Tópicos em Biomatemática
MT 808

Morfologia matemática: de preto e branco para tons de cinza e reticulados completos.

Arlyson Alves do Nascimento
Orientador: Marcos E. R. do Valle Mesquita
IMECC-Unicamp

Este trabalho é baseado nos seguintes artigos:

- Haralick, R. M., Sternberg, S. R., Zhuang, X.. **Image Analysis using Mathematical Morphology**; IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, Vol. PAMI-9, No. 4, July 1987, pp. 532-550.
- Heijmans, H. J. A, M.. **Mathematical Morphology: A Modern Approach in Image Processing Based on Algebra and Geometry**; SIAM Review, Vol. 37, No. 1, March 1995, pp. 1-36.

A apresentação deste trabalho foi dividida nas seguintes partes:

1. Morfologia Matemática Binária
2. Morfologia Matemática em Tons de Cinza
3. Reticulados Completos

O quê é Morfologia Matemática?

O termo Morfologia em biologia refere-se ao estudo da estrutura de animais e plantas. De modo análogo, a Morfologia Matemática baseia-se no estudo da estrutura geométrica das entidades presentes em uma imagem.

- Elaborada por Georges Matheron e Jean Serra na década de 60, que se basearam nos trabalhos de Minkowski e Hadwiger para criar a morfologia matemática binária.
- Nos anos 80, várias abordagens foram criadas para generaliza-la para imagens em tons de cinza, como por exemplo a abordagem da umbra e threshold.
- Do ponto de vista teórico, tanto a morfologia matemática binária como as abordagens em tons de cinza, podem ser muito bem conduzidas numa estrutura matemática chamada reticulado completo.

O quê é Morfologia Matemática?

O termo Morfologia em biologia refere-se ao estudo da estrutura de animais e plantas. De modo análogo, a Morfologia Matemática baseia-se no estudo da estrutura geométrica das entidades presentes em uma imagem.

- Elaborada por Georges Matheron e Jean Serra na década de 60, que se basearam nos trabalhos de Minkowski e Hadwiger para criar a morfologia matemática binária.
- Nos anos 80, várias abordagens foram criadas para generaliza-la para imagens em tons de cinza, como por exemplo a abordagem da umbra e threshold.
- Do ponto de vista teórico, tanto a morfologia matemática binária como as abordagens em tons de cinza, podem ser muito bem conduzidas numa estrutura matemática chamada reticulado completo.

- Base matemática $\rightarrow$ Teoria dos Conjuntos.
- Diversas aplicações no processamento e análise de imagens: realce, filtragem, segmentação, detecção de bordas, esqueletização, afinamento, etc.
- Extrair informações relativas à geometria e à topologia de um conjunto desconhecido (uma imagem), pela transformação através de outro conjunto completamente definido, chamado elemento estruturante.

Morfologia Matemática Binária

Sejam A e B subconjuntos de E^N.

Definição

A **dilatação** *de A por B é denotada por* $A \oplus B$ *e definida por*

$$A \oplus B = \left\{ c \in E^N; c = a + b \text{ para cada } \ a \in A \text{ e } b \in B \right\}.$$

Definição

Sejam A um subconjuntos de E^N *e* $x \in E^N$. *A* **translação** *de A por x é denotada por* $(A)_x$ *e definida por*

$$(A)_x = \left\{ c \in E^N; c = a + x \text{ para cada } \ a \in A \right\}.$$

Proposição

$$A \oplus B = \bigcup_{b \in B} (A)_b.$$

Morfologia Matemática Binária

Sejam A e B subconjuntos de E^N.

Definição

A **dilatação** *de A por B é denotada por $A \oplus B$ e definida por*

$$A \oplus B = \left\{c \in E^N; c = a + b \text{ para cada } \ a \in A \text{ e } b \in B\right\}.$$

Definição

Sejam A um subconjuntos de E^N e $x \in E^N$. A **translação** *de A por x é denotada por $(A)_x$ e definida por*

$$(A)_x = \left\{c \in E^N; c = a + x \text{ para cada } \ a \in A\right\}.$$

Proposição

$$A \oplus B = \bigcup_{b \in B} (A)_b.$$

Morfologia Matemática Binária

Sejam A e B subconjuntos de E^N.

Definição

A **dilatação** *de A por B é denotada por $A \oplus B$ e definida por*

$$A \oplus B = \left\{c \in E^N ; c = a + b \text{ para cada } \ a \in A \text{ e } b \in B\right\}.$$

Definição

Sejam A um subconjuntos de E^N e $x \in E^N$. A **translação** *de A por x é denotada por $(A)_x$ e definida por*

$$(A)_x = \left\{c \in E^N ; c = a + x \text{ para cada } \ a \in A\right\}.$$

Proposição

$$A \oplus B = \bigcup_{b \in B} (A)_b.$$

Morfologia Matemática Binária

Definição

A **erosão** *de A por B é denotada por* $A \ominus B$ *e definida por*

$$A \ominus B = \left\{x \in E^N ; x + b \in A \text{ para cada } \ b \in B\right\}.$$

Definição (Alternativa)

A **erosão** *de A por B é denotada por* $A \ominus B$ *e definida por*

$$A \ominus B = \left\{x \in E^N ; \ \text{para cada } \ b \in B, \ \text{existe um } a \in A \text{ tal que } x = a - b\right\}.$$

Proposição

$$A \ominus B = \left\{x \in E^N ; (B)_x \subseteq A\right\} = \bigcap_{b \in B} (A)_{-b}.$$

Morfologia Matemática Binária

Definição

A **erosão** *de A por B é denotada por* $A \ominus B$ *e definida por*

$$A \ominus B = \left\{x \in E^N; x + b \in A \text{ para cada } \ b \in B\right\}.$$

Definição (Alternativa)

A **erosão** *de A por B é denotada por* $A \ominus B$ *e definida por*

$$A \ominus B = \left\{x \in E^N;\ \text{para cada } \ b \in B,\ \text{existe um } a \in A \text{ tal que } x = a - b\right\}.$$

Proposição

$$A \ominus B = \left\{x \in E^N; (B)_x \subseteq A\right\} = \bigcap_{b \in B} (A)_{-b}.$$

Morfologia Matemática Binária

Definição

A **erosão** *de A por B é denotada por* $A \ominus B$ *e definida por*

$$A \ominus B = \left\{x \in E^N; x + b \in A \text{ para cada } \; b \in B\right\}.$$

Definição (Alternativa)

A **erosão** *de A por B é denotada por* $A \ominus B$ *e definida por*

$$A \ominus B = \left\{x \in E^N; \; \text{para cada } \; b \in B, \; \text{existe um } a \in A \text{ tal que } x = a - b\right\}.$$

Proposição

$$A \ominus B = \left\{x \in E^N; (B)_x \subseteq A\right\} = \bigcap_{b \in B} (A)_{-b}.$$

Morfologia Matemática Binária

Proposição (Propriedades Dilatação)

1. $A \oplus B = B \oplus A$ - *(comutativa)*
2. $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$ - *(associativa)*
3. $(A \cup B) \oplus C = (A \oplus C) \cup (B \oplus C)$

Proposição (Propriedades Erosão)

1. $A \ominus B \neq B \ominus A$ - *(não-comutativa)*
2. $(A \ominus B) \ominus C = A \ominus (B \oplus C)$ - *(não-associativa)*
3. $(A \cap B) \ominus C = (A \ominus C) \cap (B \ominus C)$

Morfologia Matemática Binária

Proposição (Propriedades Dilatação)

1. $A \oplus B = B \oplus A$ - *(comutativa)*
2. $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$ - *(associativa)*
3. $(A \cup B) \oplus C = (A \oplus C) \cup (B \oplus C)$

Proposição (Propriedades Erosão)

1. $A \ominus B \neq B \ominus A$ - *(não-comutativa)*
2. $(A \ominus B) \ominus C = A \ominus (B \oplus C)$ - *(não-associativa)*
3. $(A \cap B) \ominus C = (A \ominus C) \cap (B \ominus C)$

Morfologia Matemática Binária

Definição

Seja B um subconjuntos de E^N. A **reflexão** *de B é denotada por $\check{B}$ e definida por*

$$\check{B} = \{x \in E^N;\ \text{para cada}\ \ b \in B, x = -b\}.$$

A **reflexão** ocorre sobre a origem.

Definição

Seja A um subconjuntos de E^N. O **complementar** *de A é denotado por A^c e definido por*

$$A^c = \{x \in E^N; x \notin A\}.$$

Teorema

$$(A \ominus B)^c = A^c \oplus \check{B}.$$

Morfologia Matemática Binária

Definição

Seja B um subconjuntos de E^N. A **reflexão** *de B é denotada por $\check{B}$ e definida por*

$$\check{B} = \left\{x \in E^N;\ \textit{para cada}\ \ b \in B, x = -b\right\}.$$

A **reflexão** ocorre sobre a origem.

Definição

Seja A um subconjuntos de E^N. O **complementar** *de A é denotado por A^c e definido por*

$$A^c = \left\{x \in E^N; x \notin A\right\}.$$

Teorema

$$(A \ominus B)^c = A^c \oplus \check{B}.$$

Morfologia Matemática Binária

Definição

Seja B um subconjuntos de E^N. A **reflexão** *de B é denotada por $\check{B}$ e definida por*

$$\check{B} = \left\{x \in E^N;\ \textit{para cada}\ \ b \in B, x = -b\right\}.$$

A **reflexão** ocorre sobre a origem.

Definição

Seja A um subconjuntos de E^N. O **complementar** *de A é denotado por A^c e definido por*

$$A^c = \left\{x \in E^N; x \notin A\right\}.$$

Teorema

$$(A \ominus B)^c = A^c \oplus \check{B}.$$

Morfologia Matemática Binária

Definição

A **abertura** *da imagem B pelo elemento estruturante K é denotada por* $B \circ K$ *e definida como*

$$B \circ K = (B \ominus K) \oplus K.$$

Definição

O **fechamento** *da imagem B pelo elemento estruturante K é denotado por* $B \bullet K$ *e definida como*

$$B \bullet K = (B \oplus K) \ominus K.$$

Morfologia Matemática Binária

Definição

A **abertura** *da imagem B pelo elemento estruturante K é denotada por $B \circ K$ e definida como*

$$B \circ K = (B \ominus K) \oplus K.$$

Definição

O **fechamento** *da imagem B pelo elemento estruturante K é denotado por $B \bullet K$ e definida como*

$$B \bullet K = (B \oplus K) \ominus K.$$

Morfologia Matemática Binária

Proposição (Propriedades abertura e fechamento)

1. $(A \circ K) \circ K = A \circ K$ - *(Idempotencia da abertura)*
2. $(A \bullet K) \bullet K = A \bullet K$ - *(Idempotencia do fechamento)*
3. $A \circ K \subseteq A$ - *(Anti-extensiva)*
4. $A \subseteq A \bullet K$ - *(Extensiva)*

Teorema

$$(A \bullet K)^c = A^c \circ \check{K}.$$

Morfologia Matemática Binária

Proposição (Propriedades abertura e fechamento)

1. $(A \circ K) \circ K = A \circ K$ - *(Idempotencia da abertura)*
2. $(A \bullet K) \bullet K = A \bullet K$ - *(Idempotencia do fechamento)*
3. $A \circ K \subseteq A$ - *(Anti-extensiva)*
4. $A \subseteq A \bullet K$ - *(Extensiva)*

Teorema

$$(A \bullet K)^c = A^c \circ \check{K}.$$

Morfologia Matemática em Tons de Cinza

Definição

Sejam $A \subseteq E^N$ e $F = \left\{x \in E^{N-1}; \text{para cada } y \in E, (x, y) \in A\right\}$. *O* **topo** *de* A, *denotado por* $T[A](x) : F \to E$, *é definido por*

$$T[A](x) = \max\{y; (x, y) \in A\}.$$

Definição

Sejam $F \subseteq E^{N-1}$ e $f : F \to E$. *A* **umbra** *de* f, *denotada por* $U[f]$, $U[f] \subseteq F \times E$, *é definida por*

$$U[f] = \{(x, y) \in F \times E; y \leq f(x)\}.$$

Morfologia Matemática em Tons de Cinza

Definição

Sejam $A \subseteq E^N$ *e* $F = \left\{x \in E^{N-1}; \text{para cada } y \in E, (x,y) \in A\right\}$*. O* **topo** *de* A*, denotado por* $T[A](x) : F \to E$*, é definido por*

$$T[A](x) = \max\{y; (x,y) \in A\}\,.$$

Definição

Sejam $F \subseteq E^{N-1}$ *e* $f : F \to E$*. A* **umbra** *de* f*, denotada por* $U[f]$*,* $U[f] \subseteq F \times E$*, é definida por*

$$U[f] = \{(x,y) \in F \times E; y \leq f(x)\}\,.$$

Morfologia Matemática em Tons de Cinza

Definição

Sejam $F, K \subseteq E^{N-1}$, $f : F \to E$ *e* $k : K \to E$. *A* **dilatação** *de* f *por* k *é denotada por* $f \oplus k$, $f \oplus k : F \oplus K \to E$, *e definida por*

$$f \oplus k = T\left[U[f] \oplus U[k]\right].$$

Proposição

Sejam $f : F \to E$ *e* $k : K \to E$. *Então* $f \oplus k : F \oplus K \to E$ *pode ser calculada como*

$$(f \oplus k)(x) = \max_{\substack{z \in K \\ x - z \in F}} \{f(x - z) + k(z)\}.$$

Morfologia Matemática em Tons de Cinza

Definição

Sejam $F, K \subseteq E^{N-1}$, $f : F \to E$ *e* $k : K \to E$. *A* **dilatação** *de* f *por* k *é denotada por* $f \oplus k$, $f \oplus k : F \oplus K \to E$, *e definida por*

$$f \oplus k = T\left[U[f] \oplus U[k]\right].$$

Proposição

Sejam $f : F \to E$ *e* $k : K \to E$. *Então* $f \oplus k : F \oplus K \to E$ *pode ser calculada como*

$$(f \oplus k)(x) = \max_{\substack{z \in K \\ x - z \in F}} \{f(x-z) + k(z)\}.$$

Morfologia Matemática em Tons de Cinza

Definição

Sejam $F, K \subseteq E^{N-1}$, $f : F \to E$ *e* $k : K \to E$. *A* **erosão** *de* f *por* k *é denotada por* $f \ominus k$, $f \ominus k : F \ominus K \to E$, *e definida por*

$$f \ominus k = T\left[U[f] \ominus U[k]\right].$$

Proposição

Sejam $f : F \to E$ *e* $k : K \to E$. *Então* $f \ominus k : F \ominus K \to E$ *pode ser calculada como*

$$(f \ominus k)(x) = \min_{z \in K} \{f(x+z) - k(z)\}.$$

Morfologia Matemática em Tons de Cinza

Definição

Sejam $F, K \subseteq E^{N-1}$, $f : F \to E$ *e* $k : K \to E$. *A* **erosão** *de* f *por* k *é denotada por* $f \ominus k$, $f \ominus k : F \ominus K \to E$, *e definida por*

$$f \ominus k = T\left[U[f] \ominus U[k]\right].$$

Proposição

Sejam $f : F \to E$ *e* $k : K \to E$. *Então* $f \ominus k : F \ominus K \to E$ *pode ser calculada como*

$$(f \ominus k)(x) = \min_{z \in K} \left\{ f(x+z) - k(z) \right\}.$$

Morfologia Matemática em Tons de Cinza

Teorema (Homomorphism Umbra)

Sejam $F, K \subseteq E^{N-1}$, $f : F \to E$ *e* $k : K \to E$. *Então*

1. $U[f \oplus k] = U[f] \oplus U[k]$
2. $U[f \ominus k] = U[f] \ominus U[k]$

Proposição (Propriedades)

1. $f \oplus k = k \oplus f$
2. $(f \oplus k) \oplus h = f \oplus (k \oplus h)$
3. $(f \ominus k) \ominus h = f \ominus (k \oplus h)$

Morfologia Matemática em Tons de Cinza

Teorema (Homomorphism Umbra)

Sejam $F, K \subseteq E^{N-1}$, $f : F \to E$ *e* $k : K \to E$. *Então*

1. $U[f \oplus k] = U[f] \oplus U[k]$
2. $U[f \ominus k] = U[f] \ominus U[k]$

Proposição (Propriedades)

1. $f \oplus k = k \oplus f$
2. $(f \oplus k) \oplus h = f \oplus (k \oplus h)$
3. $(f \ominus k) \ominus h = f \ominus (k \oplus h)$

Morfologia Matemática em Tons de Cinza

Definição

Sejam $f : F \to E$ e $k : K \to E$. A abertura para escala de cinza de f pelo elemento estruturante k é denotada por $f \circ k$ e definida por

$$f \circ k = (f \ominus k) \oplus k.$$

Definição

Sejam $f : F \to E$ e $k : K \to E$. O fechamento para escala de cinza de f pelo elemento estruturante k é denotado por $f \bullet k$ e definido por

$$f \bullet k = (f \oplus k) \ominus k.$$

Morfologia Matemática em Tons de Cinza

Definição

Sejam $f : F \to E$ *e* $k : K \to E$. *A abertura para escala de cinza de* f *pelo elemento estruturante* k *é denotada por* $f \circ k$ *e definida por*

$$f \circ k = (f \ominus k) \oplus k.$$

Definição

Sejam $f : F \to E$ *e* $k : K \to E$. *O fechamento para escala de cinza de* f *pelo elemento estruturante* k *é denotado por* $f \bullet k$ *e definido por*

$$f \bullet k = (f \oplus k) \ominus k.$$

Morfologia Matemática em Tons de Cinza

Proposição (Propriedades)

1. $(f \circ k)(x) \leq f(x)$
2. $f(x) \leq (f \bullet k)(x)$
3. $(f \circ k) \circ k = f \circ k$
4. $(f \bullet k) \bullet k = f \bullet k$

Morfologia Matemática em Tons de Cinza

Definição

Seja $f : F \to E$*. A reflexão para escala de cinza de* f *é denotada por* $\check{f}$*,* $\check{f} : \check{F} \to E$*, e definido por*

$$\check{f}(x) = f(-x).$$

Teorema

Sejam $f : F \to E$*,* $k : K \to E$ *e* $x \in (F \oplus K) \bigcap (F \ominus \check{K})$*. Então*

$$-(f \oplus k)(x) = ((-f) \ominus \check{k})(x).$$

Teorema

$$-(f \circ k) = (-f) \bullet \check{k}.$$

Morfologia Matemática em Tons de Cinza

Definição

Seja $f : F \to E$. *A reflexão para escala de cinza de* f *é denotada por* $\check{f}$, $\check{f} : \check{F} \to E$, *e definido por*

$$\check{f}(x) = f(-x).$$

Teorema

Sejam $f : F \to E$, $k : K \to E$ *e* $x \in (F \oplus K) \bigcap (F \ominus \check{K})$. *Então*

$$-(f \oplus k)(x) = ((-f) \ominus \check{k})(x).$$

Teorema

$$-(f \circ k) = (-f) \bullet \check{k}.$$

Morfologia Matemática em Tons de Cinza

Definição

Seja $f : F \to E$. *A reflexão para escala de cinza de* f *é denotada por* $\check{f}$, $\check{f} : \check{F} \to E$, *e definido por*

$$\check{f}(x) = f(-x).$$

Teorema

Sejam $f : F \to E$, $k : K \to E$ *e* $x \in (F \oplus K) \bigcap \left(F \ominus \check{K}\right)$. *Então*

$$-(f \oplus k)(x) = \left((-f) \ominus \check{k}\right)(x).$$

Teorema

$$-(f \circ k) = (-f) \bullet \check{k}.$$

Reticulados completos

Nesta seção faremos uma breve revisão da teoria dos reticulados completos. Reticulados fornecem um contexto geral onde a morfologia matemática pode ser conduzida.

Definição (Ordem Parcial e Total)

Dado um conjunto não vazio $\mathcal{L}$, uma relação binária $\leq$ em $\mathcal{L}$ é chamada **ordem parcial** *se as seguintes propriedades são satisfeitas:*

- (O1) $X \leq X$;
- (O2) $X \leq Y$ e $Y \leq X \Rightarrow X = Y$;
- (O3) $X \leq Y$ e $Y \leq Z \Rightarrow X \leq Z$;

para cada $X, Y, Z \in \mathcal{L}$.

A ordem é **dita total** *se, além das três propriedades acima, ela tiver a seguinte propriedade:*

- (O4) $X \leq Y$ ou $Y \leq X$;

para cada par $X, Y \in \mathcal{L}$.

Reticulados completos

Nesta seção faremos uma breve revisão da teoria dos reticulados completos. Reticulados fornecem um contexto geral onde a morfologia matemática pode ser conduzida.

Definição (Ordem Parcial e Total)

Dado um conjunto não vazio $\mathcal{L}$, uma relação binária $\leq$ em $\mathcal{L}$ é chamada **ordem parcial** *se as seguintes propriedades são satisfeitas:*

- *(O1)* $X \leq X$;
- *(O2)* $X \leq Y$ e $Y \leq X \Rightarrow X = Y$;
- *(O3)* $X \leq Y$ e $Y \leq Z \Rightarrow X \leq Z$;

para cada $X, Y, Z \in \mathcal{L}$.
A ordem é **dita total** *se, além das três propriedades acima, ela tiver a seguinte propriedade:*

- *(O4)* $X \leq Y$ *ou* $Y \leq X$;

para cada par $X, Y \in \mathcal{L}$.

Reticulados completos

Exemplo

Sejam $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais e $x \leq y$ uma relação de ordem em $\mathbb{R}$, então $\mathbb{R}$ possui uma ordem total.

Exemplo

O conjunto $\mathbb{R}^d$ com a relação de ordem $(x_1, x_2, \ldots, x_d) \leq (y_1, y_2, \ldots, y_d)$ se $x_i \leq y_i$ para todo $i \in 1, 2, \ldots, d$, é um conjunto parcialmente ordenado. E possui uma ordem total se, e somente se, $d = 1$.

Reticulados completos

Exemplo

Sejam $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais e $x \leq y$ uma relação de ordem em $\mathbb{R}$, então $\mathbb{R}$ possui uma ordem total.

Exemplo

O conjunto $\mathbb{R}^d$ com a relação de ordem $(x_1, x_2, \ldots, x_d) \leq (y_1, y_2, \ldots, y_d)$ se $x_i \leq y_i$ para todo $i \in 1, 2, \ldots, d$, é um conjunto parcialmente ordenado. E possui uma ordem total se, e somente se, $d = 1$.

Reticulados completos

Exemplo

Dado um conjunto E, o conjunto das partes de E, denotado por $\mathcal{P}(E)$, e com a relação de inclusão $X \leq Y \Leftrightarrow X \subseteq Y$ se torna um conjunto parcialmente ordenado.

Exemplo

Seja G um grupo. O conjunto de todos os subgrupos de G, ordenado por $H \leq K$ se H é um subgrupo de K é um conjunto parcialmente ordenado.

Reticulados completos

Exemplo

Dado um conjunto E, o conjunto das partes de E, denotado por $\mathcal{P}(E)$, e com a relação de inclusão $X \leq Y \Leftrightarrow X \subseteq Y$ se torna um conjunto parcialmente ordenado.

Exemplo

Seja G um grupo. O conjunto de todos os subgrupos de G, ordenado por $H \leq K$ se H é um subgrupo de K é um conjunto parcialmente ordenado.

Reticulados completos

Um conjunto $\mathcal{L}$ munido com uma **ordem parcial** é dito um conjunto parcialmente ordenado. Seja $\mathcal{L}$ um conjunto parcialmente ordenado e $\mathcal{K} \subset \mathcal{L}$, dizemos que A é cota superior de $\mathcal{K}$ se $A \geq X$, para todo $X \in \mathcal{K}$. Definimos o supremo $\bigvee \mathcal{K}$ como a menor cota superior de $\mathcal{K}$. Do mesmo modo, A é cota inferior de $\mathcal{K}$ se para todo $X \in \mathcal{K}$ temos que $A \leq X$. O ínfimo $\bigwedge \mathcal{K}$ de $\mathcal{K}$ é a maior cota inferior.

Se $\mathcal{K} \subset \mathcal{L}$ contém apenas um número finito de elementos $X_1, X_2, \ldots, X_n$, então vamos escrever $X_1 \wedge X_2 \wedge \ldots \wedge X_n$ em vez de $\bigwedge \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$, e $X_1 \vee X_2 \vee \ldots \vee X_n$ em vez de $\bigvee \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$. Além disso, se $X_i \in \mathcal{L}$ para todo i pertencente a um conjunto de indices I, então vamos escrever $\bigwedge_{i \in I} X_i$ em vez de $\bigwedge \{X_i; i \in I\}$, e $\bigvee_{i \in I} X_i$ em vez de $\bigvee \{X_i; i \in I\}$

Reticulados completos

Um conjunto $\mathcal{L}$ munido com uma **ordem parcial** é dito um conjunto parcialmente ordenado. Seja $\mathcal{L}$ um conjunto parcialmente ordenado e $\mathcal{K} \subset \mathcal{L}$, dizemos que A é cota superior de $\mathcal{K}$ se $A \geq X$, para todo $X \in \mathcal{K}$. Definimos o supremo $\bigvee \mathcal{K}$ como a menor cota superior de $\mathcal{K}$. Do mesmo modo, A é cota inferior de $\mathcal{K}$ se para todo $X \in \mathcal{K}$ temos que $A \leq X$. O ínfimo $\bigwedge \mathcal{K}$ de $\mathcal{K}$ é a maior cota inferior.

Se $\mathcal{K} \subset \mathcal{L}$ contém apenas um número finito de elementos $X_1, X_2, \ldots, X_n$, então vamos escrever $X_1 \wedge X_2 \wedge \ldots \wedge X_n$ em vez de $\bigwedge \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$, e $X_1 \vee X_2 \vee \ldots \vee X_n$ em vez de $\bigvee \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$. Além disso, se $X_i \in \mathcal{L}$ para todo i pertencente a um conjunto de indices I, então vamos escrever $\bigwedge_{i \in I} X_i$ em vez de $\bigwedge \{X_i; i \in I\}$, e $\bigvee_{i \in I} X_i$ em vez de $\bigvee \{X_i; i \in I\}$

Reticulados completos

Definição (Reticulado e Reticulado Completo)

Um conjunto parcialmente ordenado $\mathcal{L}$ é um reticulado se todo subconjunto finito possui supremo e ínfimo em $\mathcal{L}$. Um reticulado é dito completo se todo subconjunto (finito ou infinito) possui supremo e ínfimo.

Por definição, todo reticulado completo $\mathcal{L}$ deve possuir um elemento minimo O e um elemento máximo I, chamados de limites universais de $\mathcal{L}$.

Reticulados completos

Exemplo

O conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ é um reticulado, e ainda é totalmente ordenado, mas não é um reticulado completo. De fato, se tomarmos o conjunto dos números naturais $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$, temos que $\mathbb{N}$ é um subconjunto infinito de $\mathbb{R}$ que não possui supremo.

No entanto, para tornar $\mathbb{R}$ um reticulado completo temos que adicionar $-\infty$ (como o menor elemento) e $+\infty$ (como o maior elemento). Dessa forma, o conjunto $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, será denotado por $\overline{\mathbb{R}}$.

Reticulados completos

Exemplo

O conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ é um reticulado, e ainda é totalmente ordenado, mas não é um reticulado completo. De fato, se tomarmos o conjunto dos números naturais $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$, temos que $\mathbb{N}$ é um subconjunto infinito de $\mathbb{R}$ que não possui supremo.

No entanto, para tornar $\mathbb{R}$ um reticulado completo temos que adicionar $-\infty$ (como o menor elemento) e $+\infty$ (como o maior elemento). Dessa forma, o conjunto $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, será denotado por $\overline{\mathbb{R}}$.

Reticulados completos

Exemplo

Dado um conjunto E, o conjunto das partes de E, denotado por $\mathcal{P}(E)$, é um reticulado completo, onde o infimo é dado pela interseção dos conjuntos e o supremo é dado pela união dos conjuntos. O infimo é o conjunto vazio $\emptyset$ e o supremo é o próprio conjunto E, isto é, $\bigwedge \mathcal{P}(E) = \emptyset$ e $\bigvee \mathcal{P}(E) = E$.

Exemplo

Seja G um grupo. O conjunto de todos os subgrupos de G, ordenado por $H \leq K$ se H é um subgrupo de K é um reticulado completo com $\bigwedge_{i \in I} H_i = \bigcap_{i \in I} H_i$, e $\bigvee_{i \in I} H_i$ o menor subgrupo de G contendo $\bigcup_{i \in I} H_i$.

Reticulados completos

Exemplo

Dado um conjunto E, o conjunto das partes de E, denotado por $\mathcal{P}(E)$, é um reticulado completo, onde o infimo é dado pela interseção dos conjuntos e o supremo é dado pela união dos conjuntos. O infimo é o conjunto vazio $\emptyset$ e o supremo é o próprio conjunto E, isto é, $\bigwedge \mathcal{P}(E) = \emptyset$ e $\bigvee \mathcal{P}(E) = E$.

Exemplo

Seja G um grupo. O conjunto de todos os subgrupos de G, ordenado por $H \leq K$ se H é um subgrupo de K é um reticulado completo com $\bigwedge_{i\in I} H_i = \bigcap_{i\in I} H_i$, e $\bigvee_{i\in I} H_i$ o menor subgrupo de G contendo $\bigcup_{i\in I} H_i$.

Reticulados completos

Sejam $\mathcal{L}$ e $\mathcal{M}$ reticulados completos. O conjunto de todos os operadores de $\mathcal{L}$ em $\mathcal{M}$ é denotado por $\mathcal{O}(\mathcal{L}, \mathcal{M})$ e herda a estrutura de ordenação parcial de $\mathcal{M}$: para os operadores ϕ, φ de $\mathcal{L}$ em $\mathcal{M}$ definimos $\phi \leq \varphi$ se $\phi(X) \leq \varphi(X)$ para todo $X \in \mathcal{L}$.

O conjunto $\mathcal{O}(\mathcal{L}, \mathcal{M})$ torna-se um reticulado completo no âmbito da presente ordenação parcial; o ínfimo e o supremo são dados por

$$\left(\bigwedge_{i\in I} \psi_i\right)(X) = \bigwedge_{i\in I} \psi_i(X) \text{ e } \left(\bigvee_{i\in I} \psi_i\right)(X) = \bigvee_{i\in I} \psi_i(X),$$

respectivamente, para cada família de operadores $\{\psi_i; i \in I\}$ em $\mathcal{O}(\mathcal{L}, \mathcal{M})$.

Reticulados completos

Sejam $\mathcal{L}$ e $\mathcal{M}$ reticulados completos. O conjunto de todos os operadores de $\mathcal{L}$ em $\mathcal{M}$ é denotado por $\mathcal{O}(\mathcal{L},\mathcal{M})$ e herda a estrutura de ordenação parcial de $\mathcal{M}$: para os operadores ϕ, φ de $\mathcal{L}$ em $\mathcal{M}$ definimos $\phi \leq \varphi$ se $\phi(X) \leq \varphi(X)$ para todo $X \in \mathcal{L}$.

O conjunto $\mathcal{O}(\mathcal{L},\mathcal{M})$ torna-se um reticulado completo no âmbito da presente ordenação parcial; o ínfimo e o supremo são dados por

$$\left(\bigwedge_{i\in I}\psi_i\right)(X) = \bigwedge_{i\in I}\psi_i(X) \text{ e } \left(\bigvee_{i\in I}\psi_i\right)(X) = \bigvee_{i\in I}\psi_i(X),$$

respectivamente, para cada família de operadores $\{\psi_i; i \in I\}$ em $\mathcal{O}(\mathcal{L},\mathcal{M})$.

Reticulados completos

Definição (Adjunção)

Sejam $\mathcal{L}$ e $\mathcal{M}$ *reticulados completos,* $\epsilon : \mathcal{L} \to \mathcal{M}$, e $\delta : \mathcal{M} \to \mathcal{L}$. *O par* (ϵ, δ) *é chamado uma adjunção entre* $\mathcal{L}$ e $\mathcal{M}$ *se*

$$\delta(Y) \leq X \iff Y \leq \epsilon(X),$$

para cada $X \in \mathcal{L}$ e $Y \in \mathcal{M}$. *Se* $\mathcal{L} = \mathcal{M}$, *então* (ϵ, δ) *é chamado adjunção sobre* $\mathcal{L}$.

Reticulados completos

Definição (Erosão)

Sejam $\mathcal{L}$ e $\mathcal{M}$ reticulados completos. Um operador $\epsilon : \mathcal{L} \to \mathcal{M}$ que satisfaz

$$\epsilon\left(\bigwedge_{i\in I} X_i\right) = \bigwedge_{i\in I} \epsilon(X_i),$$

para cada coleção $X_i \in \mathcal{L}, i \in I$, é chamado de erosão.

Definição (Dilatação e Erosão)

Sejam $\mathcal{L}$ e $\mathcal{M}$ reticulados completos. Um operador $\delta : \mathcal{M} \to \mathcal{L}$ que satisfaz

$$\delta\left(\bigvee_{i\in I} Y_i\right) = \bigvee_{i\in I} \delta(Y_i),$$

para cada coleção $Y_i \in \mathcal{M}, i \in I$, é chamado de dilatação.

Reticulados completos

Definição (Erosão)

Sejam $\mathcal{L}$ e $\mathcal{M}$ reticulados completos. Um operador $\epsilon : \mathcal{L} \to \mathcal{M}$ que satisfaz

$$\epsilon\left(\bigwedge_{i\in I} X_i\right) = \bigwedge_{i\in I} \epsilon(X_i),$$

para cada coleção $X_i \in \mathcal{L}, i \in I$, é chamado de erosão.

Definição (Dilatação e Erosão)

Sejam $\mathcal{L}$ e $\mathcal{M}$ reticulados completos. Um operador $\delta : \mathcal{M} \to \mathcal{L}$ que satisfaz

$$\delta\left(\bigvee_{i\in I} Y_i\right) = \bigvee_{i\in I} \delta(Y_i),$$

para cada coleção $Y_i \in \mathcal{M}, i \in I$, é chamado de dilatação.

Reticulados completos

Resumo de algumas propriedades básicas.

Proposição

Sejam $\mathcal{L}$ e $\mathcal{M}$ reticulados completos, e (ϵ, δ) uma adjunção entre $\mathcal{L}$ e $\mathcal{M}$. Então

a) $\epsilon(I_{\mathcal{L}}) = I_{\mathcal{M}}$ e $\delta(O_{\mathcal{M}}) = O_{\mathcal{L}}$.

b) $\epsilon\left(\bigwedge_{i\in I} X_i\right) = \bigwedge_{i\in I} \epsilon\left(X_i\right)$ *para cada coleção* $X_i \in \mathcal{L}, i \in I$.

c) $\delta\left(\bigvee_{i\in I} Y_i\right) = \bigvee_{i\in I} \delta\left(Y_i\right)$ *para cada coleção* $Y_i \in \mathcal{M}, i \in I$.

d) $\epsilon\delta \geq id_{\mathcal{M}}$.

e) $\delta\epsilon \leq id_{\mathcal{L}}$.

f) $\epsilon\delta\epsilon = \epsilon$.

g) $\delta\epsilon\delta = \delta$.

h) $\epsilon(X) = \bigvee\{Y \in \mathcal{M}; \delta(Y) \leq X\}$.

i) $\delta(Y) = \bigwedge\{X \in \mathcal{L}; Y \leq \epsilon(X)\}$.

Reticulados completos

Demonstração

Sejam $\mathcal{L}$ e $\mathcal{M}$ reticulados completos, e (ϵ, δ) uma adjunção entre $\mathcal{L}$ e $\mathcal{M}$.

a) *Para mostrar que $\delta(O_{\mathcal{M}}) = O_{\mathcal{L}}$, considere $Y = O_{\mathcal{M}}$ e como $O_{\mathcal{M}} \leq \epsilon(X)$ vale para cada $X \in \mathcal{L}$, segue que $\delta(O_{\mathcal{M}}) \leq X$ também é valido para cada $X \in \mathcal{L}$, e portanto, $\delta(O_{\mathcal{M}}) = O_{\mathcal{L}}$. De modo semelhante mostra-se que $\epsilon(I_{\mathcal{L}}) = I_{\mathcal{M}}$.*

Reticulados completos

Demonstração

b) *Vamos mostrar que ϵ é uma erosão, ou seja, $\epsilon\left(\bigwedge_{i\in I} X_i\right) = \bigwedge_{i\in I}\epsilon(X_i)$, para cada coleção $X_i \in \mathcal{L}, i \in I$.*

Suponha $X_i \in \mathcal{L}$, para $i \in I$. Dado $Y \in \mathcal{M}$, temos que $\delta(Y) \leq \bigwedge_{i\in I} X_i$ se, e somente se, $\delta(Y) \leq X_i$, para cada $i \in I$. Isto, no entanto, é equivalente a $Y \leq \epsilon(X_i)$, para cada $i \in I$. De modo que $Y \leq \bigwedge_{i\in I}\epsilon(X_i)$. Por outro lado, pela relação de adjunção temos que

$$\delta(Y) \leq \bigwedge_{i\in I} X_i \iff Y \leq \epsilon\left(\bigwedge_{i\in I} X_i\right).$$

Mas isso implica que

$$\epsilon\left(\bigwedge_{i\in I} X_i\right) = \bigwedge_{i\in I}\epsilon(X_i).$$

c) *De modo análogo ao item b).*

Reticulados completos

Demonstração

b) *Vamos mostrar que ϵ é uma erosão, ou seja, $\epsilon\left(\bigwedge_{i\in I} X_i\right) = \bigwedge_{i\in I} \epsilon(X_i)$, para cada coleção $X_i \in \mathcal{L}, i \in I$.*
Suponha $X_i \in \mathcal{L}$, para $i \in I$. Dado $Y \in \mathcal{M}$, temos que $\delta(Y) \leq \bigwedge_{i\in I} X_i$ se, e somente se, $\delta(Y) \leq X_i$, para cada $i \in I$. Isto, no entanto, é equivalente a $Y \leq \epsilon(X_i)$, para cada $i \in I$. De modo que $Y \leq \bigwedge_{i\in I} \epsilon(X_i)$. Por outro lado, pela relação de adjunção temos que

$$\delta(Y) \leq \bigwedge_{i\in I} X_i \iff Y \leq \epsilon\left(\bigwedge_{i\in I} X_i\right).$$

Mas isso implica que

$$\epsilon\left(\bigwedge_{i\in I} X_i\right) = \bigwedge_{i\in I} \epsilon(X_i).$$

c) *De modo análogo ao item b).*

Reticulados completos

Demonstração

b) *Vamos mostrar que ϵ é uma erosão, ou seja, $\epsilon\left(\bigwedge_{i\in I} X_i\right) = \bigwedge_{i\in I}\epsilon\left(X_i\right)$, para cada coleção $X_i \in \mathcal{L}, i \in I$.*
Suponha $X_i \in \mathcal{L}$, para $i \in I$. Dado $Y \in \mathcal{M}$, temos que $\delta(Y) \leq \bigwedge_{i\in I} X_i$ se, e somente se, $\delta(Y) \leq X_i$, para cada $i \in I$. Isto, no entanto, é equivalente a $Y \leq \epsilon(X_i)$, para cada $i \in I$. De modo que $Y \leq \bigwedge_{i\in I}\epsilon(X_i)$. Por outro lado, pela relação de adjunção temos que

$$\delta(Y) \leq \bigwedge_{i\in I} X_i \iff Y \leq \epsilon\left(\bigwedge_{i\in I} X_i\right).$$

Mas isso implica que

$$\epsilon\left(\bigwedge_{i\in I} X_i\right) = \bigwedge_{i\in I}\epsilon\left(X_i\right).$$

c) *De modo análogo ao item b).*

Reticulados completos

Demonstração

b) *Vamos mostrar que ϵ é uma erosão, ou seja, $\epsilon\left(\bigwedge_{i\in I} X_i\right) = \bigwedge_{i\in I} \epsilon(X_i)$, para cada coleção $X_i \in \mathcal{L}, i \in I$.*
Suponha $X_i \in \mathcal{L}$, para $i \in I$. Dado $Y \in \mathcal{M}$, temos que $\delta(Y) \leq \bigwedge_{i\in I} X_i$ se, e somente se, $\delta(Y) \leq X_i$, para cada $i \in I$. Isto, no entanto, é equivalente a $Y \leq \epsilon(X_i)$, para cada $i \in I$. De modo que $Y \leq \bigwedge_{i\in I} \epsilon(X_i)$. Por outro lado, pela relação de adjunção temos que

$$\delta(Y) \leq \bigwedge_{i\in I} X_i \iff Y \leq \epsilon\left(\bigwedge_{i\in I} X_i\right).$$

Mas isso implica que

$$\epsilon\left(\bigwedge_{i\in I} X_i\right) = \bigwedge_{i\in I} \epsilon(X_i).$$

c) *De modo análogo ao item b).*

Reticulados completos

Demonstração

b) *Vamos mostrar que ϵ é uma erosão, ou seja, $\epsilon\left(\bigwedge_{i\in I} X_i\right) = \bigwedge_{i\in I} \epsilon\left(X_i\right)$, para cada coleção $X_i \in \mathcal{L}, i \in I$.*
Suponha $X_i \in \mathcal{L}$, para $i \in I$. Dado $Y \in \mathcal{M}$, temos que $\delta(Y) \leq \bigwedge_{i\in I} X_i$ se, e somente se, $\delta(Y) \leq X_i$, para cada $i \in I$. Isto, no entanto, é equivalente a $Y \leq \epsilon(X_i)$, para cada $i \in I$. De modo que $Y \leq \bigwedge_{i\in I} \epsilon(X_i)$. Por outro lado, pela relação de adjunção temos que

$$\delta(Y) \leq \bigwedge_{i\in I} X_i \iff Y \leq \epsilon\left(\bigwedge_{i\in I} X_i\right).$$

Mas isso implica que

$$\epsilon\left(\bigwedge_{i\in I} X_i\right) = \bigwedge_{i\in I} \epsilon\left(X_i\right).$$

c) *De modo análogo ao item b).*

Reticulados completos

Demonstração

Sejam $\mathcal{L}$ e $\mathcal{M}$ reticulados completos, e (ϵ, δ) uma adjunção entre $\mathcal{L}$ e $\mathcal{M}$.

d) *Se (ϵ, δ) é uma adjunção entre $\mathcal{L}$ e $\mathcal{M}$, então*

$$\delta(Y) \leq X \iff Y \leq \epsilon(X),$$

para cada $X \in \mathcal{L}$ e $Y \in \mathcal{M}$. Fazendo $X = \delta(Y)$ e substituindo na expressão acima, temos que $Y \leq \epsilon(\delta(Y))$, e portanto, $\epsilon\delta \geq id_{\mathcal{M}}$.

e) *Similarmente, se fizermos $Y = \epsilon(X)$.*

Reticulados completos

Demonstração

Sejam $\mathcal{L}$ e $\mathcal{M}$ reticulados completos, e (ϵ, δ) uma adjunção entre $\mathcal{L}$ e $\mathcal{M}$.

d) *Se (ϵ, δ) é uma adjunção entre $\mathcal{L}$ e $\mathcal{M}$, então*

$$\delta(Y) \leq X \iff Y \leq \epsilon(X),$$

para cada $X \in \mathcal{L}$ e $Y \in \mathcal{M}$. Fazendo $X = \delta(Y)$ e substituindo na expressão acima, temos que $Y \leq \epsilon(\delta(Y))$, e portanto, $\epsilon\delta \geq id_{\mathcal{M}}$.

e) *Similarmente, se fizermos $Y = \epsilon(X)$.*

Reticulados completos

Demonstração

Sejam $\mathcal{L}$ e $\mathcal{M}$ reticulados completos, e (ϵ, δ) uma adjunção entre $\mathcal{L}$ e $\mathcal{M}$.

f) *Como ϵ e δ são crescentes e as desigualdades do item d) e item e) são mantidas quando multiplicadas por ϵ, temos que*

$$(\epsilon\delta)\,\epsilon \geq \epsilon \quad \text{e} \quad \epsilon\,(\delta\epsilon) \leq \epsilon.$$

Dessa forma temos que $\epsilon = (id)\,\epsilon \leq (\epsilon\delta)\,\epsilon = \epsilon\,(\delta\epsilon) \leq \epsilon\,(id) = \epsilon$.

g) *De modo análogo ao item f).*

Reticulados completos

Demonstração

Sejam $\mathcal{L}$ e $\mathcal{M}$ reticulados completos, e (ϵ, δ) uma adjunção entre $\mathcal{L}$ e $\mathcal{M}$.

f) *Como ϵ e δ são crescentes e as desigualdades do item $d)$ e item $e)$ são mantidas quando multiplicadas por ϵ, temos que*

$$(\epsilon\delta)\,\epsilon \geq \epsilon \quad \text{e} \quad \epsilon\,(\delta\epsilon) \leq \epsilon.$$

Dessa forma temos que $\epsilon = (id)\,\epsilon \leq (\epsilon\delta)\,\epsilon = \epsilon\,(\delta\epsilon) \leq \epsilon\,(id) = \epsilon$.

g) *De modo análogo ao item $f)$.*

Reticulados completos

Demonstração

Sejam $\mathcal{L}$ e $\mathcal{M}$ reticulados completos, e (ϵ, δ) uma adjunção entre $\mathcal{L}$ e $\mathcal{M}$.

h) *Se (ϵ, δ) é uma adjunção entre $\mathcal{L}$ e $\mathcal{M}$, então*

$$\delta(Y) \leq X \iff Y \leq \epsilon(X),$$

para cada $X \in \mathcal{L}$ e $Y \in \mathcal{M}$. Dessa forma,

$$\epsilon(X) = \bigvee \{Y \in \mathcal{M}; Y \leq \epsilon(X)\} = \bigvee \{Y \in \mathcal{M}; \delta(Y) \leq X\}.$$

i) *De modo análogo ao item h).*

Referências I

Haralick, R. M., Sternberg, S. R., Zhuang, X.
Image Analysis using Mathematical Morphology
IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, Vol. PAMI-9, No. 4, July 1987, pp. 532-550.

Heijmans, H. J. A, M.
Mathematical Morphology: A Modern Approach in Image Processing Based on Algebra and Geometry
SIAM Review, Vol. 37, No. 1, March 1995, pp. 1-36.

Heijmans, H. J. A, M.
Morphologycal Image Operators
Academic Press, Boston, 1994.