Tópicos em Biomatemática
MT 808

Morfologia Matemática em imagens coloridas e ordenação de vetores no espaço RGB.

Arlyson Alves do Nascimento
Orientador: Marcos E. R. do Valle Mesquita
IMECC-Unicamp

Este trabalho é baseado nos seguintes artigos:

- Angulo, J.. **Morphological colour operators in totally ordered lattices based on distances: Application to image filtering, enhancement and analysis**; Computer Vision and Image Understanding, Vol. 107, January 2007, pp. 56-73.
- Aptoula, E., Lefèvre, S.. **A comparative study on multivariate mathematical morphology**; Pattern Recognition, Vol. 40, February 2007, pp. 2914-2929.
- Haralick, R. M., Sternberg, S. R., Zhuang, X.. **Image analysis using mathematical morphology**; IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, Vol. PAMI-9, No. 4, July 1987, pp. 532-550.

A apresentação deste trabalho foi dividida nas seguintes partes:

1. Reticulados
2. Espaço de cores RGB
3. Ordenação de Vetores
4. Testes

Reticulados completos

Nesta seção faremos uma breve revisão da teoria dos reticulados completos. Reticulados fornecem um contexto geral onde a morfologia matemática pode ser conduzida.

Definição (Ordem Parcial e Total)

Dado um conjunto não vazio $\mathcal{L}$, uma relação binária $\leq$ em $\mathcal{L}$ é chamada **ordem parcial** *se as seguintes propriedades são satisfeitas:*

- *(O1) Reflexiva:* $x \leq x, \ \forall \ x \in \mathcal{L}$;
- *(O2) Anti-simétrica: se* $x \leq y$ *e* $y \leq x \Rightarrow x = y, \ \forall \ x, y \in \mathcal{L}$;
- *(O3) Transitiva: se* $x \leq y$ *e* $y \leq z \Rightarrow x \leq z, \ \forall \ x, y, z \in \mathcal{L}$;

A ordem é **dita total** *se, além das três propriedades acima, ela tiver a seguinte propriedade:*

- *(O4) Total: se* $x \leq y$ *ou* $y \leq x, \ \forall \ x, y \in \mathcal{L}$.

Reticulados completos

Uma relação binária $\leq$ em $\mathcal{L}$ que é Reflexiva e Transitiva é chamada de **Pré-ordem**.

Um conjunto $\mathcal{L}$ munido com uma **ordem parcial** é dito um conjunto parcialmente ordenado.

Seja $\mathcal{L}$ um conjunto parcialmente ordenado e $\mathcal{X} \subset \mathcal{L}$, dizemos que α é cota superior de $\mathcal{X}$ se $\alpha \geq x$, para todo $x \in \mathcal{X}$. Definimos o supremo $\bigvee \mathcal{X}$ como a menor cota superior de $\mathcal{X}$.

Do mesmo modo, β é cota inferior de $\mathcal{X}$ se para todo $x \in \mathcal{X}$ temos que $\beta \leq x$. O ínfimo $\bigwedge \mathcal{X}$ de $\mathcal{X}$ é a maior cota inferior.

Reticulados completos

Uma relação binária $\leq$ em $\mathcal{L}$ que é Reflexiva e Transitiva é chamada de **Pré-ordem**.

Um conjunto $\mathcal{L}$ munido com uma **ordem parcial** é dito um conjunto parcialmente ordenado.

Seja $\mathcal{L}$ um conjunto parcialmente ordenado e $\mathcal{X} \subset \mathcal{L}$, dizemos que α é cota superior de $\mathcal{X}$ se $\alpha \geq x$, para todo $x \in \mathcal{X}$. Definimos o supremo $\bigvee \mathcal{X}$ como a menor cota superior de $\mathcal{X}$.

Do mesmo modo, β é cota inferior de $\mathcal{X}$ se para todo $x \in \mathcal{X}$ temos que $\beta \leq x$. O ínfimo $\bigwedge \mathcal{X}$ de $\mathcal{X}$ é a maior cota inferior.

Reticulados completos

Uma relação binária $\leq$ em $\mathcal{L}$ que é Reflexiva e Transitiva é chamada de **Pré-ordem**.

Um conjunto $\mathcal{L}$ munido com uma **ordem parcial** é dito um conjunto parcialmente ordenado.

Seja $\mathcal{L}$ um conjunto parcialmente ordenado e $\mathcal{X} \subset \mathcal{L}$, dizemos que α é cota superior de $\mathcal{X}$ se $\alpha \geq x$, para todo $x \in \mathcal{X}$. Definimos o supremo $\bigvee \mathcal{X}$ como a menor cota superior de $\mathcal{X}$.

Do mesmo modo, β é cota inferior de $\mathcal{X}$ se para todo $x \in \mathcal{X}$ temos que $\beta \leq x$. O ínfimo $\bigwedge \mathcal{X}$ de $\mathcal{X}$ é a maior cota inferior.

Reticulados completos

Definição (Reticulado)

Um conjunto parcialmente ordenado $\mathcal{L}$ é um reticulado se todo subconjunto finito possui supremo e ínfimo em $\mathcal{L}$.

Definição (Reticulado Completo)

Um reticulado é dito completo se todo subconjunto (finito ou infinito) possui supremo e ínfimo em $\mathcal{L}$.

Reticulados completos

Definição (Reticulado)

Um conjunto parcialmente ordenado $\mathcal{L}$ é um reticulado se todo subconjunto finito possui supremo e ínfimo em $\mathcal{L}$.

Definição (Reticulado Completo)

Um reticulado é dito completo se todo subconjunto (finito ou infinito) possui supremo e ínfimo em $\mathcal{L}$.

Operadores em Reticulados completos

Sejam $\mathcal{L}$ e $\mathcal{M}$ reticulados completos. O conjunto de todos os operadores de $\mathcal{L}$ em $\mathcal{M}$ é denotado por $\mathcal{O}(\mathcal{L},\mathcal{M})$ e herda a estrutura de ordenação parcial de $\mathcal{M}$.

Sejam os operadores $\phi, \varphi : \mathcal{L} \to \mathcal{M}$ definimos a ordem parcial em $\mathcal{M}$ do seguinte modo:

$$\phi \leq \varphi \iff \phi(x) \leq \varphi(x),\ \forall\ x \in \mathcal{L}.$$

O conjunto $\mathcal{O}(\mathcal{L},\mathcal{M})$ torna-se um reticulado completo no âmbito da presente ordenação parcial; o ínfimo e supremo são dados por

$$\left(\bigwedge_{i\in I} \psi_i\right)(x) = \bigwedge_{i\in I} \psi_i(x) \text{ e } \left(\bigvee_{i\in I} \psi_i\right)(x) = \bigvee_{i\in I} \psi_i(x),$$

respectivamente, para cada família de operadores $\{\psi_i; i \in I\}$ em $\mathcal{O}(\mathcal{L},\mathcal{M})$.

Operadores em Reticulados completos

Sejam $\mathcal{L}$ e $\mathcal{M}$ reticulados completos. O conjunto de todos os operadores de $\mathcal{L}$ em $\mathcal{M}$ é denotado por $\mathcal{O}(\mathcal{L}, \mathcal{M})$ e herda a estrutura de ordenação parcial de $\mathcal{M}$.

Sejam os operadores $\phi, \varphi : \mathcal{L} \to \mathcal{M}$ definimos a ordem parcial em $\mathcal{M}$ do seguinte modo:

$$\phi \leq \varphi \iff \phi(x) \leq \varphi(x), \ \forall \ x \in \mathcal{L}.$$

O conjunto $\mathcal{O}(\mathcal{L}, \mathcal{M})$ torna-se um reticulado completo no âmbito da presente ordenação parcial; o ínfimo e supremo são dados por

$$\left(\bigwedge_{i \in I} \psi_i\right)(x) = \bigwedge_{i \in I} \psi_i(x) \text{ e } \left(\bigvee_{i \in I} \psi_i\right)(x) = \bigvee_{i \in I} \psi_i(x),$$

respectivamente, para cada família de operadores $\{\psi_i; i \in I\}$ em $\mathcal{O}(\mathcal{L}, \mathcal{M})$.

Operadores em Reticulados completos

Definição (Adjunção)

Sejam $\mathcal{L}$ e $\mathcal{M}$ *reticulados completos,* $\epsilon : \mathcal{L} \to \mathcal{M}$, e $\delta : \mathcal{M} \to \mathcal{L}$. *O par* (ϵ, δ) *é chamado uma adjunção entre* $\mathcal{L}$ e $\mathcal{M}$ *se*

$$\delta(Y) \leq X \iff Y \leq \epsilon(X),$$

para cada $X \in \mathcal{L}$ e $Y \in \mathcal{M}$. *Se* $\mathcal{L} = \mathcal{M}$, *então* (ϵ, δ) *é chamado adjunção sobre* $\mathcal{L}$.

Definição (Erosão)

Sejam $\mathcal{L}$ e $\mathcal{M}$ *reticulados completos. Um operador* $\epsilon : \mathcal{L} \to \mathcal{M}$ *que satisfaz*

$$\epsilon\left(\bigwedge_{i \in I} X_i\right) = \bigwedge_{i \in I} \epsilon(X_i),$$

para cada coleção $X_i \in \mathcal{L}, i \in I$, *é chamado de erosão.*

Operadores em Reticulados completos

Definição (Dilatação)

Sejam $\mathcal{L}$ e $\mathcal{M}$ reticulados completos. Um operador $\delta : \mathcal{M} \to \mathcal{L}$ que satisfaz

$$\delta\left(\bigvee_{i\in I} Y_i\right) = \bigvee_{i\in I} \delta(Y_i),$$

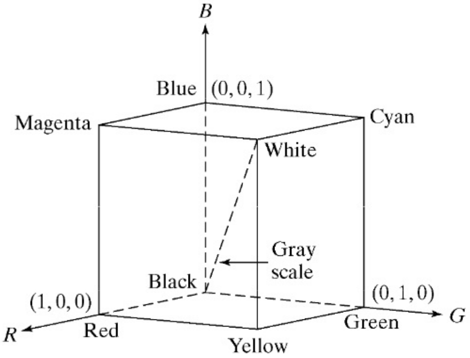
para cada coleção $Y_i \in \mathcal{M}, i \in I$, é chamado de dilatação.

Teorema

Seja (ϵ, δ) uma adjunção entre $\mathcal{L}$ e $\mathcal{M}$. Então ϵ é uma erosão e δ é uma dilatação.

RGB

O espaço de cor RGB é um dos espaços de cores mais utilizados no processamento e armazenamento de dados digitais de imagens. Ele é formado por três cores primárias (vermelho, verde e azul). O modelo de cores RGB, é definido pelos níveis de cinza de cada uma das três cores primárias.



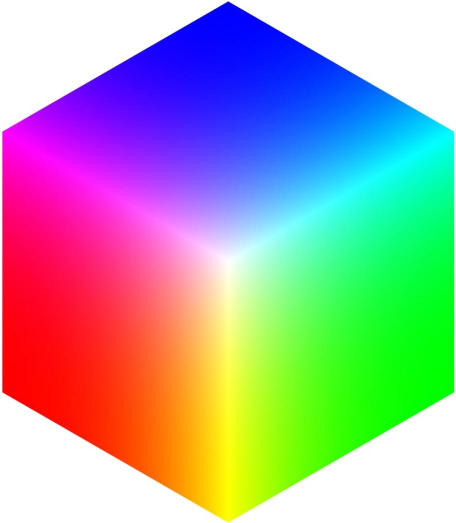
RGB

Em um sistema de vídeo RGB com dados de 8 bits de resolução, a faixa de possíveis valores de níveis de cinza para cada componente é de 0 a 255, de modo que há 256^3, ou seja, 16777216 possibilidades de combinações de vermelho, verde e azul que podem ser visualizadas nesse dispositivo.

No espaço RGB as imagens coloridas são representadas por pixels de cores definidas por um espaço de cor tridimensional, onde cada pixel é representado por uma coordenada tridimensional dentro do cubo de cores RGB. Nos vértices do cubo estão as cores primárias (Vermelho, Verde e Azul) e as cores secundárias (Ciano, Magenta e Amarelo).

A diagonal do cubo que vai da origem (Preto) até o canto oposto do cubo (Branco) é conhecida como Escala de Cinza, de modo que os valores sobre essa escala de cinza possuem componentes iguais de vermelho, verde e azul.

RGB



RGB

Seja P um pixel ou vetor arbitrário no espaço de cor RGB. Dessa forma, temos que

$$P = (p_R, p_G, p_B)^T = p_R.R + p_G.G + p_B.B,$$

onde $R = (1,0,0)^T$, $G = (0,1,0)^T$ e $B = (0,1,0)^T$.

Como as componentes de P são funções das coordenadas (i,j), então

$$P(i,j) = (p_R(i,j), p_G(i,j), p_B(i,j))^T$$

RGB

A aplicação da morfologia matemática a imagens coloridas é dificultada pela natureza vetorial dos dados presentes nas imagens. Mas como definir o mínimo ou máximo entre, por exemplo, a cor verde e a cor azul? Uma alternativa, de modo a abordar o problema da morfologia matemática a imagens coloridas é tratar as cores dos pixels como vetores e ordená-los.

A morfologia matemática é baseada na aplicação da teoria dos reticulados e estruturas espaciais. A definição dos operadores morfológicos requer uma estrutura de reticulado completo. Uma vez estabelecida a forma de ordenação, os operadores Morfológicos podem ser definidos de maneira convencional.

RGB

A aplicação da morfologia matemática a imagens coloridas é dificultada pela natureza vetorial dos dados presentes nas imagens. Mas como definir o mínimo ou máximo entre, por exemplo, a cor verde e a cor azul? Uma alternativa, de modo a abordar o problema da morfologia matemática a imagens coloridas é tratar as cores dos pixels como vetores e ordená-los.

A morfologia matemática é baseada na aplicação da teoria dos reticulados e estruturas espaciais. A definição dos operadores morfológicos requer uma estrutura de reticulado completo. Uma vez estabelecida a forma de ordenação, os operadores Morfológicos podem ser definidos de maneira convencional.

Ordenação de Vetores

Existem vários tipos de ordenação, marginal, reduzida, parcial e condicional. Essas técnicas são geralmente classificadas em um dos seguintes grupos:

- Ordenação Marginal (M-ordenação);
- ordenação condicional (C-ordenação);
- ordenação parcial (P-ordenação);
- ordenação reduzida (R-ordenação).

M-ordenação

Ordenação Marginal (M-ordenação): as amostras multivariadas são ordenadas de acordo com cada dimensão de forma independente, o que corresponde a uma ordenação realizada em cada componente dos vetores dados:

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n,\ x \leq y \iff \forall\, i \in \{1, \ldots, n\},\ x_i \leq y_i.$$

O uso da ordenação marginal no processamento de imagens coloridas é a abordagem mais simples. No entanto, esta abordagem pode apresentar alterações visuais na cor e também pode ser inaceitável em aplicações que utilizam cores para reconhecimento de objetos.

M-ordenação

Ordenação Marginal (M-ordenação): as amostras multivariadas são ordenadas de acordo com cada dimensão de forma independente, o que corresponde a uma ordenação realizada em cada componente dos vetores dados:

$$\forall\ x, y \in \mathbb{R}^n,\ x \leq y \iff \forall\ i \in \{1, \ldots, n\},\ x_i \leq y_i.$$

O uso da ordenação marginal no processamento de imagens coloridas é a abordagem mais simples. No entanto, esta abordagem pode apresentar alterações visuais na cor e também pode ser inaceitável em aplicações que utilizam cores para reconhecimento de objetos.

C-ordenação

Ordenação Condicional (C-ordenação): as amostras multivariadas são ordenadas em um de seus conjuntos marginais de observações, por meio de alguns dos seus componentes marginais, selecionada sequencialmente de acordo com as diferentes condições.

Por isso, a ordem dos vetores está condicionada à um conjunto marginal particular de componentes classificados. A ordenação lexicográfica constitui um exemplo muito conhecido de C-ordenação empregando potencialmente todos os componentes dos vetores disponíveis dados:

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n,\ x \;\leq\; y \Longleftrightarrow\ \exists\, i \in \{1, \ldots, n\}\,; \forall\, j < i,\ x_j = y_j \text{ e } x_i \leq y_i .$$

C-ordenações são mais adequados para os casos em que se pode estabelecer uma prioridade entre os canais de imagem.

C-ordenação

Ordenação Condicional (C-ordenação): as amostras multivariadas são ordenadas em um de seus conjuntos marginais de observações, por meio de alguns dos seus componentes marginais, selecionada sequencialmente de acordo com as diferentes condições.

Por isso, a ordem dos vetores está condicionada à um conjunto marginal particular de componentes classificados. A ordenação lexicográfica constitui um exemplo muito conhecido de C-ordenação empregando potencialmente todos os componentes dos vetores disponíveis dados:

$$\forall\ x, y \in \mathbb{R}^n,\ x\ \leq\ y \Longleftrightarrow\ \exists\ i \in \{1, \ldots, n\}\,; \forall\ j < i,\ x_j = y_j \text{ e } x_i \leq y_i.$$

C-ordenações são mais adequados para os casos em que se pode estabelecer uma prioridade entre os canais de imagem.

P-ordenação

Ordenação Parcial (P-ordenação): as amostras multivariadas são ordenadas de modo que os dados de entrada são divididos em grupos de equivalência de vetores que são então ordenados. Neste caso, "parcial" é um abuso da terminologia, uma vez que existem ordenações totais pertencentes a esta classe especial, e por isso vamos usar o termo P-ordenação.

R-ordenação

Ordenação Reduzida (R-ordenação): as amostras multivariadas são ordenadas de modo que cada observação multivariada é reduzida a um valor escalar e, em seguida, classificado de acordo com sua ordem escalar natural. Esse método consiste em geral classificá-los com uma métrica de distância e ordenações de projeção. Por exemplo, um R-ordenação em $\mathbb{R}^n$ consistir em definir uma transformação $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, e, em seguida, ordenar os vetores do $\mathbb{R}^n$ com respeito à ordem escalar da sua projeção em $\mathbb{R}$ por h:

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n,\; x \;\leq\; y \iff h(x) \;\leq\; h(y).$$

De acordo com a transformação escolhida, é possível obter uma pré-ordenação total (h não injetiva) ou mesmo uma ordenação total (h injetiva). Uma vantagem adicional da R-ordenações reside no fato de que com uma transformação h devidamente escolhida, pode-se atribuir a mesma prioridade de todas as componentes, ao contrário da C-ordenação.

R-ordenação

Ordenação Reduzida (R-ordenação): as amostras multivariadas são ordenadas de modo que cada observação multivariada é reduzida a um valor escalar e, em seguida, classificado de acordo com sua ordem escalar natural. Esse método consiste em geral classificá-los com uma métrica de distância e ordenações de projeção. Por exemplo, um R-ordenação em $\mathbb{R}^n$ consistir em definir uma transformação $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, e, em seguida, ordenar os vetores do $\mathbb{R}^n$ com respeito à ordem escalar da sua projeção em $\mathbb{R}$ por h:

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n,\ x \ \leq \ y \iff h(x) \ \leq \ h(y).$$

De acordo com a transformação escolhida, é possível obter uma pré-ordenação total (h não injetiva) ou mesmo uma ordenação total (h injetiva). Uma vantagem adicional da R-ordenações reside no fato de que com uma transformação h devidamente escolhida, pode-se atribuir a mesma prioridade de todas as componentes, ao contrário da C-ordenação.

Morfologia em imagens coloridas

Para uma abordagem vetorial da Morfologia Matemática precisa-se de uma estrutura de reticulado completo no espaço de cor escolhido. Uma imagem pode ser representada no espaço RGB como:

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

$$f(i,j) = [f_R(i,j), f_G(i,j), f_B(i,j)]^T$$

Morfologia em imagens coloridas

Para Morfologia Matemática em imagens coloridas vamos definir a erosão e dilatação, onde de particular interesse em aplicações vamos considerar o elemento estruturante (SE) b como sendo flat (plano).

Assim a erosão vetorial ϵ_b de uma imagem colorida f em x, por um elemento estruturante flat (SE) b, é dado por:

$$\epsilon_b(f)(x) = \inf_{s \in b} \{f(x+s)\}.$$

A dilatação vetorial δ_b de uma imagem colorida f em x, por um elemento estruturante flat (SE) b, é dado por:

$$\delta_b(f)(x) = \sup_{s \in b} \{f(x-s)\}.$$

Morfologia em imagens coloridas

Para Morfologia Matemática em imagens coloridas vamos definir a erosão e dilatação, onde de particular interesse em aplicações vamos considerar o elemento estruturante (SE) b como sendo flat (plano).

Assim a erosão vetorial ϵ_b de uma imagem colorida f em x, por um elemento estruturante flat (SE) b, é dado por:

$$\epsilon_b(f)(x) = \inf_{s \in b} \{f(x+s)\}.$$

A dilatação vetorial δ_b de uma imagem colorida f em x, por um elemento estruturante flat (SE) b, é dado por:

$$\delta_b(f)(x) = \sup_{s \in b} \{f(x-s)\}.$$

Ordem Lexicográfica

A ordem Lexicográfica é análoga à ordem das palavras em um dicionário, e é um exemplo de C-ordenação. Esse método é baseado na atribuição de prioridades as componentes do vetor, de modo que umas possuem mais importância que outras.

Assim, a ordem é determinada através da componente de maior prioridade, e se os valores comparados forem iguais, passa-se a comparar a componente seguinte e assim sucessivamente. A ordem Lexicográfica é uma ordem Total, de modo que todos os vetores sejam comparáveis.

Ordem Lexicográfica

Dado um espaço de cor C representado por três canais $C \subset \mathbb{R}^3$ uma ordenação Lexicográfica consiste basicamente em definir uma ordem para processamento de cada pixel.

Sejam $u, v \in \mathbb{R}^3$, então

$$u \leq_L v \iff \begin{cases} u_1 < v_1 \text{ ou} \\ u_1 = v_1 \text{ e } u_2 < v_2 \text{ ou} \\ u_1 = v_1 \text{ e } u_2 = v_2 \text{ e } u_3 \leq v_3 \end{cases}$$

Como a ordem Lexicográfica é uma ordem total, então o aparecimento de falsas cores após o processamento é evitado.

Ordem Lexicográfica

Dado um espaço de cor C representado por três canais $C \subset \mathbb{R}^3$ uma ordenação Lexicográfica consiste basicamente em definir uma ordem para processamento de cada pixel.

Sejam $u, v \in \mathbb{R}^3$, então

$$u \leq_L v \iff \begin{cases} u_1 < v_1 \text{ ou} \\ u_1 = v_1 \text{ e } u_2 < v_2 \text{ ou} \\ u_1 = v_1 \text{ e } u_2 = v_2 \text{ e } u_3 \leq v_3 \end{cases}$$

Como a ordem Lexicográfica é uma ordem total, então o aparecimento de falsas cores após o processamento é evitado.

Ordem por medida de distância

Essa ordem é um exemplo de R-ordenação, e esse método é baseado no cálculo da distância de um dado pixel a um pixel de referência, ou vetor de referência, previamente definido . Dessa forma, temos que o método de ordenação por medida de distância com relação ao vetor de referência, w_{ref} é dado por

$$\forall u, v \in \mathbb{R}^3, u \leq_d v \iff d(u, w_{ref}) \leq d(v, w_{ref}),$$

onde $d(\cdot, \cdot)$ representa uma medida de distância.

No caso do w_{ref} ser a origem, pixel de cor preta, a expressão torna-se equivalente a usar a norma dos vetores.

Ordem por medida de distância

Essa ordem é um exemplo de R-ordenação, e esse método é baseado no cálculo da distância de um dado pixel a um pixel de referência, ou vetor de referência, previamente definido . Dessa forma, temos que o método de ordenação por medida de distância com relação ao vetor de referência, w_{ref} é dado por

$$\forall u, v \in \mathbb{R}^3, u \leq_d \; v \iff d(u, w_{ref}) \leq d(v, w_{ref}),$$

onde $d(\cdot, \cdot)$ representa uma medida de distância.

No caso do w_{ref} ser a origem, pixel de cor preta, a expressão torna-se equivalente a usar a norma dos vetores.

Ordem por medida de distância

Essa ordem por medida de distância não é total, mas possui uma Pré-ordem total, uma vez que a aplicação

$$h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \; h(u) = d(u, w_{ref}) = \|u - w_{ref}\|$$

não é injetiva, de modo que $h(u) = h(v)$ não implica que $u = v$, e dessa forma não satisfaz a propriedade de anti-simétrica.

Se no espaço de cor RGB o $w_{ref} = (1, 0, 0)$, $u = (0, 1, 0)$ e $v = (0, 0, 1)$, então $d(u, w_{ref}) = d(v, w_{ref}) = \sqrt{2}$ e $u \neq v$.

Ordem por medida de distância

Essa ordem por medida de distância não é total, mas possui uma Pré-ordem total, uma vez que a aplicação

$$h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \; h(u) = d(u, w_{ref}) = \|u - w_{ref}\|$$

não é injetiva, de modo que $h(u) = h(v)$ não implica que $u = v$, e dessa forma não satisfaz a propriedade de anti-simétrica.

Se no espaço de cor RGB o $w_{ref} = (1,0,0)$, $u = (0,1,0)$ e $v = (0,0,1)$, então $d(u, w_{ref}) = d(v, w_{ref}) = \sqrt{2}$ e $u \neq v$.

Ordem por medida de distância

Essa ordem por medida de distância não é total, mas possui uma Pré-ordem total, uma vez que a aplicação

$$h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ \ h(u) = d(u, w_{ref}) = \|u - w_{ref}\|$$

não é injetiva, de modo que $h(u) = h(v)$ não implica que $u = v$, e dessa forma não satisfaz a propriedade de anti-simétrica.

Se no espaço de cor RGB o $w_{ref} = (1, 0, 0)$, $u = (0, 1, 0)$ e $v = (0, 0, 1)$, então $d(u, w_{ref}) = d(v, w_{ref}) = \sqrt{2}$ e $u \neq v$.

Uma condição adicional é necessária para completar a R-ordenação por medida de distância, a fim de ter uma ordem total para imagens coloridas. Vamos fazer definir da seguinte maneira:

Sejam $w_{ref}, u, v \in RGB \subset \mathbb{R}^3$, então

$$u \leq_{dL} v \iff \begin{cases} d(u, w_{ref}) > d(v, w_{ref}) \text{ ou} \\ d(u, w_{ref}) = d(v, w_{ref}) \text{ e } u_1 < v_1 \text{ ou} \\ d(u, w_{ref}) = d(v, w_{ref}) \text{ e } u_1 = v_1 \text{ e } u_2 < v_2 \text{ ou} \\ d(u, w_{ref}) = d(v, w_{ref}) \text{ e } u_1 = v_1 \text{ e } u_2 = v_2 \text{ e } u_3 \leq v_3 \end{cases}$$

Dessa forma, na ordenação, depois de uma comparação com base na distância $d(\cdot, \cdot)$ para o vetor de referência w_{ref}, a prioridade é dada para a componente R, em seguida para a componente G e finalmente para a componente B.

Uma condição adicional é necessária para completar a R-ordenação por medida de distância, a fim de ter uma ordem total para imagens coloridas. Vamos fazer definir da seguinte maneira:

Sejam $w_{ref}, u, v \in RGB \subset \mathbb{R}^3$, então

$$u \leq_{dL} v \iff \begin{cases} d(u, w_{ref}) > d(v, w_{ref}) \text{ ou} \\ d(u, w_{ref}) = d(v, w_{ref}) \text{ e } u_1 < v_1 \text{ ou} \\ d(u, w_{ref}) = d(v, w_{ref}) \text{ e } u_1 = v_1 \text{ e } u_2 < v_2 \text{ ou} \\ d(u, w_{ref}) = d(v, w_{ref}) \text{ e } u_1 = v_1 \text{ e } u_2 = v_2 \text{ e } u_3 \leq v_3 \end{cases}$$

Dessa forma, na ordenação, depois de uma comparação com base na distância $d(\cdot, \cdot)$ para o vetor de referência w_{ref}, a prioridade é dada para a componente R, em seguida para a componente G e finalmente para a componente B.

Uma condição adicional é necessária para completar a R-ordenação por medida de distância, a fim de ter uma ordem total para imagens coloridas. Vamos fazer definir da seguinte maneira:

Sejam $w_{ref}, u, v \in RGB \subset \mathbb{R}^3$, então

$$u \leq_{dL} v \iff \begin{cases} d(u, w_{ref}) > d(v, w_{ref}) \text{ ou} \\ d(u, w_{ref}) = d(v, w_{ref}) \text{ e } u_1 < v_1 \text{ ou} \\ d(u, w_{ref}) = d(v, w_{ref}) \text{ e } u_1 = v_1 \text{ e } u_2 < v_2 \text{ ou} \\ d(u, w_{ref}) = d(v, w_{ref}) \text{ e } u_1 = v_1 \text{ e } u_2 = v_2 \text{ e } u_3 \leq v_3 \end{cases}$$

Dessa forma, na ordenação, depois de uma comparação com base na distância $d(\cdot, \cdot)$ para o vetor de referência w_{ref}, a prioridade é dada para a componente R, em seguida para a componente G e finalmente para a componente B.

Teste com a ordem marginal

Teste com a ordem Lexicográfica

Teste com a ordem medida de distância + ordem Lexicográfica

Referências I

Angulo, J.
Morphological colour operators in totally ordered lattices based on distances: Application to image filtering, enhancement and analysis
Computer Vision and Image Understanding, Vol. 107, January 2007, pp. 56-73.

Aptoula, E., Lefèvre, S.
A comparative study on multivariate mathematical morphology
Pattern Recognition, Vol. 40, February 2007, pp. 2914-2929.

Haralick, R. M., Sternberg, S. R., Zhuang, X.
Image Analysis using Mathematical Morphology
IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, Vol. PAMI-9, No. 4, July 1987, pp. 532-550.

Heijmans, H. J. A, M.
Morphologycal Image Operators
Academic Press, Boston, 1994.