \vec{p}$ e $q = q_0 + \vec{q}$ é o quatérnio dado por:

$$pq = p_0 q_0 - \vec{p} \cdot \vec{q} + p_0 \vec{q} + q_0 \vec{p} + \vec{p} \times \vec{q}.$$

- Representação vetorial: $q = q_0 + \vec{q}$, onde $\vec{q} = (q_1, q_2, q_3)\cdot$
- As partes real e vetorial de um quatérnio podem ser denotadas por $Re\{q\} := q_0$ e $Ve\{q\} := \vec{q}\cdot$
- Representação em função de números complexos: $q = (q_0 + q_1\mathbf{i}) + (q_2 + q_3\mathbf{i})\mathbf{j}\cdot$
- Note que $\mathbf{1}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ formam uma base para o conjunto $\mathbb{H}\cdot$
- O conjugado e o módulo de um quatérnio q são definidos respectivamente por: $q^* = \bar{q} = q_0 - \vec{q}$ e $|q| = \sqrt{\bar{q}q} = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}\cdot$
- Um quatérnio q é dito unitário quando $|q| = 1$. Denotamos por $\mathbb{S}$ o conjunto de todos os quatérnios unitários, isto é, $\mathbb{S} = \{q \in \mathbb{H} : |q| = 1\}\cdot$
- Perceba que o conjunto $\mathbb{S}$ pode ser interpretado como uma hiperesfera unitária em $\mathbb{R}^4\cdot$
- O produto pq de dois quatérnios $p = p_0 + \vec{p}$ e $q = q_0 + \vec{q}$ é o quatérnio dado por:

$$pq = p_0q_0 - \vec{p}\cdot\vec{q} + p_0\vec{q} + q_0\vec{p} + \vec{p}\times\vec{q}\cdot$$

- Representação vetorial: $q = q_0 + \vec{q}$, onde $\vec{q} = (q_1, q_2, q_3)$·
- As partes real e vetorial de um quatérnio podem ser denotadas por $Re\{q\} := q_0$ e $Ve\{q\} := \vec{q}$·
- Representação em função de números complexos: $q = (q_0 + q_1\mathbf{i}) + (q_2 + q_3\mathbf{i})\mathbf{j}$·
- Note que $\mathbf{1}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ formam uma base para o conjunto $\mathbb{H}$·
- O conjugado e o módulo de um quatérnio q são definidos respectivamente por: $q^* = \bar{q} = q_0 - \vec{q}$ e $|q| = \sqrt{\bar{q}q} = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}$·
- Um quatérnio q é dito unitário quando $|q| = 1$. Denotamos por $\mathbb{S}$ o conjunto de todos os quatérnios unitários, isto é, $\mathbb{S} = \{q \in \mathbb{H} : |q| = 1\}$·
- Perceba que o conjunto $\mathbb{S}$ pode ser interpretado como uma hiperesfera unitária em $\mathbb{R}^4$·
- O produto pq de dois quatérnios $p = p_0 + \vec{p}$ e $q = q_0 + \vec{q}$ é o quatérnio dado por:

$$pq = p_0 q_0 - \vec{p} \cdot \vec{q} + p_0 \vec{q} + q_0 \vec{p} + \vec{p} \times \vec{q}$$

- Representação vetorial: $q = q_0 + \vec{q}$, onde $\vec{q} = (q_1, q_2, q_3)\cdot$
- As partes real e vetorial de um quatérnio podem ser denotadas por $Re\{q\} := q_0$ e $Ve\{q\} := \vec{q}\cdot$
- Representação em função de números complexos: $q = (q_0 + q_1\mathbf{i}) + (q_2 + q_3\mathbf{i})\mathbf{j}\cdot$
- Note que $\mathbf{1}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ formam uma base para o conjunto $\mathbb{H}\cdot$
- O conjugado e o módulo de um quatérnio q são definidos respectivamente por: $q^* = \bar{q} = q_0 - \vec{q}$ e $|q| = \sqrt{\bar{q}q} = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}\cdot$
- Um quatérnio q é dito unitário quando $|q| = 1$. Denotamos por $\mathbb{S}$ o conjunto de todos os quatérnios unitários, isto é, $\mathbb{S} = \{q \in \mathbb{H} : |q| = 1\}\cdot$
- Perceba que o conjunto $\mathbb{S}$ pode ser interpretado como uma hiperesfera unitária em $\mathbb{R}^4\cdot$
- O produto pq de dois quatérnios $p = p_0 + \vec{p}$ e $q = q_0 + \vec{q}$ é o quatérnio dado por:

$$pq = p_0q_0 - \vec{p}\cdot\vec{q} + p_0\vec{q} + q_0\vec{p} + \vec{p}\times\vec{q}\cdot$$

- Representação vetorial: $q = q_0 + \vec{q}$, onde $\vec{q} = (q_1, q_2, q_3)$·
- As partes real e vetorial de um quatérnio podem ser denotadas por $Re\{q\} := q_0$ e $Ve\{q\} := \vec{q}$·
- Representação em função de números complexos: $q = (q_0 + q_1\mathbf{i}) + (q_2 + q_3\mathbf{i})\mathbf{j}$·
- Note que $\mathbf{1}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ formam uma base para o conjunto $\mathbb{H}$·
- O conjugado e o módulo de um quatérnio q são definidos respectivamente por: $q^* = \bar{q} = q_0 - \vec{q}$ e $|q| = \sqrt{\bar{q}q} = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}$·
- Um quatérnio q é dito unitário quando $|q| = 1$. Denotamos por $\mathbb{S}$ o conjunto de todos os quatérnios unitários, isto é, $\mathbb{S} = \{q \in \mathbb{H} : |q| = 1\}$·
- Perceba que o conjunto $\mathbb{S}$ pode ser interpretado como uma hiperesfera unitária em $\mathbb{R}^4$·
- O produto pq de dois quatérnios $p = p_0 + \vec{p}$ e $q = q_0 + \vec{q}$ é o quatérnio dado por:

$$pq = p_0q_0 - \vec{p}\cdot\vec{q} + p_0\vec{q} + q_0\vec{p} + \vec{p}\times\vec{q}\cdot$$

- Representação vetorial: $q = q_0 + \vec{q}$, onde $\vec{q} = (q_1, q_2, q_3)$·
- As partes real e vetorial de um quatérnio podem ser denotadas por $Re\{q\} := q_0$ e $Ve\{q\} := \vec{q}$·
- Representação em função de números complexos: $q = (q_0 + q_1\mathbf{i}) + (q_2 + q_3\mathbf{i})\mathbf{j}$·
- Note que $\mathbf{1}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ formam uma base para o conjunto $\mathbb{H}$·
- O conjugado e o módulo de um quatérnio q são definidos respectivamente por: $q^* = \bar{q} = q_0 - \vec{q}$ e $|q| = \sqrt{\bar{q}q} = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}$·
- Um quatérnio q é dito unitário quando $|q| = 1$. Denotamos por $\mathbb{S}$ o conjunto de todos os quatérnios unitários, isto é, $\mathbb{S} = \{q \in \mathbb{H} : |q| = 1\}$·
- Perceba que o conjunto $\mathbb{S}$ pode ser interpretado como uma hiperesfera unitária em $\mathbb{R}^4$·
- O produto pq de dois quatérnios $p = p_0 + \vec{p}$ e $q = q_0 + \vec{q}$ é o quatérnio dado por:

$$pq = p_0 q_0 - \vec{p} \cdot \vec{q} + p_0 \vec{q} + q_0 \vec{p} + \vec{p} \times \vec{q}\cdot$$

- Representação vetorial: $q = q_0 + \vec{q}$, onde $\vec{q} = (q_1, q_2, q_3)$·
- As partes real e vetorial de um quatérnio podem ser denotadas por $Re\{q\} := q_0$ e $Ve\{q\} := \vec{q}$·
- Representação em função de números complexos: $q = (q_0 + q_1\mathbf{i}) + (q_2 + q_3\mathbf{i})\mathbf{j}$·
- Note que $\mathbf{1}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ formam uma base para o conjunto $\mathbb{H}$·
- O conjugado e o módulo de um quatérnio q são definidos respectivamente por: $q^* = \bar{q} = q_0 - \vec{q}$ e $|q| = \sqrt{\bar{q}q} = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}$·
- Um quatérnio q é dito unitário quando $|q| = 1$. Denotamos por $\mathbb{S}$ o conjunto de todos os quatérnios unitários, isto é, $\mathbb{S} = \{q \in \mathbb{H} : |q| = 1\}$·
- Perceba que o conjunto $\mathbb{S}$ pode ser interpretado como uma hiperesfera unitária em $\mathbb{R}^4$·
- O produto pq de dois quatérnios $p = p_0 + \vec{p}$ e $q = q_0 + \vec{q}$ é o quatérnio dado por:

$$pq = p_0 q_0 - \vec{p} \cdot \vec{q} + p_0\vec{q} + q_0\vec{p} + \vec{p} \times \vec{q}\cdot$$

- Representação vetorial: $q = q_0 + \vec{q}$, onde $\vec{q} = (q_1, q_2, q_3)\cdot$
- As partes real e vetorial de um quatérnio podem ser denotadas por $Re\{q\} := q_0$ e $Ve\{q\} := \vec{q}\cdot$
- Representação em função de números complexos: $q = (q_0 + q_1\mathbf{i}) + (q_2 + q_3\mathbf{i})\mathbf{j}\cdot$
- Note que $\mathbf{1}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ formam uma base para o conjunto $\mathbb{H}\cdot$
- O conjugado e o módulo de um quatérnio q são definidos respectivamente por: $q^* = \bar{q} = q_0 - \vec{q}$ e $|q| = \sqrt{\bar{q}q} = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}\cdot$
- Um quatérnio q é dito unitário quando $|q| = 1$. Denotamos por $\mathbb{S}$ o conjunto de todos os quatérnios unitários, isto é, $\mathbb{S} = \{q \in \mathbb{H} : |q| = 1\}\cdot$
- Perceba que o conjunto $\mathbb{S}$ pode ser interpretado como uma hiperesfera unitária em $\mathbb{R}^4\cdot$
- O produto pq de dois quatérnios $p = p_0 + \vec{p}$ e $q = q_0 + \vec{q}$ é o quatérnio dado por:

$$pq = p_0 q_0 - \vec{p} \cdot \vec{q} + p_0\vec{q} + q_0\vec{p} + \vec{p} \times \vec{q}\cdot$$

Proposição 1

Sejam $x, y \in \mathbb{H}\cdot$ *Então:*

1. $x^* x = x x^*$.
2. $|x| = |x^*|$.
3. $|x| \geq 0$; $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$; $|x + y| \leq |x| + |y|$; $|xy| = |yx| = |x||y|$.
4. $\mathbf{j} c \mathbf{j}^* = \mathbf{k} c \mathbf{k}^* = \bar{c}, \ \forall c \in \mathbb{C}$.
5. $(xy)^* = y^* x^*$.
6. $x = x^* \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$.
7. *Se* $a \in \mathbb{H}$, *então* $ax = xa \ \forall x \in \mathbb{H}$ *se, e somente se,* $a \in \mathbb{R}$.
8. *Todo* $x \in \mathbb{H} \setminus \{0\}$ *possui um inverso multiplicativo dado por* $x^{-1} = \dfrac{x^*}{|x|^2} \in \mathbb{H}$.
9. $|x^{-1}| = |x|^{-1}, \ \forall x \in \mathbb{H} \setminus \{0\}$.

Proposição 2

Sejam $x, y \in \mathbb{H}\cdot$ *Então:*

1. x *e* $x^* \in \mathbb{H}$ *são soluções da equação quadrática* $t^2 - 2Re\{x\}t + |x|^2 = 0$.
2. *Uma desigualdade do tipo Cauchy-Schwarz envolvendo quatérnios é:* $max\{|Re\{xy\}|, |Ve\{xy\}|\} \leq |x||y|$.
3. $Re\{xy\} = Re\{yx\}, \ \forall x, y \in \mathbb{H}$.
4. *Se* $Re\{x\} = 0$, *então* $x^2 = -|x^2|$.

- O conjunto dos quatérnios é um *anel com divisão* e também forma uma *álgebra 4-dimensional* sobre o corpo dos reais.

Proposição 2

Sejam $x, y \in \mathbb{H}\cdot$ *Então:*

1. x *e* $x^* \in \mathbb{H}$ *são soluções da equação quadrática* $t^2 - 2Re\{x\}t + |x|^2 = 0$.
2. *Uma desigualdade do tipo Cauchy-Schwarz envolvendo quatérnios é:* $max\{|Re\{xy\}|, |Ve\{xy\}|\} \leq |x||y|$.
3. $Re\{xy\} = Re\{yx\}, \; \forall x, y \in \mathbb{H}$.
4. *Se* $Re\{x\} = 0$, *então* $x^2 = -|x^2|$.

- O conjunto dos quatérnios é um *anel com divisão* e também forma uma *álgebra 4-dimensional* sobre o corpo dos reais.

Matrizes e vetores quaterniônicos

- Como mencionado, um quatérnio pode ser representado na forma $q = (q_0 + q_1\mathbf{i}) + (q_2 + q_3\mathbf{i})\mathbf{j}$. (demonstração rápida na lousa)
- Assim, a *s-ésima* componente de um vetor quaterniônico v tem a forma $v_s = (q_0^s + q_1^s\mathbf{i}) + (q_2^s + q_3^s\mathbf{i})\mathbf{j}$.
- Consequentemente, uma matriz $Q \in \mathbb{H}^{m\times n}$ pode ser escrita na forma $Q = Q_1 + Q_2\mathbf{j}$, onde $Q_1, Q_2 \in \mathbb{C}^{m\times n}$ (esta foi a motivação matemática para o desenvolvimento das implementações computacionais!)
- Uma matriz $Q \in \mathbb{H}^{m\times n}$ também pode ser representada na forma $f(A) = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ -\bar{A}_2 & \bar{A}_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2m\times 2n}$, a qual é denominada *representação complexa da matriz A*.
- O produto interno entre duas matrizes quaterniônicas é definido como $\langle A, B\rangle = tr(B^H A)$.
- $Q \in \mathbb{H}^{m\times n}$ é dito um *espaço de Hilbert com produto interno à direita*. Este produto interno induz a norma matricial quaterniônica de Frobenius.

Matrizes e vetores quaterniônicos

- Como mencionado, um quatérnio pode ser representado na forma $q = (q_0 + q_1\mathbf{i}) + (q_2 + q_3\mathbf{i})\mathbf{j}$. (demonstração rápida na lousa)
- Assim, a *s-ésima* componente de um vetor quaterniônico v tem a forma $v_s = (q_0^s + q_1^s\mathbf{i}) + (q_2^s + q_3^s\mathbf{i})\mathbf{j}$.
- Consequentemente, uma matriz $Q \in \mathbb{H}^{m \times n}$ pode ser escrita na forma $Q = Q_1 + Q_2\mathbf{j}$, onde $Q_1, Q_2 \in \mathbb{C}^{m \times n}$ (esta foi a motivação matemática para o desenvolvimento das implementações computacionais!)
- Uma matriz $Q \in \mathbb{H}^{m \times n}$ também pode ser representada na forma $f(A) = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ -\bar{A}_2 & \bar{A}_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2m \times 2n}$, a qual é denominada *representação complexa da matriz A*.
- O produto interno entre duas matrizes quaterniônicas é definido como $\langle A, B \rangle = tr(B^H A)$.
- $Q \in \mathbb{H}^{m \times n}$ é dito um *espaço de Hilbert com produto interno à direita*. Este produto interno induz a norma matricial quaterniônica de Frobenius.

Matrizes e vetores quaterniônicos

- Como mencionado, um quatérnio pode ser representado na forma $q = (q_0 + q_1\mathbf{i}) + (q_2 + q_3\mathbf{i})\mathbf{j}$. (demonstração rápida na lousa)
- Assim, a *s-ésima* componente de um vetor quaterniônico v tem a forma $v_s = (q_0^s + q_1^s\mathbf{i}) + (q_2^s + q_3^s\mathbf{i})\mathbf{j}$.
- Consequentemente, uma matriz $Q \in \mathbb{H}^{m\times n}$ pode ser escrita na forma $Q = Q_1 + Q_2\mathbf{j}$, onde $Q_1, Q_2 \in \mathbb{C}^{m\times n}$ (esta foi a motivação matemática para o desenvolvimento das implementações computacionais!)
- Uma matriz $Q \in \mathbb{H}^{m\times n}$ também pode ser representada na forma $f(A) = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ -\bar{A}_2 & \bar{A}_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2m\times 2n}$, a qual é denominada *representação complexa da matriz A*.
- O produto interno entre duas matrizes quaterniônicas é definido como $\langle A, B\rangle = tr(B^H A)$.
- $Q \in \mathbb{H}^{m\times n}$ é dito um *espaço de Hilbert com produto interno à direita*. Este produto interno induz a norma matricial quaterniônica de Frobenius.

Matrizes e vetores quaterniônicos

- Como mencionado, um quatérnio pode ser representado na forma $q = (q_0 + q_1\mathbf{i}) + (q_2 + q_3\mathbf{i})\mathbf{j}$. (demonstração rápida na lousa)
- Assim, a *s-ésima* componente de um vetor quaterniônico v tem a forma $v_s = (q_0^s + q_1^s\mathbf{i}) + (q_2^s + q_3^s\mathbf{i})\mathbf{j}$.
- Consequentemente, uma matriz $Q \in \mathbb{H}^{m\times n}$ pode ser escrita na forma $Q = Q_1 + Q_2\mathbf{j}$, onde $Q_1, Q_2 \in \mathbb{C}^{m\times n}$ (esta foi a motivação matemática para o desenvolvimento das implementações computacionais!)
- Uma matriz $Q \in \mathbb{H}^{m\times n}$ também pode ser representada na forma $f(A) = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ -\bar{A}_2 & \bar{A}_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2m\times 2n}$, a qual é denominada *representação complexa da matriz A*.
- O produto interno entre duas matrizes quaterniônicas é definido como $\langle A, B\rangle = tr(B^H A)$.
- $Q \in \mathbb{H}^{m\times n}$ é dito um *espaço de Hilbert com produto interno à direita*. Este produto interno induz a norma matricial quaterniônica de Frobenius.

Matrizes e vetores quaterniônicos

- Como mencionado, um quatérnio pode ser representado na forma $q = (q_0 + q_1\mathbf{i}) + (q_2 + q_3\mathbf{i})\mathbf{j}$. (demonstração rápida na lousa)
- Assim, a *s-ésima* componente de um vetor quaterniônico v tem a forma $v_s = (q_0^s + q_1^s\mathbf{i}) + (q_2^s + q_3^s\mathbf{i})\mathbf{j}$.
- Consequentemente, uma matriz $Q \in \mathbb{H}^{m\times n}$ pode ser escrita na forma $Q = Q_1 + Q_2\mathbf{j}$, onde $Q_1, Q_2 \in \mathbb{C}^{m\times n}$ (esta foi a motivação matemática para o desenvolvimento das implementações computacionais!)
- Uma matriz $Q \in \mathbb{H}^{m\times n}$ também pode ser representada na forma $f(A) = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ -\bar{A}_2 & \bar{A}_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2m\times 2n}$, a qual é denominada *representação complexa da matriz A*.
- O produto interno entre duas matrizes quaterniônicas é definido como $\langle A, B\rangle = tr(B^H A)$.
- $Q \in \mathbb{H}^{m\times n}$ é dito um *espaço de Hilbert com produto interno à direita*. Este produto interno induz a norma matricial quaterniônica de Frobenius.

Matrizes e vetores quaterniônicos

- Como mencionado, um quatérnio pode ser representado na forma $q = (q_0 + q_1\mathbf{i}) + (q_2 + q_3\mathbf{i})\mathbf{j}$. (demonstração rápida na lousa)
- Assim, a *s-ésima* componente de um vetor quaterniônico v tem a forma $v_s = (q_0^s + q_1^s\mathbf{i}) + (q_2^s + q_3^s\mathbf{i})\mathbf{j}$.
- Consequentemente, uma matriz $Q \in \mathbb{H}^{m\times n}$ pode ser escrita na forma $Q = Q_1 + Q_2\mathbf{j}$, onde $Q_1, Q_2 \in \mathbb{C}^{m\times n}$ (esta foi a motivação matemática para o desenvolvimento das implementações computacionais!)
- Uma matriz $Q \in \mathbb{H}^{m\times n}$ também pode ser representada na forma $f(A) = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ -\bar{A}_2 & \bar{A}_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2m\times 2n}$, a qual é denominada *representação complexa da matriz A*.
- O produto interno entre duas matrizes quaterniônicas é definido como $\langle A, B\rangle = tr(B^H A)$.
- $Q \in \mathbb{H}^{m\times n}$ é dito um *espaço de Hilbert com produto interno à direita*. Este produto interno induz a norma matricial quaterniônica de Frobenius.

A inversa generalizada quaterniônica de Moore - Penrose

Considere o seguinte problema de minimização geral

Problema

Dadas as matrizes $A \in \mathbb{H}^{s\times m}$ *e* $B \in \mathbb{H}^{s\times n}$*, seja*
$Q_L = \left\{ X | X \in \mathbb{H}^{m\times n}, \quad ||AX - B|| = \min_{X_0 \in \mathbb{H}^{m\times n}} ||AX_0 - B|| \right\}$. *Encontrar* $X_Q \in Q_L$ *tal que* $||X_Q|| = \min_{X \in Q_L} ||X||$.

- Note que no caso em que A é quadrada de posto completo e B é a identidade quaterniônica com as mesmas dimensões que A, a matriz X solução do problema proposto é a inversa da matriz A, que representamos por A^{-1}.
- Por outro lado, sendo $B = I_s \in \mathbb{H}^{s\times s}$, a matriz X_Q solução do problema proposto é a inversa generalizada quaterniônica de Moore - Penrose da matriz A, conhecida como pseudo-inversa de A, e representada por $A^{\dagger}$.

A inversa generalizada quaterniônica de Moore - Penrose

Considere o seguinte problema de minimização geral

Problema

Dadas as matrizes $A \in \mathbb{H}^{s\times m}$ *e* $B \in \mathbb{H}^{s\times n}$*, seja*

$$Q_L = \left\{ X | X \in \mathbb{H}^{m\times n}, \quad ||AX - B|| = \min_{X_0 \in \mathbb{H}^{m\times n}} ||AX_0 - B|| \right\}.$$

Encontrar $X_Q \in Q_L$ *tal que* $||X_Q|| = \min_{X \in Q_L} ||X||$.

- Note que no caso em que A é quadrada de posto completo e B é a identidade quaterniônica com as mesmas dimensões que A, a matriz X solução do problema proposto é a inversa da matriz A, que representamos por A^{-1}.
- Por outro lado, sendo $B = I_s \in \mathbb{H}^{s\times s}$, a matriz X_Q solução do problema proposto é a inversa generalizada quaterniônica de Moore - Penrose da matriz A, conhecida como pseudo-inversa de A, e representada por $A^{\dagger}$.

A inversa generalizada quaterniônica de Moore - Penrose

Considere o seguinte problema de minimização geral

Problema

Dadas as matrizes $A \in \mathbb{H}^{s\times m}$ *e* $B \in \mathbb{H}^{s\times n}$, *seja*
$Q_L = \left\{ X | X \in \mathbb{H}^{m\times n}, \quad ||AX - B|| = \min\limits_{X_0 \in \mathbb{H}^{m\times n}} ||AX_0 - B|| \right\}$. *Encontrar* $X_Q \in Q_L$
tal que $||X_Q|| = \min\limits_{X \in Q_L} ||X||$.

- Note que no caso em que A é quadrada de posto completo e B é a identidade quaterniônica com as mesmas dimensões que A, a matriz X solução do problema proposto é a inversa da matriz A, que representamos por A^{-1}.

- Por outro lado, sendo $B = I_s \in \mathbb{H}^{s\times s}$, a matriz X_Q solução do problema proposto é a inversa generalizada quaterniônica de Moore - Penrose da matriz A, conhecida como pseudo-inversa de A, e representada por $A^\dagger$.

A inversa generalizada quaterniônica de Moore - Penrose

Considere o seguinte problema de minimização geral

Problema

Dadas as matrizes $A \in \mathbb{H}^{s\times m}$ *e* $B \in \mathbb{H}^{s\times n}$, *seja*

$$Q_L = \left\{ X | X \in \mathbb{H}^{m\times n}, \quad ||AX - B|| = \min_{X_0 \in \mathbb{H}^{m\times n}} ||AX_0 - B|| \right\}.$$ *Encontrar* $X_Q \in Q_L$ *tal que* $||X_Q|| = \min_{X \in Q_L} ||X||$.

- Note que no caso em que A é quadrada de posto completo e B é a identidade quaterniônica com as mesmas dimensões que A, a matriz X solução do problema proposto é a inversa da matriz A, que representamos por A^{-1}.
- Por outro lado, sendo $B = I_s \in \mathbb{H}^{s\times s}$, a matriz X_Q solução do problema proposto é a inversa generalizada quaterniônica de Moore - Penrose da matriz A, conhecida como pseudo-inversa de A, e representada por $A^{\dagger}$.

Teorema

O conjunto de soluções Q_L para o problema geral tem como elemento genérico a matriz

$$X = \left(P_1^\dagger - H^T P_2 P_1^\dagger + H^T \mathbf{j}\right) E + \left(I_{4m} - P_1^\dagger P_1 - RR^\dagger\right) Y,$$

onde Y é uma matriz arbitrária de dimensões apropriadas.

- Escrevendo $A = A_1 + A_2\mathbf{j}$ e $B = B_1 + B_2\mathbf{j}$, as matrizes que aparecem no teorema acima são:
$$P = \begin{pmatrix} A_1 & \mathbf{i}A_1 & -A_2 & \mathbf{i}A_2 \\ A_2 & -\mathbf{i}A_2 & A_1 & \mathbf{i}A_1 \end{pmatrix},\ P_1 = Re(P),\ P_2 = Im(P),$$
$$E = \begin{pmatrix} Re(B_1) \\ Re(B_2) \\ Im(B_1) \\ Im(B_2) \end{pmatrix}.$$

- $R = (I_{4m} - P_1^{\dagger} P_1) P_2^T$.
- $Z = \left(I_{2s} + (I_{2s} - R^{\dagger} R) P_2 P_1^{\dagger} {P_1^{\dagger}}^T (I_{2s} - R^{\dagger} R) \right)^{-1}$.
- $H = R^{\dagger} + (I_{2s} - R^{\dagger} R) Z P_2 P_1^{\dagger} {P_1^{\dagger}}^T (I_{4m} - P_2^T R^{\dagger})$.
- Tomando Y como a matriz nula de dimensões apropriadas, obtemos a solução de norma de Frobenius mínima

$$X_Q = \left(P_1^{\dagger} - H^T P_2 P_1^{\dagger} + H^T \mathbf{j} \right) E$$

- No caso em que $B = I_s \in \mathbb{H}^{s \times s}$ temos $X_Q = A^{\dagger}$.

- $R = (I_{4m} - P_1^\dagger P_1)P_2^T$.
- $Z = \left(I_{2s} + (I_{2s} - R^\dagger R)P_2 P_1^\dagger {P_1^\dagger}^T (I_{2s} - R^\dagger R)\right)^{-1}$.
- $H = R^\dagger + (I_{2s} - R^\dagger R)ZP_2 P_1^\dagger {P_1^\dagger}^T (I_{4m} - P_2^T R^\dagger)$.
- Tomando Y como a matriz nula de dimensões apropriadas, obtemos a solução de norma de Frobenius mínima

$$X_Q = \left(P_1^\dagger - H^T P_2 P_1^\dagger + H^T \mathbf{j}\right) E$$

- No caso em que $B = I_s \in \mathbb{H}^{s\times s}$ temos $X_Q = A^\dagger$.

- $R = (I_{4m} - P_1^{\dagger} P_1) P_2^T$.
- $Z = \left(I_{2s} + (I_{2s} - R^{\dagger} R) P_2 P_1^{\dagger} {P_1^{\dagger}}^T (I_{2s} - R^{\dagger} R) \right)^{-1}$.
- $H = R^{\dagger} + (I_{2s} - R^{\dagger} R) Z P_2 P_1^{\dagger} {P_1^{\dagger}}^T (I_{4m} - P_2^T R^{\dagger})$.
- Tomando Y como a matriz nula de dimensões apropriadas, obtemos a solução de norma de Frobenius mínima

$$X_Q = \left(P_1^{\dagger} - H^T P_2 P_1^{\dagger} + H^T \mathbf{j} \right) E$$

- No caso em que $B = I_s \in \mathbb{H}^{s \times s}$ temos $X_Q = A^{\dagger}$.

- $R = (I_{4m} - P_1^{\dagger} P_1) P_2^T \cdot$
- $Z = \left(I_{2s} + (I_{2s} - R^{\dagger} R) P_2 P_1^{\dagger} {P_1^{\dagger}}^T (I_{2s} - R^{\dagger} R) \right)^{-1} \cdot$
- $H = R^{\dagger} + (I_{2s} - R^{\dagger} R) Z P_2 P_1^{\dagger} {P_1^{\dagger}}^T (I_{4m} - P_2^T R^{\dagger}) \cdot$
- Tomando Y como a matriz nula de dimensões apropriadas, obtemos a solução de norma de Frobenius mínima

$$X_Q = \left(P_1^{\dagger} - H^T P_2 P_1^{\dagger} + H^T \mathbf{j} \right) E$$

- No caso em que $B = I_s \in \mathbb{H}^{s \times s}$ temos $X_Q = A^{\dagger} \cdot$

- $R = (I_{4m} - P_1^{\dagger} P_1) P_2^T \cdot$
- $Z = \left(I_{2s} + (I_{2s} - R^{\dagger} R) P_2 P_1^{\dagger} {P_1^{\dagger}}^T (I_{2s} - R^{\dagger} R) \right)^{-1} \cdot$
- $H = R^{\dagger} + (I_{2s} - R^{\dagger} R) Z P_2 P_1^{\dagger} {P_1^{\dagger}}^T (I_{4m} - P_2^T R^{\dagger}) \cdot$
- Tomando Y como a matriz nula de dimensões apropriadas, obtemos a solução de norma de Frobenius mínima

$$X_Q = \left(P_1^{\dagger} - H^T P_2 P_1^{\dagger} + H^T \mathbf{j} \right) E$$

- No caso em que $B = I_s \in \mathbb{H}^{s \times s}$ temos $X_Q = A^{\dagger} \cdot$

Relação lacônica entre os quatérnios e o software Matlab

- Não há uma *toolbox* oficial no Matlab para se trabalhar de modo eficiente com Álgebra Quaterniônica!
- Essencialmente, o Matlab trabalha com quatérnios enxergando-os como quádruplas de números reais ou como duplas de números complexos.
- Porém, o Matlab possui algumas operações entre quatérnios pré-definidas: produto de quatérnios, soma de quatérnios, módulo, rotação e normalização de um quatérnio.
- Desse modo, foi necessário construir uma "toolbox parcial" composta de 8 programas para se iniciar os trabalhos com Álgebra matricial e vetorial envolvendo quatérnios.

Relação lacônica entre os quatérnios e o software Matlab

- Não há uma *toolbox* oficial no Matlab para se trabalhar de modo eficiente com Álgebra Quaterniônica!
- Essencialmente, o Matlab trabalha com quatérnios enxergando-os como quádruplas de números reais ou como duplas de números complexos.
- Porém, o Matlab possui algumas operações entre quatérnios pré-definidas: produto de quatérnios, soma de quatérnios, módulo, rotação e normalização de um quatérnio.
- Desse modo, foi necessário construir uma "toolbox parcial" composta de 8 programas para se iniciar os trabalhos com Álgebra matricial e vetorial envolvendo quatérnios.

Relação lacônica entre os quatérnios e o software Matlab

- Não há uma *toolbox* oficial no Matlab para se trabalhar de modo eficiente com Álgebra Quaterniônica!
- Essencialmente, o Matlab trabalha com quatérnios enxergando-os como quádruplas de números reais ou como duplas de números complexos.
- Porém, o Matlab possui algumas operações entre quatérnios pré-definidas: produto de quatérnios, soma de quatérnios, módulo, rotação e normalização de um quatérnio.
- Desse modo, foi necessário construir uma "toolbox parcial" composta de 8 programas para se iniciar os trabalhos com Álgebra matricial e vetorial envolvendo quatérnios.

Relação lacônica entre os quatérnios e o software Matlab

- Não há uma *toolbox* oficial no Matlab para se trabalhar de modo eficiente com Álgebra Quaterniônica!
- Essencialmente, o Matlab trabalha com quatérnios enxergando-os como quádruplas de números reais ou como duplas de números complexos.
- Porém, o Matlab possui algumas operações entre quatérnios pré-definidas: produto de quatérnios, soma de quatérnios, módulo, rotação e normalização de um quatérnio.
- Desse modo, foi necessário construir uma "toolbox parcial" composta de 8 programas para se iniciar os trabalhos com Álgebra matricial e vetorial envolvendo quatérnios.

O modelo CV-QHNN

- As redes neurais de Hopfield quaterniônicas (QHNNs, do inglês *quaternionic Hopfield neural networks*) são generalizações da rede clássica de Hopfield, mas seus vetores apresentam entradas do conjunto dos quatérnios.
- De um modo geral, as QHNNs definem, a partir de um vetor inicial $\mathbf{x}(0)$, uma sequência $\mathbf{x}(0), \mathbf{x}(1), \ldots$ de vetores cujas componentes são dadas pela equação de evolução

$$x_i(t+1) = \begin{cases} x_i(t), & v_i(t) = 0, \\ f(v_i(t)), & v_i(t) \neq 0. \end{cases} \qquad \forall i = 1, \ldots, n.$$

- Aqui, $v_i(t)$ denota o potencial de ativação do i-ésimo neurônio da rede na iteração t. Os pesos sinápticos podem ser obtidos usando a regra de correlação (conhecida como aprendizado de Hebb) ou a regra de projeção. Além disso, f é a função de ativação quaterniônica, que é o elemento chave que difere os vários modelos de QHNNs.

O modelo CV-QHNN

- As redes neurais de Hopfield quaterniônicas (QHNNs, do inglês *quaternionic Hopfield neural networks*) são generalizações da rede clássica de Hopfield, mas seus vetores apresentam entradas do conjunto dos quatérnios.
- De um modo geral, as QHNNs definem, a partir de um vetor inicial $\mathbf{x}(0)$, uma sequência $\mathbf{x}(0), \mathbf{x}(1), \ldots$ de vetores cujas componentes são dadas pela equação de evolução

$$x_i(t+1) = \begin{cases} x_i(t), & v_i(t) = 0, \\ f(v_i(t)), & v_i(t) \neq 0. \end{cases} \qquad \forall i = 1, \ldots, n.$$

- Aqui, $v_i(t)$ denota o potencial de ativação do i-ésimo neurônio da rede na iteração t. Os pesos sinápticos podem ser obtidos usando a regra de correlação (conhecida como aprendizado de Hebb) ou a regra de projeção. Além disso, f é a função de ativação quaterniônica, que é o elemento chave que difere os vários modelos de QHNNs.

O modelo CV-QHNN

- As redes neurais de Hopfield quaterniônicas (QHNNs, do inglês *quaternionic Hopfield neural networks*) são generalizações da rede clássica de Hopfield, mas seus vetores apresentam entradas do conjunto dos quatérnios.

- De um modo geral, as QHNNs definem, a partir de um vetor inicial $\mathbf{x}(0)$, uma sequência $\mathbf{x}(0), \mathbf{x}(1), \ldots$ de vetores cujas componentes são dadas pela equação de evolução

$$x_i(t+1) = \begin{cases} x_i(t), & v_i(t) = 0, \\ f(v_i(t)), & v_i(t) \neq 0. \end{cases} \qquad \forall i = 1, \ldots, n.$$

- Aqui, $v_i(t)$ denota o potencial de ativação do i-ésimo neurônio da rede na iteração t. Os pesos sinápticos podem ser obtidos usando a regra de correlação (conhecida como aprendizado de Hebb) ou a regra de projeção. Além disso, f é a função de ativação quaterniônica, que é o elemento chave que difere os vários modelos de QHNNs.

O modelo CV-QHNN

- As redes neurais de Hopfield quaterniônicas (QHNNs, do inglês *quaternionic Hopfield neural networks*) são generalizações da rede clássica de Hopfield, mas seus vetores apresentam entradas do conjunto dos quatérnios.

- De um modo geral, as QHNNs definem, a partir de um vetor inicial $\mathbf{x}(0)$, uma sequência $\mathbf{x}(0), \mathbf{x}(1), \ldots$ de vetores cujas componentes são dadas pela equação de evolução

$$x_i(t+1) = \begin{cases} x_i(t), & v_i(t) = 0, \\ f(v_i(t)), & v_i(t) \neq 0. \end{cases} \qquad \forall i = 1, \ldots, n.$$

- Aqui, $v_i(t)$ denota o potencial de ativação do i-ésimo neurônio da rede na iteração t. Os pesos sinápticos podem ser obtidos usando a regra de correlação (conhecida como aprendizado de Hebb) ou a regra de projeção. Além disso, f é a função de ativação quaterniônica, que é o elemento chave que difere os vários modelos de QHNNs.

- No caso do modelo *CV-QHNN* (do inglês *continuous-valued QHNN*), apresentado por Valle em 2014, usa-se, como função de ativação, a função $\sigma(v_i(t)) = \dfrac{v_i(t)}{|v_i(t)|}$, que é uma generalização da função sinal quaterniônica $qsgn(v_i(t))$.
- A CV-QHNN sempre converge para um estado estacionário, desde que operada no modo assíncrono. A principal vantagem desse modelo é que a sua função de ativação não obriga representarmos um quatérnio na forma ângulo-fase.

- No caso do modelo *CV-QHNN* (do inglês *continuous-valued QHNN*), apresentado por Valle em 2014, usa-se, como função de ativação, a função $\sigma(v_i(t)) = \dfrac{v_i(t)}{|v_i(t)|}$, que é uma generalização da função sinal quaterniônica $qsgn(v_i(t))$.
- A CV-QHNN sempre converge para um estado estacionário, desde que operada no modo assíncrono. A principal vantagem desse modelo é que a sua função de ativação não obriga representarmos um quatérnio na forma ângulo-fase.

- No caso do modelo *CV-QHNN* (do inglês *continuous-valued QHNN*), apresentado por Valle em 2014, usa-se, como função de ativação, a função $\sigma(v_i(t)) = \dfrac{v_i(t)}{|v_i(t)|}$, que é uma generalização da função sinal quaterniônica $qsgn(v_i(t))$.

- A CV-QHNN sempre converge para um estado estacionário, desde que operada no modo assíncrono. A principal vantagem desse modelo é que a sua função de ativação não obriga representarmos um quatérnio na forma ângulo-fase.

Trabalhos futuros

- Dispomos dos programas para implementação efetiva do modelo CV-QHNN.
- O próximo passo será a implementação da equação da evolução da rede (com atualização assíncrona) usando armazenamento por correlação e por projeção.
- Em seguida compararemos os resultados de capacidade de armazenamento e de recuperação do modelo por meio de medidas adequadas.
- Fixaremos o número de neurônios em 100 e testaremos a performance da CV-QHNN para diferentes quantidades de vetores no conjunto de memórias fundamentais.
- Como sabemos da limitação da capacidade de armazenamento das redes de Hopfield e do problema da referência cruzada (quando utilizamos armazenamento por correlação), conjecturamos que obteremos resultados mais eficazes usando armazenamento por projeção.

Trabalhos futuros

- Dispomos dos programas para implementação efetiva do modelo CV-QHNN.
- O próximo passo será a implementação da equação da evolução da rede (com atualização assíncrona) usando armazenamento por correlação e por projeção.
- Em seguida compararemos os resultados de capacidade de armazenamento e de recuperação do modelo por meio de medidas adequadas.
- Fixaremos o número de neurônios em 100 e testaremos a performance da CV-QHNN para diferentes quantidades de vetores no conjunto de memórias fundamentais.
- Como sabemos da limitação da capacidade de armazenamento das redes de Hopfield e do problema da referência cruzada (quando utilizamos armazenamento por correlação), conjecturamos que obteremos resultados mais eficazes usando armazenamento por projeção.

Trabalhos futuros

- Dispomos dos programas para implementação efetiva do modelo CV-QHNN.
- O próximo passo será a implementação da equação da evolução da rede (com atualização assíncrona) usando armazenamento por correlação e por projeção.
- Em seguida compararemos os resultados de capacidade de armazenamento e de recuperação do modelo por meio de medidas adequadas.
- Fixaremos o número de neurônios em 100 e testaremos a performance da CV-QHNN para diferentes quantidades de vetores no conjunto de memórias fundamentais.
- Como sabemos da limitação da capacidade de armazenamento das redes de Hopfield e do problema da referência cruzada (quando utilizamos armazenamento por correlação), conjecturamos que obteremos resultados mais eficazes usando armazenamento por projeção.

Trabalhos futuros

- Dispomos dos programas para implementação efetiva do modelo CV-QHNN.
- O próximo passo será a implementação da equação da evolução da rede (com atualização assíncrona) usando armazenamento por correlação e por projeção.
- Em seguida compararemos os resultados de capacidade de armazenamento e de recuperação do modelo por meio de medidas adequadas.
- Fixaremos o número de neurônios em 100 e testaremos a performance da CV-QHNN para diferentes quantidades de vetores no conjunto de memórias fundamentais.
- Como sabemos da limitação da capacidade de armazenamento das redes de Hopfield e do problema da referência cruzada (quando utilizamos armazenamento por correlação), conjecturamos que obteremos resultados mais eficazes usando armazenamento por projeção.

Trabalhos futuros

- Dispomos dos programas para implementação efetiva do modelo CV-QHNN.
- O próximo passo será a implementação da equação da evolução da rede (com atualização assíncrona) usando armazenamento por correlação e por projeção.
- Em seguida compararemos os resultados de capacidade de armazenamento e de recuperação do modelo por meio de medidas adequadas.
- Fixaremos o número de neurônios em 100 e testaremos a performance da CV-QHNN para diferentes quantidades de vetores no conjunto de memórias fundamentais.
- Como sabemos da limitação da capacidade de armazenamento das redes de Hopfield e do problema da referência cruzada (quando utilizamos armazenamento por correlação), conjecturamos que obteremos resultados mais eficazes usando armazenamento por projeção.

- Por exemplo, numa visão conservadora, se o número de neurônios é n, o número de memórias armazenadas corretamente (usando correlação) será proporcional a $\frac{n}{ln(n)}$ quando $n \to \infty$.

- Todavia, usando armazenamento por projeção, a capacidade de armazenamento é universal.

- Após o término do estudo do modelo CV-QHNN, iniciaremos o estudo do modelo CV-QHNN para fins comparativos, analisando-se tolerância a ruídos, capacidade de armazenamento e de recuperação.

- Agradecimentos especiais ao aluno de doutorado *David Contreras* pelo auxílio na elaboração de algumas das implementações computacionais.

- Por exemplo, numa visão conservadora, se o número de neurônios é n, o número de memórias armazenadas corretamente (usando correlação) será proporcional a $\frac{n}{ln(n)}$ quando $n \to \infty$.
- Todavia, usando armazenamento por projeção, a capacidade de armazenamento é universal.
- Após o término do estudo do modelo CV-QHNN, iniciaremos o estudo do modelo CV-QHNN para fins comparativos, analisando-se tolerância a ruídos, capacidade de armazenamento e de recuperação.
- Agradecimentos especiais ao aluno de doutorado *David Contreras* pelo auxílio na elaboração de algumas das implementações computacionais.

- Por exemplo, numa visão conservadora, se o número de neurônios é n, o número de memórias armazenadas corretamente (usando correlação) será proporcional a $\dfrac{n}{ln(n)}$ quando $n \to \infty$.
- Todavia, usando armazenamento por projeção, a capacidade de armazenamento é universal.
- Após o término do estudo do modelo CV-QHNN, iniciaremos o estudo do modelo CV-QHNN para fins comparativos, analisando-se tolerância a ruídos, capacidade de armazenamento e de recuperação.
- Agradecimentos especiais ao aluno de doutorado *David Contreras* pelo auxílio na elaboração de algumas das implementações computacionais.

- Por exemplo, numa visão conservadora, se o número de neurônios é n, o número de memórias armazenadas corretamente (usando correlação) será proporcional a $\frac{n}{ln(n)}$ quando $n \to \infty$.

- Todavia, usando armazenamento por projeção, a capacidade de armazenamento é universal.

- Após o término do estudo do modelo CV-QHNN, iniciaremos o estudo do modelo CV-QHNN para fins comparativos, analisando-se tolerância a ruídos, capacidade de armazenamento e de recuperação.

- Agradecimentos especiais ao aluno de doutorado *David Contreras* pelo auxílio na elaboração de algumas das implementações computacionais.