Memórias Morfológicas Associativas de Projeções e Suas Composições.

Alex Santana dos Santos
Prof. Dr. Marcos Eduardo Ribeiro do Valle Mesquita
Tópicos de Biomatemática

Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP

21 de maio de 2015.

ESTRUTURA DA APRESENTAÇÃO

1. Propriedades da Álgebra minimax;
2. Memórias Associativas Morfológicas;
3. Memórias Morfológicas Autoassociativas de Projeções (PAMMs);
4. As composições das PAMMs;
5. Exemplos.

Memórias Assocaitvas

Uma Memória Associativa (AM) é um modelo inspirado na maneira com que o cérebro humano armazena e recorda informações por associacão.

Memórias Assocaitvas

Uma Memória Associativa (AM) é um modelo inspirado na maneira com que o cérebro humano armazena e recorda informações por associacão.

Definição Matemática

Seja $\mathcal{X} = \left\{x^1, \ldots x^k\right\}$ o conjunto de memórias fundamentais, onde $x^\xi \in \mathbb{R}^n$. Uma memória autoassociativa corresponde à uma aplicação $\mathcal{M}_{XX} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tal que

1. $\mathcal{M}_{XX}(x^\xi) \cong x^\xi$ *para todo* $\xi = 1, \ldots, k$;
2. $\mathcal{M}_{XX}(\widetilde{x}^\xi) \cong x^\xi$,
   onde $\widetilde{x}^\xi$ é uma padrão corrompida ou incompleto de x^ξ.

Álgebra Minimax

Dada a estrutura algébrica $(\mathbb{R}, \vee, \wedge, +)$, então definimos as seguintes operações no espaço das matrizes $\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$.

Álgebra Minimax

Dada a estrutura algébrica $(\mathbb{R}, \vee, \wedge, +)$, então definimos as seguintes operações no espaço das matrizes $\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$.

Sejam as matrizes $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$ pertencentes à $\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, então o máximo $A \vee B$ e mínimo $A \wedge B$ são definidos, respectivamente

$$C = A \vee B \Longleftrightarrow c_{ij} = a_{ij} \vee b_{ij}, \quad \forall i = 1, \ldots m \text{ e } j = 1 \ldots n; \tag{1}$$

$$D = A \wedge B \Longleftrightarrow d_{ij} = a_{ij} \wedge b_{ij}, \quad \forall i = 1, \ldots m \text{ e } j = 1 \ldots n; \tag{2}$$

Álgebra Minimax

Definição (Max-Produto e Min-Produto)

Sejam as matrizes $A \in \mathbb{R}^{m \times k}$ e $B \in \mathbb{R}^{k \times n}$.

1. *O max-produto de A por B é dado por*

$$C = A \boxtimes B \Longleftrightarrow c_{ij} = \bigvee_{\xi=1}^{k} (a_{i\xi} + b_{\xi j}), \quad \forall i = 1, \ldots m \text{ e } j = 1 \ldots n;$$

Álgebra Minimax

Definição (Max-Produto e Min-Produto)

Sejam as matrizes $A \in \mathbb{R}^{m \times k}$ *e* $B \in \mathbb{R}^{k \times n}$.

1. *O max-produto de A por B é dado por*

$$C = A \boxtimes B \Longleftrightarrow c_{ij} = \bigvee_{\xi=1}^{k} (a_{i\xi} + b_{\xi j}), \quad \forall i = 1, \ldots m \text{ e } j = 1 \ldots n; \quad (3)$$

2. *O min-produto de A por B é dado por*

$$D = A \boxed{\wedge} B \Longleftrightarrow d_{ij} = \bigwedge_{\xi=1}^{k} (a_{i\xi} + b_{\xi j}), \quad \forall i = 1, \ldots m \text{ e } j = 1 \ldots n; \quad (4)$$

Álgebra Minimax

Sejam as matrizes $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$ pertencentes à $\mathbb{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$.

$$A \leq B \iff a_{ij} \leq b_{ij}, \quad \forall i = 1, \ldots m \text{ e } j = 1 \ldots n; \tag{5}$$

Álgebra Minimax

Propriedades

Sejam as matrizes $A \in \mathbb{R}^{m\times k}$ e $B, C \in \mathbb{R}^{k\times n}$. Então,

Álgebra Minimax

Propriedades

Sejam as matrizes $A \in \mathbb{R}^{m\times k}$ e $B, C \in \mathbb{R}^{k\times n}$. Então,

(a) $A \boxed{\vee} (B \vee C) = (A \boxed{\vee} B) \vee (A \boxed{\vee} C)$;

Álgebra Minimax

Propriedades

Sejam as matrizes $A \in \mathbb{R}^{m \times k}$ e $B, C \in \mathbb{R}^{k \times n}$. Então,

(a) $A \boxtimes (B \vee C) = (A \boxtimes B) \vee (A \boxtimes C)$;

(b) $A \boxtimes (B \wedge C) \leq (A \boxtimes B) \wedge (A \boxtimes C)$;

Álgebra Minimax

Propriedades

Sejam as matrizes $A \in \mathbb{R}^{m \times k}$ e $B, C \in \mathbb{R}^{k \times n}$. Então,

(a) $A \boxdot_{\vee} (B \vee C) = (A \boxdot_{\vee} B) \vee (A \boxdot_{\vee} C)$;

(b) $A \boxdot_{\vee} (B \wedge C) \leq (A \boxdot_{\vee} B) \wedge (A \boxdot_{\vee} C)$;

(c) $A \boxdot_{\wedge} (B \wedge C) = (A \boxdot_{\wedge} B) \wedge (A \boxdot_{\wedge} C)$;

Álgebra Minimax

Propriedades

Sejam as matrizes $A \in \mathbb{R}^{m\times k}$ e $B, C \in \mathbb{R}^{k\times n}$. Então,

(a) $A \boxed{\vee} (B \vee C) = (A \boxed{\vee} B) \vee (A \boxed{\vee} C)$;

(b) $A \boxed{\vee} (B \wedge C) \leq (A \boxed{\vee} B) \wedge (A \boxed{\vee} C)$;

(c) $A \boxed{\wedge} (B \wedge C) = (A \boxed{\wedge} B) \wedge (A \boxed{\wedge} C)$;

(d) $A \boxed{\wedge} (B \vee C) \geq (A \boxed{\wedge} B) \vee (A \boxed{\wedge} C)$;

Álgebra Minimax

(e) $A \boxtimes (B + \alpha) = (A \boxtimes B) + \alpha; \quad \alpha \in \mathbb{R};$

Álgebra Minimax

(e) $A \boxed{\triangledown} (B + \alpha) = (A \boxed{\triangledown} B) + \alpha; \quad \alpha \in \mathbb{R};$

(f) $A \boxed{\vartriangle} (B + \alpha) = (A \boxed{\vartriangle} B) + \alpha; \quad \alpha \in \mathbb{R};$

Álgebra Minimax

(e) $A \boxvee (B + \alpha) = (A \boxvee B) + \alpha; \quad \alpha \in \mathbb{R};$

(f) $A \boxwedge (B + \alpha) = (A \boxwedge B) + \alpha; \quad \alpha \in \mathbb{R};$

onde $D = B + \alpha$ é a matriz resultante da adição do número real α em cada entrada da matriz B.

Álgebra Minimax

Definição (Matriz Conjugada)

A matriz conjugada de $A \in \mathbb{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ *é a matriz* $A^* \in \mathbb{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$ *tal que suas entradas satisfazem*

$$a^*_{ij} = -a_{ji} \quad \forall i = 1, \ldots, m \text{ e } j = 1, \ldots, n.$$

Álgebra Minimax

Definição (Matriz Conjugada)

A matriz conjugada de $A \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ *é a matriz* $A^* \in \mathbb{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ *tal que suas entradas satisfazem*

$$a^*_{ij} = -a_{ji} \quad \forall i = 1,\ldots,m \text{ e } j = 1,\ldots,n.$$

Propriedade (Dualidade das Operações)

Sejam as $A \in \mathbb{R}^{m\times k}$, $B \in \mathbb{R}^{k\times n}$ *e* $C \in \mathbb{R}^{n\times m}$, *então*

Álgebra Minimax

Definição (Matriz Conjugada)

A matriz conjugada de $A \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ *é a matriz* $A^* \in \mathbb{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ *tal que suas entradas satisfazem*

$$a^*_{ij} = -a_{ji} \quad \forall i = 1, \ldots, m \text{ e } j = 1, \ldots, n.$$

Propriedade (Dualidade das Operações)

Sejam as $A \in \mathbb{R}^{m\times k}$, $B \in \mathbb{R}^{k\times n}$ *e* $C \in \mathbb{R}^{n\times m}$, *então*

1. $A \wedge B = (A^* \vee B^*)^*$;

Álgebra Minimax

Definição (Matriz Conjugada)

A matriz conjugada de $A \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ *é a matriz* $A^* \in \mathbb{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ *tal que suas entradas satisfazem*

$$a^*_{ij} = -a_{ji} \quad \forall i = 1, \ldots, m \text{ e } j = 1, \ldots, n.$$

Propriedade (Dualidade das Operações)

Sejam as $A \in \mathbb{R}^{m\times k}$, $B \in \mathbb{R}^{k\times n}$ *e* $C \in \mathbb{R}^{n\times m}$, *então*

1. $A \wedge B = (A^* \vee B^*)^*$;
2. $A \boxed{\wedge} B = (B^* \boxed{\vee} A^*)^*$;

Álgebra Minimax

Definição (Matriz Conjugada)

A matriz conjugada de $A \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ *é a matriz* $A^* \in \mathbb{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ *tal que suas entradas satisfazem*

$$a^*_{ij} = -a_{ji} \quad \forall i = 1, \dots, m \text{ e } j = 1, \dots, n.$$

Propriedade (Dualidade das Operações)

Sejam as $A \in \mathbb{R}^{m\times k}$, $B \in \mathbb{R}^{k\times n}$ *e* $C \in \mathbb{R}^{n\times m}$, *então*

1. $A \wedge B = (A^* \vee B^*)^*$;
2. $A \boxed{\wedge} B = (B^* \boxed{\vee} A^*)^*$;
3. $A \boxed{\vee} B \leq C \iff B \leq A^* \boxed{\wedge} C \iff A \leq C \boxed{\wedge} B^*$;

Álgebra Minimax

Definição (Combinação Max-Plus)

Seja $\mathcal{X} = \{x^1, x^2, \ldots, x^k\} \subset \mathbb{R}^n$*. Uma combinação max-plus dos vetores de* $\mathcal{X}$ *é algum* $y \in \mathbb{R}^n$ *da forma*

$$y = \bigvee_{\xi=1}^{k} (x^{\xi} + \alpha_{\xi}), \quad \alpha_{\xi} \in \mathbb{R}.$$

Definição (Combinação Max-Plus)

Seja $\mathcal{X} = \{x^1, x^2, \ldots, x^k\} \subset \mathbb{R}^n$*. Uma combinação max-plus dos vetores de* $\mathcal{X}$ *é algum* $y \in \mathbb{R}^n$ *da forma*

$$y = \bigvee_{\xi=1}^{k} (x^\xi + \alpha_\xi), \quad \alpha_\xi \in \mathbb{R}. \tag{6}$$

O conjunto de todas as combinações max-plus dos vetores de $\mathcal{X}$ denotaremos por

$$\Psi(\mathcal{X}) = \left\{ y \in \mathbb{R}^n : y = \bigvee_{\xi=1}^{k} (x^\xi + \alpha_\xi), \ \alpha_\xi \in \mathbb{R} \right\}$$

Álgebra Minimax

Definição (Combinação Min-Plus)

Seja $\mathcal{X} = \{x^1, x^2, \ldots, x^k\} \subset \mathbb{R}^n$*. Uma combinação min-plus dos vetores de* $\mathcal{X}$ *é algum* $y \in \mathbb{R}^n$ *da forma*

$$y = \bigwedge_{\xi=1}^{k} (x^\xi + \theta_\xi), \quad \theta_\xi \in \mathbb{R}.$$

Álgebra Minimax

Definição (Combinação Min-Plus)

Seja $\mathcal{X} = \{x^1, x^2, \ldots, x^k\} \subset \mathbb{R}^n$. *Uma combinação min-plus dos vetores de* $\mathcal{X}$ *é algum* $y \in \mathbb{R}^n$ *da forma*

$$y = \bigwedge_{\xi=1}^{k} (x^\xi + \theta_\xi), \quad \theta_\xi \in \mathbb{R}. \tag{7}$$

O conjunto de todas as combinações min-plus de vetores de $\mathcal{X}$ será denotado por

$$\Theta(\mathcal{X}) = \left\{ y \in \mathbb{R}^n : y = \bigwedge_{\xi=1}^{k} (x^\xi + \theta_\xi),\ \theta_\xi \in \mathbb{R} \right\}$$

Álgebra Minimax

Definição (Combinação minimax)

Seja $\mathcal{X} = \{x^1, x^2, \ldots, x^k\} \subset \mathbb{R}^n$. *Uma combinação minimax dos vetores de* $\mathcal{X}$ *é algum* $z \in \mathbb{R}^n$ *da forma*

$$z = \bigwedge_{j=1}^{n} \bigvee_{\xi=1}^{k} (x^\xi + a_j^\xi), \quad a_j^\xi \in \mathbb{R}.$$

Álgebra Minimax

Definição (Combinação minimax)

Seja $\mathcal{X} = \{x^1, x^2, \ldots, x^k\} \subset \mathbb{R}^n$*. Uma combinação minimax dos vetores de* $\mathcal{X}$ *é algum* $z \in \mathbb{R}^n$ *da forma*

$$z = \bigwedge_{j=1}^{n} \bigvee_{\xi=1}^{k} (x^\xi + a_j^\xi), \quad a_j^\xi \in \mathbb{R}. \tag{8}$$

O conjunto de todas combinações minimax de vetores de $\mathcal{X}$ é dado por

$$\Omega(\mathcal{X}) = \left\{ z \in \mathbb{R}^n : z = \bigwedge_{j=1}^{n} \bigvee_{\xi=1}^{k} (x^\xi + a_j^\xi), \quad a_j^\xi \in \mathbb{R} \right\}.$$

Álgebra Minimax

Definição (Combinação maxmin)

Seja $\mathcal{X} = \{x^1, x^2, \ldots, x^k\} \subset \mathbb{R}^n$*. Uma combinação maxmin dos vetores de* $\mathcal{X}$ *é algum* $z \in \mathbb{R}^n$ *da forma*

$$z = \bigvee_{j=1}^{n} \bigwedge_{\xi=1}^{k} (x^\xi + b_j^\xi), \quad b_j^\xi \in \mathbb{R}.$$

Álgebra Minimax

Definição (Combinação maxmin)

Seja $\mathcal{X} = \{x^1, x^2, \ldots, x^k\} \subset \mathbb{R}^n$. Uma combinação maxmin dos vetores de $\mathcal{X}$ é algum $z \in \mathbb{R}^n$ da forma

$$z = \bigvee_{j=1}^{n} \bigwedge_{\xi=1}^{k} (x^\xi + b_j^\xi), \quad b_j^\xi \in \mathbb{R}. \tag{9}$$

O conjunto de todas combinações maxmin de vetores de $\mathcal{X}$ é dado por

$$\Phi(\mathcal{X}) = \left\{ z \in \mathbb{R}^n : z = \bigvee_{j=1}^{n} \bigwedge_{\xi=1}^{k} (x^\xi + b_j^\xi), \;\; b_j^\xi \in \mathbb{R} \right\}.$$

Álgebra Minimax

São válidas as seguintes inclusões:

1. $\mathcal{X} \subseteq \Psi(\mathcal{X}) \subseteq \Omega(\mathcal{X})$;
2. $\mathcal{X} \subseteq \Theta(\mathcal{X}) \subseteq \Phi(\mathcal{X})$;

- G. X. Ritter, P. Sussner, and J. L. D. de Leon, Morphological associative memories, IEEE Trans. on Neural Networks, vol. 9, no. 2, pp. 281 – 293, Mar. 1998.

Memórias Morfológicas Autoassociativas (AMMs)

- G. X. Ritter, P. Sussner, and J. L. D. de Leon, Morphological associative memories, IEEE Trans. on Neural Networks, vol. 9, no. 2, pp. 281 – 293, Mar. 1998.

Formulação Matemática

Dado um conjunto de memórias fundamentais, $\left\{x^\xi : \xi = 1, \ldots, k\right\}$, onde $x^\xi \in \mathbb{R}^n$, a AMM é aplicação $\mathcal{M}_{XX} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ dada por

$$\mathcal{M}_{XX}(x) = M_{XX} \boxtimes x \tag{10}$$

para alguma matriz $M_{XX} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e denominada de matriz dos pesos sinápticos.

Formulação Matemática

Dado um conjunto de memórias fundamentais, $\left\{x^{\xi} : \xi = 1, \ldots, k\right\}$, onde $x^{\xi} \in \mathbb{R}^n$, a AMM é aplicação $\mathcal{M}_{XX} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ dada por

$$\mathcal{M}_{XX}(x) = M_{XX} \boxed{\wedge} x \tag{10}$$

para alguma matriz $M_{XX} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e denominada de matriz dos pesos sinápticos.

A AMM dual de $\mathcal{M}_{XX}$ é corresponde à uma aplicação $\mathcal{W}_{XX} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ dada por

$$\mathcal{W}_{XX}(x) = W_{XX} \boxed{\vee} x \tag{11}$$

para alguma matriz $W_{XX} \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Memórias Associativas Morfológicas (AMMs)

A matriz dos pesos sinápticos $M_{XX} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é a solução do seguinte problema:

Memórias Associativas Morfológicas (AMMs)

A matriz dos pesos sinápticos $M_{XX} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é a solução do seguinte problema:

Dado um conjunto de memórias fundamentais, $\mathcal{X} = \{x^\xi : \xi = 1, \ldots, k\}$, a matriz M_{XX} satisfaz

$$M_{XX} = \bigwedge \left\{ A \in \mathbb{R}^{n \times n} : A \boxtimes x^\xi \geq x^\xi, \forall \xi = 1, \ldots, k \right\} \tag{12}$$

A matriz W_{XX} satisfaz

$$W_{XX} = \bigvee \left\{ A \in \mathbb{R}^{n \times n} : A \boxtimes x^\xi \leq x^\xi, \forall \xi = 1, \ldots, k \right\} \tag{13}$$

As soluções de (12) e (13) são obitidas usando a versão minimax do armazenamento por correlação, isto é

Memórias Associativas Morfológicas (AMMs)

As soluções de (12) e (13) são obitidas usando a versão minimax do armazenamento por correlação, isto é

$$M_{XX} = X \boxed{\vee} X^* \text{ e } W_{XX} = X \boxed{\wedge} X^*. \tag{14}$$

As colunas da matriz X são os vetores do conjunto das memórias fundamentais.

As soluções de (12) e (13) são obitidas usando a versão minimax do armazenamento por correlação, isto é

$$M_{XX} = X \,\boxed{\vee}\, X^* \text{ e } W_{XX} = X \,\boxed{\wedge}\, X^*. \tag{14}$$

As colunas da matriz X são os vetores do conjunto das memórias fundamentais.

Memórias Morfológicas Autoassociativas

As características das memórias morfológicas autoassociativas são:

Memórias Morfológicas Autoassociativas

As características das memórias morfológicas autoassociativas são:

- Capacidade de armazenamento ilimitado;

Memórias Morfológicas Autoassociativas

As características das memórias morfológicas autoassociativas são:

- Capacidade de armazenamento ilimitado;
- Convergência em um único passo;

Memórias Morfológicas Autoassociativas

As características das memórias morfológicas autoassociativas são:

- Capacidade de armazenamento ilimitado;
- Convergência em um único passo;
- As diagonais principais das matrizes M_{XX} e W_{XX} são nulas, isto é, $m_{ii} = 0$ e $w_{ii} = 0, \quad \forall i = 1, \ldots, n$;

Memórias Morfológicas Autoassociativas

As características das memórias morfológicas autoassociativas são:

- Capacidade de armazenamento ilimitado;
- Convergência em um único passo;
- As diagonais principais das matrizes M_{XX} e W_{XX} são nulas, isto é, $m_{ii} = 0$ e $w_{ii} = 0, \quad \forall i = 1, \ldots, n$;
- A memória morfológica autoassociativa $\mathcal{W}_{XX}$ é robusta aos padrões de entradas que são ruídos erosivos dos vetores do conjunto das memórias fundamentais;

Memórias Morfológicas Autoassociativas

As características das memórias morfológicas autoassociativas são:

- Capacidade de armazenamento ilimitado;
- Convergência em um único passo;
- As diagonais principais das matrizes M_{XX} e W_{XX} são nulas, isto é, $m_{ii} = 0$ e $w_{ii} = 0, \quad \forall i = 1, \ldots, n$;
- A memória morfológica autoassociativa $\mathcal{W}_{XX}$ é robusta aos padrões de entradas que são ruídos erosivos dos vetores do conjunto das memórias fundamentais;
- $\mathcal{M}_{XX}$ é robusta para padrões que são distorções devido a mudança dilativa dos vetores do conjunto das memórias fundamentais.

Memórias Morfológicas Autoassociativas

As características das memórias morfológicas autoassociativas são:

- Capacidade de armazenamento ilimitado;
- Convergência em um único passo;
- As diagonais principais das matrizes M_{XX} e W_{XX} são nulas, isto é, $m_{ii} = 0$ e $w_{ii} = 0, \quad \forall i = 1, \ldots, n$;
- A memória morfológica autoassociativa $\mathcal{W}_{XX}$ é robusta aos padrões de entradas que são ruídos erosivos dos vetores do conjunto das memórias fundamentais;
- $\mathcal{M}_{XX}$ é robusta para padrões que são distorções devido a mudança dilativa dos vetores do conjunto das memórias fundamentais.

Memórias Morfológicas Autoassociativas

- P. Sussner, **Fixed points of autoassociative morphological memories**,in Proc. Int. Joint Conf. Neural Networks, Como, Italy, Jul. 2000, pp. 611 – 616.

Memórias Morfológicas Autoassociativas

- P. Sussner, **Fixed points of autoassociative morphological memories**,in Proc. Int. Joint Conf. Neural Networks, Como, Italy, Jul. 2000, pp. 611 – 616.

- Um vetor $x \in \mathbb{R}^n$ é um ponto fixo da memória associativa $\mathcal{M}_{XX}$, se $\mathcal{M}_{XX}(x) = x$.

Memórias Morfológicas Autoassociativas

- P. Sussner, **Fixed points of autoassociative morphological memories**,in Proc. Int. Joint Conf. Neural Networks, Como, Italy, Jul. 2000, pp. 611 – 616.

- Um vetor $x \in \mathbb{R}^n$ é um ponto fixo da memória associativa $\mathcal{M}_{XX}$, se $\mathcal{M}_{XX}(x) = x$.
- Um ponto fixo que não pertence ao conjunto de memórias fundamentais é chamado de memória espúria.

Memórias Morfológicas Autoassociativas

Teorema 1

Sejam x *e* y *pontos fixos da aplicação* $\mathcal{M}_{XX}$ *e* $\alpha \in \mathbb{R}$, *então* $x \vee y$, $x \wedge y$ *e* $x + \alpha$ *são pontos fixos de* $\mathcal{M}_{XX}$.

Memórias Morfológicas Autoassociativas

Teorema 1

Sejam x *e* y *pontos fixos da aplicação* $\mathcal{M}_{XX}$ *e* $\alpha \in \mathbb{R}$, *então* $x \vee y$, $x \wedge y$ *e* $x + \alpha$ *são pontos fixos de* $\mathcal{M}_{XX}$.

Demonstração

Suponha que x *e* y *são pontos fixos da aplicação* $\mathcal{M}_{XX}$, *isto é,*

Teorema 1

Sejam x e y pontos fixos da aplicação $\mathcal{M}_{XX}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então $x \vee y$, $x \wedge y$ e $x + \alpha$ são pontos fixos de $\mathcal{M}_{XX}$.

Demonstração

Suponha que x e y são pontos fixos da aplicação $\mathcal{M}_{XX}$, isto é,

1. $\mathcal{M}_{XX}(x) = M_{XX} \boxtimes x = x$;

Memórias Morfológicas Autoassociativas

Teorema 1

Sejam x e y pontos fixos da aplicação $\mathcal{M}_{XX}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então $x \vee y$, $x \wedge y$ e $x + \alpha$ são pontos fixos de $\mathcal{M}_{XX}$.

Demonstração

Suponha que x e y são pontos fixos da aplicação $\mathcal{M}_{XX}$, isto é,

1. $\mathcal{M}_{XX}(x) = M_{XX} \boxed{\triangle}\, x = x$;
2. $\mathcal{M}_{XX}(y) = M_{XX} \boxed{\triangle}\, y = y$.

Memórias Morfológicas Autoassociativas

Teorema 1

Sejam x e y pontos fixos da aplicação $\mathcal{M}_{XX}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então $x \vee y$, $x \wedge y$ e $x + \alpha$ são pontos fixos de $\mathcal{M}_{XX}$.

Demonstração

Suponha que x e y são pontos fixos da aplicação $\mathcal{M}_{XX}$, isto é,

1. $\mathcal{M}_{XX}(x) = M_{XX} \boxwedge x = x$;
2. $\mathcal{M}_{XX}(y) = M_{XX} \boxwedge y = y$.

Assim,

$$\mathcal{M}_{XX}(x \wedge y) = M_{XX} \boxwedge (x \wedge y)$$

Teorema 1

Sejam x e y pontos fixos da aplicação $\mathcal{M}_{XX}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então $x \vee y$, $x \wedge y$ e $x + \alpha$ são pontos fixos de $\mathcal{M}_{XX}$.

Demonstração

Suponha que x e y são pontos fixos da aplicação $\mathcal{M}_{XX}$, isto é,

1. $\mathcal{M}_{XX}(x) = M_{XX} \boxed{\wedge}\, x = x$;
2. $\mathcal{M}_{XX}(y) = M_{XX} \boxed{\wedge}\, y = y$.

Assim,

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{XX}(x \wedge y) &= M_{XX} \boxed{\wedge}\, (x \wedge y) \\ &= (M_{XX} \boxed{\wedge}\, x) \wedge (M_{XX} \boxed{\wedge}\, y) \end{aligned}$$

Memórias Morfológicas Autoassociativas

Teorema 1

Sejam x e y pontos fixos da aplicação $\mathcal{M}_{XX}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então $x \vee y$, $x \wedge y$ e $x + \alpha$ são pontos fixos de $\mathcal{M}_{XX}$.

Demonstração

Suponha que x e y são pontos fixos da aplicação $\mathcal{M}_{XX}$, isto é,

1. $\mathcal{M}_{XX}(x) = M_{XX} \boxed{\wedge} x = x$;
2. $\mathcal{M}_{XX}(y) = M_{XX} \boxed{\wedge} y = y$.

Assim,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M}_{XX}(x \wedge y) &= M_{XX} \boxed{\wedge} (x \wedge y) \\
&= (M_{XX} \boxed{\wedge} x) \wedge (M_{XX} \boxed{\wedge} y) \\
&= x \wedge y.
\end{aligned}
$$

Demonstração

Além disso,

$$\mathcal{M}_{XX}(x \vee y) \quad = \quad M_{XX} \boxed{\triangle} (x \vee y)$$

Demonstração

Além disso,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M}_{XX}(x \vee y) &= M_{XX} \boxwedge (x \vee y) \\
&\geq (M_{XX} \boxwedge x) \wedge (M_{XX} \boxwedge y)
\end{aligned}
$$

Demonstração

Além disso,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M}_{XX}(x \vee y) &= M_{XX} \mathbin{\boxed{\wedge}} (x \vee y) \\
&\geq (M_{XX} \mathbin{\boxed{\wedge}} x) \wedge (M_{XX} \mathbin{\boxed{\wedge}} y) \\
&= x \vee y
\end{aligned}
$$

Memórias Morfológicas Autoassociativas

Demonstração

Além disso,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M}_{XX}(x \vee y) &= M_{XX} \boxed{\wedge} (x \vee y) \\
&\geq (M_{XX} \boxed{\wedge} x) \wedge (M_{XX} \boxed{\wedge} y) \\
&= x \vee y. \qquad (15)
\end{aligned}
$$

Por outro lado, $\forall i = 1, \ldots, n$ *temos*

Demonstração

Além disso,

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{XX}(x \vee y) &= M_{XX} \boxwedge (x \vee y) \\ &\geq (M_{XX} \boxwedge x) \wedge (M_{XX} \boxwedge y) \\ &= x \vee y. \end{aligned} \tag{15}$$

Por outro lado, $\forall i = 1, \ldots, n$ *temos*

$$(\mathcal{M}_{XX}(x \vee y))_i = (M_{XX} \boxwedge (x \vee y))_i$$

Memórias Morfológicas Autoassociativas

Demonstração

Além disso,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M}_{XX}(x \vee y) &= M_{XX} \boxwedge (x \vee y) \\
&\geq (M_{XX} \boxwedge x) \wedge (M_{XX} \boxwedge y) \\
&= x \vee y. && (15)
\end{aligned}
$$

Por outro lado, $\forall i = 1, \ldots, n$ *temos*

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{M}_{XX}(x \vee y))_i &= (M_{XX} \boxwedge (x \vee y))_i \\
&= \bigwedge_{j=1}^{n} (m_{ij} + (x \vee y)_j)
\end{aligned}
$$

Memórias Morfológicas Autoassociativas

Demonstração

Além disso,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M}_{XX}(x \vee y) &= M_{XX} \boxwedge (x \vee y) \\
&\geq (M_{XX} \boxwedge x) \wedge (M_{XX} \boxwedge y) \\
&= x \vee y. \qquad (15)
\end{aligned}
$$

Por outro lado, $\forall i = 1, \ldots, n$ *temos*

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{M}_{XX}(x \vee y))_i &= (M_{XX} \boxwedge (x \vee y))_i \\
&= \bigwedge_{j=1}^{n} (m_{ij} + (x \vee y)_j) \\
&\leq m_{ii} + (x \vee y)_i
\end{aligned}
$$

Demonstração

Além disso,

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{XX}(x \vee y) &= M_{XX} \boxtimes (x \vee y) \\ &\geq (M_{XX} \boxtimes x) \wedge (M_{XX} \boxtimes y) \\ &= x \vee y. \end{aligned} \tag{15}$$

Por outro lado, $\forall i = 1, \ldots, n$ *temos*

$$\begin{aligned}(\mathcal{M}_{XX}(x \vee y))_i &= (M_{XX} \boxtimes (x \vee y))_i \\ &= \bigwedge_{j=1}^{n} (m_{ij} + (x \vee y)_j) \\ &\leq m_{ii} + (x \vee y)_i \\ &= (x \vee y)_i \end{aligned}$$

Demonstração

Além disso,

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{XX}(x \vee y) &= M_{XX} \boxtimes (x \vee y) \\ &\geq (M_{XX} \boxtimes x) \wedge (M_{XX} \boxtimes y) \\ &= x \vee y. \qquad (15)\end{aligned}$$

Por outro lado, $\forall i = 1, \ldots, n$ *temos*

$$\begin{aligned}(\mathcal{M}_{XX}(x \vee y))_i &= (M_{XX} \boxtimes (x \vee y))_i \\ &= \bigwedge_{j=1}^{n} (m_{ij} + (x \vee y)_j) \\ &\leq m_{ii} + (x \vee y)_i \\ &= (x \vee y)_i \qquad (16)\end{aligned}$$

Demonstração

Daí, $\mathcal{M}_{XX}(x \vee y) = M_{XX} \mathbin{\boxed{\wedge}} (x \vee y) \leq x \vee y.$

Demonstração

Daí, $\mathcal{M}_{XX}(x \vee y) = M_{XX} \boxed{\wedge} (x \vee y) \leq x \vee y$.
Logo, pelas desigualdades (15) e (16), segue que

Memórias Morfológicas Autoassociativas

Demonstração

Daí, $\mathcal{M}_{XX}(x \vee y) = M_{XX} \boxed{\wedge} (x \vee y) \leq x \vee y$.
Logo, pelas desigualdades (15) e (16), segue que

$$\mathcal{M}_{XX}(x \vee y) = M_{XX} \boxed{\wedge} (x \vee y) = x \vee y$$

Demonstração

Daí, $\mathcal{M}_{XX}(x \vee y) = M_{XX} \boxwedge (x \vee y) \leq x \vee y$.
Logo, pelas desigualdades (15) e (16), segue que

$$\mathcal{M}_{XX}(x \vee y) = M_{XX} \boxwedge (x \vee y) = x \vee y$$

Por fim, aplicando a propriedade da álgebra minimax, obtemos

Memórias Morfológicas Autoassociativas

Demonstração

Daí, $\mathcal{M}_{XX}(x \vee y) = M_{XX} \boxed{\wedge} (x \vee y) \leq x \vee y$.
Logo, pelas desigualdades (15) e (16), segue que

$$\mathcal{M}_{XX}(x \vee y) = M_{XX} \boxed{\wedge} (x \vee y) = x \vee y$$

Por fim, aplicando a propriedade da álgebra minimax, obtemos

$$\mathcal{M}_{XX}(x + \alpha) \quad = \quad M_{XX} \boxed{\wedge} (x + \alpha)$$

Memórias Morfológicas Autoassociativas

Demonstração

Daí, $\mathcal{M}_{XX}(x \vee y) = M_{XX} \boxtimes (x \vee y) \leq x \vee y$.
Logo, pelas desigualdades (15) e (16), segue que

$$\mathcal{M}_{XX}(x \vee y) = M_{XX} \boxtimes (x \vee y) = x \vee y$$

Por fim, aplicando a propriedade da álgebra minimax, obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{XX}(x + \alpha) &= M_{XX} \boxtimes (x + \alpha) \\ &= (M_{XX} \boxtimes x) + \alpha = x + \alpha \end{aligned}$$

Memórias Morfológicas Autoassociativas

Demonstração

Daí, $\mathcal{M}_{XX}(x \vee y) = M_{XX} \boxtimes (x \vee y) \leq x \vee y$.
Logo, pelas desigualdades (15) e (16), segue que

$$\mathcal{M}_{XX}(x \vee y) = M_{XX} \boxtimes (x \vee y) = x \vee y$$

Por fim, aplicando a propriedade da álgebra minimax, obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{XX}(x + \alpha) &= M_{XX} \boxtimes (x + \alpha) \\ &= (M_{XX} \boxtimes x) + \alpha = x + \alpha \end{aligned}$$

Memórias Morfológicas Autoassociativas

Teorema 2

Seja $\mathcal{X} = \left\{x^{\xi} : \xi = 1, \ldots, k\right\}$ *um conjunto de memórias fundamentais. A aplicação* $\mathcal{M}_{XX} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *satisfaz*

$$\mathcal{M}_{XX}(x) = \bigvee \{z \in \Omega(\mathcal{X}) : z \leq x\}. \tag{17}$$

onde $\Omega(\mathcal{X})$ *é o conjunto de todas combinações minimax do conjunto* $\mathcal{X}$*. A aplicação* $\mathcal{W}_{XX} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *satisfaz*

$$\mathcal{W}_{XX}(x) = \bigwedge \{z \in \Phi(\mathcal{X}) : z \geq x\}. \tag{18}$$

onde $\Phi(\mathcal{X})$ *é o conjunto de todas combinações maxmin do conjunto* $\mathcal{X}$*.*

Memórias Morfológicas Autoassociativas

- P. Sussner and M. E. Valle, **Grayscale Morphological Associative Memories**, IEEE Transactions on Neural Networks, vol. 17, no. 3,pp. 559 – 570, May 2006.
    - Provaram que o conjunto dos pontos fixos das aplicações $\mathcal{M}_{XX}$ e $\mathcal{W}_{XX}$ são iguais.

Memórias Morfológicas Autoassociativas

As característcas das memórias morfológicas autoassociativas são:

Memórias Morfológicas Autoassociativas

As característcas das memórias morfológicas autoassociativas são:

- Capacidade de armazenamento ilimitado;

Memórias Morfológicas Autoassociativas

As característcas das memórias morfológicas autoassociativas são:

- Capacidade de armazenamento ilimitado;
- Convergência em um único passo;

Memórias Morfológicas Autoassociativas

As característcas das memórias morfológicas autoassociativas são:

- Capacidade de armazenamento ilimitado;
- Convergência em um único passo;
- As diagonais principais das matrizes M_{XX} e W_{XX}, isto é, $m_{ii} = 0$ e $w_{ii} = 0, \ \forall i = 1, \ldots, n$;

Memórias Morfológicas Autoassociativas

As característcas das memórias morfológicas autoassociativas são:

- Capacidade de armazenamento ilimitado;
- Convergência em um único passo;
- As diagonais principais das matrizes M_{XX} e W_{XX}, isto é, $m_{ii} = 0$ e $w_{ii} = 0, \ \forall i = 1, \ldots, n$;
- A memória autoassociativa morfológica $\mathcal{W}_{XX}$ é robusta para padrões que são distorções devido a mudança erosiva;

Memórias Morfológicas Autoassociativas

As característcas das memórias morfológicas autoassociativas são:

- Capacidade de armazenamento ilimitado;
- Convergência em um único passo;
- As diagonais principais das matrizes M_{XX} e W_{XX}, isto é, $m_{ii} = 0$ e $w_{ii} = 0, \ \forall i = 1, \ldots, n$;
- A memória autoassociativa morfológica $\mathcal{W}_{XX}$ é robusta para padrões que são distorções devido a mudança erosiva;
- $\mathcal{M}_{XX}$ é robusta para padrões que são distorções devido a mudança dilativa;

Memórias Morfológicas Autoassociativas

As característcas das memórias morfológicas autoassociativas são:

- Capacidade de armazenamento ilimitado;
- Convergência em um único passo;
- As diagonais principais das matrizes M_{XX} e W_{XX}, isto é, $m_{ii} = 0$ e $w_{ii} = 0, \ \forall i = 1, \ldots, n$;
- A memória autoassociativa morfológica $\mathcal{W}_{XX}$ é robusta para padrões que são distorções devido a mudança erosiva;
- $\mathcal{M}_{XX}$ é robusta para padrões que são distorções devido a mudança dilativa;
- A aplicação $\mathcal{M}_{XX}$ projeta o vetor x (entrada) no conjunto $\Omega(\mathcal{X})$. Analogamente, a aplicação $\mathcal{W}_{XX}$ projeta o vetor $x \in \mathbb{R}^n$ (entrada) no conjunto $\Psi(\mathcal{X})$;

Memórias Morfológicas Autoassociativas

As característcas das memórias morfológicas autoassociativas são:

- Capacidade de armazenamento ilimitado;
- Convergência em um único passo;
- As diagonais principais das matrizes M_{XX} e W_{XX}, isto é, $m_{ii} = 0$ e $w_{ii} = 0, \; \forall i = 1, \ldots, n$;
- A memória autoassociativa morfológica $\mathcal{W}_{XX}$ é robusta para padrões que são distorções devido a mudança erosiva;
- $\mathcal{M}_{XX}$ é robusta para padrões que são distorções devido a mudança dilativa;
- A aplicação $\mathcal{M}_{XX}$ projeta o vetor x (entrada) no conjunto $\Omega(\mathcal{X})$. Analogamente, a aplicação $\mathcal{W}_{XX}$ projeta o vetor $x \in \mathbb{R}^n$ (entrada) no conjunto $\Psi(\mathcal{X})$;
- As memórias morfológicas $\mathcal{M}_{XX}$ e $\mathcal{W}_{XX}$ têm uma quantidade enorme de memórias espúrias;

Memórias Morfológicas Autoassociativas

As característcas das memórias morfológicas autoassociativas são:

- Capacidade de armazenamento ilimitado;
- Convergência em um único passo;
- As diagonais principais das matrizes M_{XX} e W_{XX}, isto é, $m_{ii} = 0$ e $w_{ii} = 0, \ \forall i = 1, \ldots, n$;
- A memória autoassociativa morfológica $\mathcal{W}_{XX}$ é robusta para padrões que são distorções devido a mudança erosiva;
- $\mathcal{M}_{XX}$ é robusta para padrões que são distorções devido a mudança dilativa;
- A aplicação $\mathcal{M}_{XX}$ projeta o vetor x (entrada) no conjunto $\Omega(\mathcal{X})$. Analogamente, a aplicação $\mathcal{W}_{XX}$ projeta o vetor $x \in \mathbb{R}^n$ (entrada) no conjunto $\Psi(\mathcal{X})$;
- As memórias morfológicas $\mathcal{M}_{XX}$ e $\mathcal{W}_{XX}$ têm uma quantidade enorme de memórias espúrias;
- Os conjuntos dos pontos fixos $\mathcal{M}_{XX}$ e $\mathcal{W}_{XX}$ são iguais.

Exemplo 1

Considerem $\mathcal{M} = \left\{ x^1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 7 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}, x^2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, x^3 = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 4 \\ 8 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$ *o conjunto de mémorias fundamentais e* $x = [10\ 0\ 7\ 4\ 2]^T$ *um padrão de entrada, o qual é uma versão corrompida de* x^1 *por um ruído misto (ruído dilativo e erosivo), pois* $x = x^1 + [8\ 0\ 0\ 0\ \ -1]^T$.
As matrizes dos pesos sinápticos são dadas por

$$M_{XX} = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 2 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 5 & 4 & 3 \\ 5 & 7 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & 7 & 4 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } W_{XX} = \begin{bmatrix} 0 & -4 & -5 & -2 & -1 \\ -5 & 0 & -7 & -7 & -3 \\ -2 & -5 & 0 & -4 & -2 \\ 0 & -4 & -3 & 0 & -1 \\ -2 & -3 & -4 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

Exemplo 1

Assim,

$$\mathcal{M}_{XX}(x) = M_{XX} \,\square\, x = [4 \ 0 \ 6 \ 4 \ 2]^T \neq x^1. \tag{19}$$

$$\mathcal{W}_{XX}(x) = W_{XX} \,\square\, x = [10 \ 5 \ 8 \ 10 \ 8]^T \neq x^1. \tag{20}$$

Seja $x = [4 \ 6 \ 3 \ 3 \ 4]^T$ *uma versão corrompida de* x^2 *por um ruído misto (ruído dilativo e erosivo), pois* $x = x^2 + [1 \ -1 \ 1 \ 0 \ 0]^T$. *Então,*

$$\mathcal{M}_{XX}(x) = M_{XX} \,\square\, x = [3 \ 6 \ 3 \ 3 \ 4]^T \neq x^2. \tag{21}$$

$$\mathcal{W}_{XX}(x) = W_{XX} \,\square\, x = [4 \ 6 \ 3 \ 4 \ 4]^T \neq x^2. \tag{22}$$

Memória Morfológica Autoassociativa de Projeção Max-Plus (max-plus PAMM)

- M.E. Valle: **An Introduction to the Max-plus Projection Autoassociative Morphological Memory and Some of Its Variations**, In: Proceedings of IEEE International Conference on Fuzzy Systems 2014 (FUZZ-IEEE 2014). Page(s): 53 - 60, Beijing, China, July 2014.

Memória Morfológica Autoassociativa de Projeção Max-Plus (max-plus PAMM)

- M.E. Valle: **An Introduction to the Max-plus Projection Autoassociative Morphological Memory and Some of Its Variations**, In: Proceedings of IEEE International Conference on Fuzzy Systems 2014 (FUZZ-IEEE 2014). Page(s): 53 - 60, Beijing, China, July 2014.
- Motivação: Apresentar novos modelos de AMMs com um número reduzido memórias espúrias em comparação com as AMMs originais;

Memória Morfológica Autoassociativa de Projeção Max-Plus (max-plus PAMM)

Definição (Max-Plus PAMM)

Seja $\mathcal{X} = \{x^\xi : \xi = 1, \ldots, k\}$ *um conjunto de memórias fundamentais. A max-plus PAMM* $\mathcal{V}_{XX} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *satisfaz*

$$\mathcal{V}_{XX}(x) = \bigvee \{z \in \Psi(\mathcal{X}) : z \leq x\}\,, \tag{23}$$

onde $\Psi(\mathcal{X})$ *é o conjunto de todas combinações max-plus do conjunto* $\mathcal{X}$*.*

Memória Morfológica Autoassociativa de Projeção Min-Plus (min-plus PAMM)

Definição (Min-Plus PAMM)

Seja $\mathcal{X} = \left\{x^\xi : \xi = 1, \ldots, k\right\}$ *um conjunto de memórias fundamentais. A min-plus PAMM* $\mathcal{S}_{XX} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *satisfaz*

$$\mathcal{S}_{XX}(x) = \bigwedge \{z \in \Theta(\mathcal{X}) : z \geq x\} . \tag{24}$$

onde $\Theta(\mathcal{X})$ *é o conjunto de todas combinações min-plus do conjunto* $\mathcal{X}$*,*

Memórias Morfológicas Autoassociativas de Projeções

- As novas memórias $\mathcal{V}_{XX}$ e $\mathcal{S}_{XX}$ são idempotentes, isto é, $\mathcal{V}_{XX}^2 = \mathcal{V}_{XX}$ e $\mathcal{S}_{XX}^2 = \mathcal{S}_{XX}$, pois $\mathcal{V}_{XX}$ e $\mathcal{S}_{XX}$ projetam o padrão de entrada x nos conjuntos $\Psi(\mathcal{X})$ e $\Theta(\mathcal{X})$, respectivamente;

Memórias Morfológicas Autoassociativas de Projeções

- As novas memórias $\mathcal{V}_{XX}$ e $\mathcal{S}_{XX}$ são idempotentes, isto é, $\mathcal{V}_{XX}^2 = \mathcal{V}_{XX}$ e $\mathcal{S}_{XX}^2 = \mathcal{S}_{XX}$, pois $\mathcal{V}_{XX}$ e $\mathcal{S}_{XX}$ projetam o padrão de entrada x nos conjuntos $\Psi(\mathcal{X})$ e $\Theta(\mathcal{X})$, respectivamente;
- A capacidade ilimitada de armazenamento e recuperação de memórias fundamentais;

Memórias Morfológicas Autoassociativas de Projeções

- As novas memórias $\mathcal{V}_{XX}$ e $\mathcal{S}_{XX}$ são idempotentes, isto é, $\mathcal{V}_{XX}^2 = \mathcal{V}_{XX}$ e $\mathcal{S}_{XX}^2 = \mathcal{S}_{XX}$, pois $\mathcal{V}_{XX}$ e $\mathcal{S}_{XX}$ projetam o padrão de entrada x nos conjuntos $\Psi(\mathcal{X})$ e $\Theta(\mathcal{X})$, respectivamente;
- A capacidade ilimitada de armazenamento e recuperação de memórias fundamentais;
- $\mathcal{V}_{XX}(x) \leq x, \forall x \in \mathbb{R}^n$, portanto max-plus PAMM é adequada para recuperar padrões corrompidos por ruídos dilativos;

Memórias Morfológicas Autoassociativas de Projeções

- As novas memórias $\mathcal{V}_{XX}$ e $\mathcal{S}_{XX}$ são idempotentes, isto é, $\mathcal{V}_{XX}^2 = \mathcal{V}_{XX}$ e $\mathcal{S}_{XX}^2 = \mathcal{S}_{XX}$, pois $\mathcal{V}_{XX}$ e $\mathcal{S}_{XX}$ projetam o padrão de entrada x nos conjuntos $\Psi(\mathcal{X})$ e $\Theta(\mathcal{X})$, respectivamente;
- A capacidade ilimitada de armazenamento e recuperação de memórias fundamentais;
- $\mathcal{V}_{XX}(x) \leq x, \forall x \in \mathbb{R}^n$, portanto max-plus PAMM é adequada para recuperar padrões corrompidos por ruídos dilativos;
- $\mathcal{S}_{XX}(x) \geq x, \forall x \in \mathbb{R}^n$, consequentemente min-plus PAMM é adequada para recuperar padrões corrompidos por ruídos erosivos;

Memórias Morfológicas Autoassociativas de Projeções

- As novas memórias $\mathcal{V}_{XX}$ e $\mathcal{S}_{XX}$ são idempotentes, isto é, $\mathcal{V}_{XX}^2 = \mathcal{V}_{XX}$ e $\mathcal{S}_{XX}^2 = \mathcal{S}_{XX}$, pois $\mathcal{V}_{XX}$ e $\mathcal{S}_{XX}$ projetam o padrão de entrada x nos conjuntos $\Psi(\mathcal{X})$ e $\Theta(\mathcal{X})$, respectivamente;
- A capacidade ilimitada de armazenamento e recuperação de memórias fundamentais;
- $\mathcal{V}_{XX}(x) \leq x, \forall x \in \mathbb{R}^n$, portanto max-plus PAMM é adequada para recuperar padrões corrompidos por ruídos dilativos;
- $\mathcal{S}_{XX}(x) \geq x, \forall x \in \mathbb{R}^n$, consequentemente min-plus PAMM é adequada para recuperar padrões corrompidos por ruídos erosivos;
- $\mathcal{V}_{XX}$ tem uma quantidade reduzida de memórias espúrias do que $\mathcal{M}_{XX}$, pois $\Psi(\mathcal{X}) \subseteq \Omega(\mathcal{X})$,logo $\mathcal{V}_{XX}(x) \leq \mathcal{M}_{XX}(x) \leq x$.
- Semelhantemente, $\mathcal{W}_{XX}$ tem menos memórias espúrias em relação a $\mathcal{W}_{XX}$, em virtude que $\Theta(\mathcal{X}) \subseteq \Phi(\mathcal{X})$, assim $\mathcal{S}_{XX}(x) \geq \mathcal{W}_{XX}(x) \geq x$

Memórias Morfológicas Autoassociativas de Projeções

- As novas memórias $\mathcal{V}_{XX}$ e $\mathcal{S}_{XX}$ são idempotentes, isto é, $\mathcal{V}_{XX}^2 = \mathcal{V}_{XX}$ e $\mathcal{S}_{XX}^2 = \mathcal{S}_{XX}$, pois $\mathcal{V}_{XX}$ e $\mathcal{S}_{XX}$ projetam o padrão de entrada x nos conjuntos $\Psi(\mathcal{X})$ e $\Theta(\mathcal{X})$, respectivamente;
- A capacidade ilimitada de armazenamento e recuperação de memórias fundamentais;
- $\mathcal{V}_{XX}(x) \leq x, \forall x \in \mathbb{R}^n$, portanto max-plus PAMM é adequada para recuperar padrões corrompidos por ruídos dilativos;
- $\mathcal{S}_{XX}(x) \geq x, \forall x \in \mathbb{R}^n$, consequentemente min-plus PAMM é adequada para recuperar padrões corrompidos por ruídos erosivos;
- $\mathcal{V}_{XX}$ tem uma quantidade reduzida de memórias espúrias do que $\mathcal{M}_{XX}$, pois $\Psi(\mathcal{X}) \subseteq \Omega(\mathcal{X})$,logo $\mathcal{V}_{XX}(x) \leq \mathcal{M}_{XX}(x) \leq x$.
- Semelhantemente, $\mathcal{W}_{XX}$ tem menos memórias espúrias em relação a $\mathcal{W}_{XX}$, em virtude que $\Theta(\mathcal{X}) \subseteq \Phi(\mathcal{X})$, assim $\mathcal{S}_{XX}(x) \geq \mathcal{W}_{XX}(x) \geq x$

Teorema 3

Considere $X = [x^1 \ldots\ x^k] \in \mathbb{R}^{n \times k}$ *a matriz que suas colunas correspondem as memórias fundamentais. Dado o padrão de entrada* $x \in \mathbb{R}^n$, *o padrão de saída da max-plus PAMM* $\mathcal{V}_{XX}$ *satisfaz*

$$\mathcal{V}_{XX}(x) = X \boxdot \alpha, \quad \text{onde } \alpha = X^* \boxtimes x. \tag{25}$$

Alternativamente,

$$\mathcal{V}_{XX}(x) = \bigvee_{\xi=1}^{k} \bigwedge_{j=1}^{n} ((x_j - x_j^{\xi}) + x^{\xi}). \tag{26}$$

Teorema 4

Considere $X = [x^1 \ldots \; x^k] \in \mathbb{R}^{n \times k}$ *a matriz que suas colunas correspondem as memórias fundamentais. Dado o padrão de entrada* $x \in \mathbb{R}^n$*, o padrão de saída da min-plus PAMM* $\mathcal{S}_{XX}$ *satisfaz*

$$\mathcal{S}_{XX}(x) = X \boxtimes \theta, \quad \text{onde } \theta = X^* \boxtimes x. \tag{27}$$

Alternativamente,

$$\mathcal{S}_{XX}(x) = \bigwedge_{\xi=1}^{k} \bigvee_{j=1}^{n} ((x_j - x_j^{\xi}) + x^{\xi}). \tag{28}$$

Demonstração (teorema 4)

Sejam $z \in \Theta(\mathcal{X})$, $\mathcal{N} = \{1, \ldots, n\}$ *e* $\mathcal{K} = \{1, \ldots, k\}$. *Temos as seguintes equivalências:*

$$z \geq x \quad \Leftrightarrow \quad z_j \geq x_j, \; \forall j \in \mathcal{N}$$

Demonstração (teorema 4)

Sejam $z \in \Theta(\mathcal{X})$, $\mathcal{N} = \{1, \ldots, n\}$ *e* $\mathcal{K} = \{1, \ldots, k\}$. *Temos as seguintes equivalências:*

$$
\begin{aligned}
z \geq x \quad &\Leftrightarrow \quad z_j \geq x_j, \ \forall j \in \mathcal{N} \qquad (29) \\
&\Leftrightarrow \quad \bigwedge_{\xi=1}^{k} (\theta_\xi + x_j^\xi) \geq x_j, \ \forall j \in \mathcal{N}
\end{aligned}
$$

Demonstração (teorema 4)

Sejam $z \in \Theta(\mathcal{X})$, $\mathcal{N} = \{1, \ldots, n\}$ *e* $\mathcal{K} = \{1, \ldots, k\}$. *Temos as seguintes equivalências:*

$$
\begin{aligned}
z \geq x \quad &\Leftrightarrow \quad z_j \geq x_j, \ \forall j \in \mathcal{N} && (29) \\
&\Leftrightarrow \quad \bigwedge_{\xi=1}^{k} (\theta_\xi + x_j^\xi) \geq x_j, \ \forall j \in \mathcal{N} && (30) \\
&\Leftrightarrow \quad \theta_\xi + x_j^\xi \geq x_j, \ \forall j \in \mathcal{N}, \forall \xi \in \mathcal{K}
\end{aligned}
$$

Memórias Morfológicas Autoassociativas de Projeçõess

Demonstração (teorema 4)

Sejam $z \in \Theta(\mathcal{X})$, $\mathcal{N} = \{1, \ldots, n\}$ *e* $\mathcal{K} = \{1, \ldots, k\}$. *Temos as seguintes equivalências:*

$$
\begin{aligned}
z \geq x \quad &\Leftrightarrow \quad z_j \geq x_j, \ \forall j \in \mathcal{N} && (29)\\
&\Leftrightarrow \quad \bigwedge_{\xi=1}^{k} (\theta_\xi + x_j^\xi) \geq x_j, \ \forall j \in \mathcal{N} && (30)\\
&\Leftrightarrow \quad \theta_\xi + x_j^\xi \geq x_j, \ \forall j \in \mathcal{N}, \forall \xi \in \mathcal{K} && (31)\\
&\Leftrightarrow \quad \theta_\xi \geq x_j - x_j^\xi, \ \forall j \in \mathcal{N}, \forall \xi \in \mathcal{K}
\end{aligned}
$$

Demonstração (teorema 4)

Sejam $z \in \Theta(\mathcal{X})$, $\mathcal{N} = \{1, \ldots, n\}$ *e* $\mathcal{K} = \{1, \ldots, k\}$. *Temos as seguintes equivalências:*

$$z \geq x \quad \Leftrightarrow \quad z_j \geq x_j, \ \forall j \in \mathcal{N} \tag{29}$$

$$\Leftrightarrow \quad \bigwedge_{\xi=1}^{k} (\theta_\xi + x_j^\xi) \geq x_j, \ \forall j \in \mathcal{N} \tag{30}$$

$$\Leftrightarrow \quad \theta_\xi + x_j^\xi \geq x_j, \ \forall j \in \mathcal{N}, \forall \xi \in \mathcal{K} \tag{31}$$

$$\Leftrightarrow \quad \theta_\xi \geq x_j - x_j^\xi, \ \forall j \in \mathcal{N}, \forall \xi \in \mathcal{K} \tag{32}$$

$$\Leftrightarrow \quad \theta_\xi \geq \bigvee_{j=1}^{n} x_j - x_j^\xi, \ \forall j \in \mathcal{N}, \forall \xi \in \mathcal{K}$$

Demonstração (teorema 4)

Sejam $z \in \Theta(\mathcal{X})$, $\mathcal{N} = \{1, \ldots, n\}$ *e* $\mathcal{K} = \{1, \ldots, k\}$. *Temos as seguintes equivalências:*

$$
\begin{aligned}
z \geq x \quad &\Leftrightarrow \quad z_j \geq x_j, \ \forall j \in \mathcal{N} && (29)\\
&\Leftrightarrow \quad \bigwedge_{\xi=1}^{k} (\theta_\xi + x_j^\xi) \geq x_j, \ \forall j \in \mathcal{N} && (30)\\
&\Leftrightarrow \quad \theta_\xi + x_j^\xi \geq x_j, \ \forall j \in \mathcal{N}, \forall \xi \in \mathcal{K} && (31)\\
&\Leftrightarrow \quad \theta_\xi \geq x_j - x_j^\xi, \ \forall j \in \mathcal{N}, \forall \xi \in \mathcal{K} && (32)\\
&\Leftrightarrow \quad \theta_\xi \geq \bigvee_{j=1}^{n} x_j - x_j^\xi, \ \forall j \in \mathcal{N}, \forall \xi \in \mathcal{K} && (33)
\end{aligned}
$$

Demonstração (teorema 4)

Portanto, o menor $z \in \Theta(\mathcal{X})$ *tal que* $z \geq x$ *é dado por*

$$z_j = \bigwedge_{\xi=1}^{k} (\theta_\xi + x_j^\xi), \forall j \in \mathcal{N}, \tag{34}$$

onde $\theta_\xi = \bigvee_{j=1}^{n} x_j - x_j^\xi, \forall \xi \in \mathcal{K}.$

Memórias Morfológicas Autoassociativas de Projeções

Exemplo 2

Considerem o conjunto de memórias fundamentais $\mathcal{X}$ *e o padrão de entrada* $x = [10\ 0\ 7\ 4\ 2]^T$ *do exemplo 1.*

Memórias Morfológicas Autoassociativas de Projeções

Exemplo 2

Considerem o conjunto de memórias fundamentais $\mathcal{X}$ *e o padrão de entrada* $x = [10\ 0\ 7\ 4\ 2]^T$ *do exemplo 1.*
Assim, o vetor α *que satisfaz (25) é dado por* $\alpha = [-1\ \ -7\ \ -4]^T$, *e a saída da max-plus PAMM é dada por*

$$\mathcal{V}_{XX}(x) \quad = \quad (\alpha_1 + x^1) \vee (\alpha_2 + x^2) \vee (\alpha_3 + x^3)$$

Memórias Morfológicas Autoassociativas de Projeções

Exemplo 2

Considerem o conjunto de memórias fundamentais $\mathcal{X}$ *e o padrão de entrada* $x = [10\ 0\ 7\ 4\ 2]^T$ *do exemplo 1.*
Assim, o vetor α *que satisfaz (25) é dado por* $\alpha = [-1\ \ -7\ \ -4]^T$, *e a saída da max-plus PAMM é dada por*

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{XX}(x) &= (\alpha_1 + x^1) \vee (\alpha_2 + x^2) \vee (\alpha_3 + x^3) \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 6 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ -5 \\ -4 \\ -3 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 6 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{35}$$

O vetor θ que satisfaz (27) é dado por $\theta = [8 \;\; 7 \;\; 4]^T$, e a saída da min-plus PAMM é dada por

$$\mathcal{S}_{XX}(x) = (\theta_1 + x^1) \wedge (\theta_2 + x^2) \wedge (\theta_3 + x^3)$$

O vetor θ que satisfaz (27) é dado por $\theta = [8 \;\; 7 \;\; 4]^T$, e a saída da min-plus PAMM é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{XX}(x) &= (\theta_1 + x^1) \wedge (\theta_2 + x^2) \wedge (\theta_3 + x^3) \\ &= \begin{bmatrix} 10 \\ 8 \\ 15 \\ 12 \\ 11 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 10 \\ 14 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \\ 8 \\ 12 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \\ 8 \\ 10 \\ 8 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{36}$$

Memórias Autoassociativas Morfológicas de Projeções

Seja o padrão de entrada $x = [4\ 6\ 3\ 3\ 4]^T$ do exemplo 1. Então,

$$\mathcal{V}_{XX}(x) = [2\ 6\ 3\ 3\ 3]^T \tag{37}$$

e

$$\mathcal{S}_{XX}(x) = [4\ 6\ 3\ 4\ 5]^T$$

Memórias Autoassociativas Morfológicas de Projeções

Seja o padrão de entrada $x = [4\ 6\ 3\ 3\ 4]^T$ do exemplo 1. Então,

$$\mathcal{V}_{XX}(x) = [2\ 6\ 3\ 3\ 3]^T \tag{37}$$

e

$$\mathcal{S}_{XX}(x) = [4\ 6\ 3\ 4\ 5]^T \tag{38}$$

Diferentemente das AMMs originais, as novas AMMs (max-plus PAMM e min-plus PAMM) não precisam armazenar as matrizes de pesos sinápticos de tamanho $n \times n$, diminuindo a carga computacional.

Seja o padrão de entrada $x = [4\ 6\ 3\ 3\ 4]^T$ do exemplo 1. Então,

$$\mathcal{V}_{XX}(x) = [2\ 6\ 3\ 3\ 3]^T \tag{37}$$

e

$$\mathcal{S}_{XX}(x) = [4\ 6\ 3\ 4\ 5]^T \tag{38}$$

Diferentemente das AMMs originais, as novas AMMs (max-plus PAMM e min-plus PAMM) não precisam armazenar as matrizes de pesos sinápticos de tamanho $n \times n$, diminuindo a carga computacional.
Infelizmente, as informações sobre as memórias fundamentais não são distribuidas nos pesos sinápticos max-plus PAMM e min-plus PAMM.

Memórias Morfológicas Autoassociativas de Projeções

Proposição

1. *Sejam x e y pontos fixos da aplicação $\mathcal{V}_{XX}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, então $x \vee y$ e $x + \lambda$ são pontos fixos de $\mathcal{V}_{XX}$.*

Memórias Morfológicas Autoassociativas de Projeções

Proposição

1. *Sejam* x *e* y *pontos fixos da aplicação* $\mathcal{V}_{XX}$ *e* $\lambda \in \mathbb{R}$, *então* $x \vee y$ *e* $x + \lambda$ *são pontos fixos de* $\mathcal{V}_{XX}$.
2. *Se* x *e* y *são pontos fixos da aplicação* $\mathcal{S}_{XX}$ *e* $\lambda \in \mathbb{R}$, *então* $x \wedge y$ *e* $x + \lambda$ *são pontos fixos de* $\mathcal{S}_{XX}$.

Memórias Morfológicas Autoassociativas de Projeções

Proposição

1. *Sejam* x *e* y *pontos fixos da aplicação* $\mathcal{V}_{XX}$ *e* $\lambda \in \mathbb{R}$, *então* $x \vee y$ *e* $x + \lambda$ *são pontos fixos de* $\mathcal{V}_{XX}$.
2. *Se* x *e* y *são pontos fixos da aplicação* $\mathcal{S}_{XX}$ *e* $\lambda \in \mathbb{R}$, *então* $x \wedge y$ *e* $x + \lambda$ *são pontos fixos de* $\mathcal{S}_{XX}$.

Demonstração

Suponha que x e y são pontos fixos da aplicação $\mathcal{V}_{XX}$, isto é, escrevendo $\alpha_x = X^* \boxwedge x$ e $\alpha_y = X^* \boxwedge y$, então

$$\mathcal{V}_{XX}(x) = X \boxvee \alpha_x = x \text{ e } \mathcal{V}_{XX}(y) = X \boxvee \alpha_y = y.$$

Usando propriedades da álgebra minimax, temos

$$\alpha = X^* \boxwedge (x \vee y) \geq (X^* \boxwedge x) \vee (X^* \boxwedge y) = \alpha_x \vee \alpha_y; \tag{39}$$

Assim,

$$\mathcal{V}_{XX}(x \vee y) \quad = \quad X \boxvee \alpha$$

Demonstração

Suponha que x e y são pontos fixos da aplicação $\mathcal{V}_{XX}$, isto é, escrevendo $\alpha_x = X^* \boxed{\wedge}\, x$ e $\alpha_y = X^* \boxed{\wedge}\, y$, então

$$\mathcal{V}_{XX}(x) = X \boxed{\vee}\, \alpha_x = x \text{ e } \mathcal{V}_{XX}(y) = X \boxed{\vee}\, \alpha_y = y.$$

Usando propriedades da álgebra minimax, temos

$$\alpha = X^* \boxed{\wedge}\, (x \vee y) \geq (X^* \boxed{\wedge}\, x) \vee (X^* \boxed{\wedge}\, y) = \alpha_x \vee \alpha_y; \tag{39}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{XX}(x \vee y) &= X \boxed{\vee}\, \alpha \\ &\geq X \boxed{\vee}\, (\alpha_x \vee \alpha_y) \end{aligned} \tag{40}$$

Demonstração

Suponha que x e y são pontos fixos da aplicação $\mathcal{V}_{XX}$, isto é, escrevendo $\alpha_x = X^* \boxtimes x$ e $\alpha_y = X^* \boxtimes y$, então

$$\mathcal{V}_{XX}(x) = X \boxtimes \alpha_x = x \text{ e } \mathcal{V}_{XX}(y) = X \boxtimes \alpha_y = y.$$

Usando propriedades da álgebra minimax, temos

$$\alpha = X^* \boxtimes (x \vee y) \geq (X^* \boxtimes x) \vee (X^* \boxtimes y) = \alpha_x \vee \alpha_y; \tag{39}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{XX}(x \vee y) &= X \boxtimes \alpha & (40)\\ &\geq X \boxtimes (\alpha_x \vee \alpha_y) & (41)\\ &= (X \boxtimes \alpha_x) \vee (X \boxtimes \alpha_y) = x \vee y, & (42) \end{aligned}$$

Demonstração

Logo,

$$\mathcal{V}_{XX}(x \vee y) \geq x \vee y. \tag{43}$$

Além disso, por definição temos $\mathcal{V}_{XX}(x \vee y) \leq x \vee y$. *Portanto,* $\mathcal{V}_{XX}(x \vee y) = x \vee y$.

Por fim,

$$\mathcal{V}_{XX}(\lambda + x) \quad = \quad X \boxed{\vee} (X^* \boxed{\wedge} (\lambda + x))$$

Memórias Associativas Morfológicas de Projeções

Demonstração

Logo,

$$\mathcal{V}_{XX}(x \vee y) \geq x \vee y. \tag{43}$$

Além disso, por definição temos $\mathcal{V}_{XX}(x \vee y) \leq x \vee y$. *Portanto,* $\mathcal{V}_{XX}(x \vee y) = x \vee y$.
Por fim,

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{XX}(\lambda + x) &= X \boxed{\vee} (X^* \boxed{\wedge} (\lambda + x)) \\ &= X \boxed{\vee} (\lambda + (X^* \boxed{\wedge} x)) \end{aligned} \tag{44}$$

Demonstração

Logo,

$$\mathcal{V}_{XX}(x \vee y) \geq x \vee y. \tag{43}$$

Além disso, por definição temos $\mathcal{V}_{XX}(x \vee y) \leq x \vee y$*. Portanto,* $\mathcal{V}_{XX}(x \vee y) = x \vee y$.
Por fim,

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}_{XX}(\lambda + x) &= X \boxvee (X^* \boxwedge (\lambda + x)) && (44)\\
&= X \boxvee (\lambda + (X^* \boxwedge x)) && (45)\\
&= \lambda + (X \boxvee (X^* \boxwedge x))
\end{aligned}$$

Memórias Associativas Morfológicas de Projeções

Demonstração

Logo,

$$\mathcal{V}_{XX}(x \vee y) \geq x \vee y. \tag{43}$$

Além disso, por definição temos $\mathcal{V}_{XX}(x \vee y) \leq x \vee y$. *Portanto,* $\mathcal{V}_{XX}(x \vee y) = x \vee y$.
Por fim,

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}_{XX}(\lambda + x) &= X \boxvee (X^* \boxwedge (\lambda + x)) && (44)\\
&= X \boxvee (\lambda + (X^* \boxwedge x)) && (45)\\
&= \lambda + (X \boxvee (X^* \boxwedge x)) && (46)\\
&= \lambda + x && (47)
\end{aligned}$$

Exemplo 3

Considere o conjunto de memórias fundamentais $\mathcal{X}$ *do exemplo 1 e o padrão de entrada* $x = x^1 \wedge x^2 = [2\ 0\ 2\ 3\ 3]^T$ *.*

Exemplo 3

Considere o conjunto de memórias fundamentais $\mathcal{X}$ *do exemplo 1 e o padrão de entrada* $x = x^1 \wedge x^2 = [2\ 0\ 2\ 3\ 3]^T$ *.*
O vetor α *que satisfaz (25) é dado por* $\alpha = [-5\ \ -7\ \ -5]^T$ *, a saída da max-plus PAMM é dada por*

$$\mathcal{V}_{XX}(x) \quad = \quad (\alpha_1 + x^1) \vee (\alpha_2 + x^2) \vee (\alpha_3 + x^3)$$

Memórias Morfológicas Autoassociativas de Projeções

Exemplo 3

Considere o conjunto de memórias fundamentais $\mathcal{X}$ do exemplo 1 e o padrão de entrada $x = x^1 \wedge x^2 = [2\ 0\ 2\ 3\ 3]^T$.
O vetor α que satisfaz (25) é dado por $\alpha = [-5\ \ -7\ \ -5]^T$, a saída da max-plus PAMM é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{XX}(x) &= (\alpha_1 + x^1) \vee (\alpha_2 + x^2) \vee (\alpha_3 + x^3) \\ &= \begin{bmatrix} -3 \\ -5 \\ 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ -5 \\ -4 \\ -3 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \neq x \end{aligned} \tag{48}$$

Portanto, a combinação $\wedge$ de pontos fixos não é um ponto fixo de $\mathcal{V}_{XX}$.

Exemplo 4

Seja $\mathcal{X}$ *o conjunto de memórias fundamentais do exemplo 1 e o padrão de entrada* $x = x^1 \vee x^2 = [3\ 7\ 7\ 4\ 4]^T$.

Exemplo 4

Seja $\mathcal{X}$ o conjunto de memórias fundamentais do exemplo 1 e o padrão de entrada $x = x^1 \vee x^2 = [3\ 7\ 7\ 4\ 4]^T$.
O vetor θ que satisfaz (27) é dado por $\theta = [7\ \ 5\ \ 6]^T$, a saída da min-plus PAMM é dada por

Exemplo 4

Seja $\mathcal{X}$ o conjunto de memórias fundamentais do exemplo 1 e o padrão de entrada $x = x^1 \vee x^2 = [3\ 7\ 7\ 4\ 4]^T$.
O vetor θ que satisfaz (27) é dado por $\theta = [7 \quad 5 \quad 6]^T$, a saída da min-plus PAMM é dada por

$$\mathcal{S}_{XX}(x) \quad = \quad (\theta_1 + x^1) \wedge (\theta_2 + x^2) \wedge (\theta_3 + x^3)$$

Memórias Morfológicas Autoassociativas de Projeções

Exemplo 4

Seja $\mathcal{X}$ o conjunto de memórias fundamentais do exemplo 1 e o padrão de entrada $x = x^1 \vee x^2 = [3\ 7\ 7\ 4\ 4]^T$.
O vetor θ que satisfaz (27) é dado por $\theta = [7 \quad 5 \quad 6]^T$, *a saída da min-plus PAMM é dada por*

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{XX}(x) &= (\theta_1 + x^1) \wedge (\theta_2 + x^2) \wedge (\theta_3 + x^3) \\ &= \begin{bmatrix} 9 \\ 7 \\ 14 \\ 11 \\ 10 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 8 \\ 12 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 12 \\ 7 \\ 10 \\ 14 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix} \neq x \end{aligned} \tag{49}$$

Portanto, a combinação $\vee$ de pontos fixos não é um ponto fixo de $\mathcal{S}_{XX}$.

Memórias Morfológicas Autoassociativas de Projeções

Teorema 5

As memórias autoassociativas morfológicas de projeções $\mathcal{V}_{XX}$ e $\mathcal{S}_{XX}$ *satisfazem as seguintes desigualdades:*

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}_{XX}(x) &\leq \mathcal{V}_{XX}\left(\mathcal{S}_{XX}\left(\mathcal{V}_{XX}(x)\right)\right) && (50)\\
&\leq \left\{ \begin{array}{c} \mathcal{S}_{XX}\left(\mathcal{V}_{XX}(x)\right) \\ \mathcal{V}_{XX}\left(\mathcal{S}_{XX}(x)\right) \end{array} \right\} && (51)\\
&\leq \mathcal{S}_{XX}\left(\mathcal{V}_{XX}\left(\mathcal{S}_{XX}(x)\right)\right) && (52)\\
&\leq \mathcal{S}_{XX}(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. && (53)
\end{aligned}$$

Memórias Morfológicas Autoassociativas de Projeções

Demonstração

A memória $\mathcal{V}_{XX}$ *satisfaz* $\mathcal{V}_{XX}(x) \leq x, \forall x \in \mathbb{R}^n$, *então*

$$\mathcal{V}_{XX} \leq I \tag{54}$$

Aplicando a memória $\mathcal{S}_{XX}$ *em (54) pela esquerda, temos*

$$\mathcal{V}_{XX} \circ \mathcal{S}_{XX} \leq I \circ \mathcal{S}_{XX} = \mathcal{S}_{XX} \tag{55}$$

Agora, compondo a memória $\mathcal{S}_{XX}$ *em (55) pela direita, temos*

$$\mathcal{S}_{XX} \circ \mathcal{V}_{XX} \circ \mathcal{S}_{XX} \leq \mathcal{S}_{XX} \circ \mathcal{S}_{XX} = \mathcal{S}_{XX}$$

Memórias Morfológicas Autoassociativas de Projeções

Demonstração

A memória $\mathcal{V}_{XX}$ *satisfaz* $\mathcal{V}_{XX}(x) \leq x, \forall x \in \mathbb{R}^n$, *então*

$$\mathcal{V}_{XX} \leq I \tag{54}$$

Aplicando a memória $\mathcal{S}_{XX}$ *em (54) pela esquerda, temos*

$$\mathcal{V}_{XX} \circ \mathcal{S}_{XX} \leq I \circ \mathcal{S}_{XX} = \mathcal{S}_{XX} \tag{55}$$

Agora, compondo a memória $\mathcal{S}_{XX}$ *em (55) pela direita, temos*

$$\mathcal{S}_{XX} \circ \mathcal{V}_{XX} \circ \mathcal{S}_{XX} \leq \mathcal{S}_{XX} \circ \mathcal{S}_{XX} = \mathcal{S}_{XX} \tag{56}$$

Demonstração

Além disso, a memória $\mathcal{S}_{XX}$ *satisfaz* $\mathcal{S}_{XX}(x) \geq x, \forall x \in \mathbb{R}^n$, *então*

$$\mathcal{S}_{XX} \geq I. \tag{57}$$

Aplicando a memória $\mathcal{V}_{XX}$ *em (57) pela esquerda, temos*

Demonstração

Além disso, a memória $\mathcal{S}_{XX}$ *satisfaz* $\mathcal{S}_{XX}(x) \geq x, \forall x \in \mathbb{R}^n$, *então*

$$\mathcal{S}_{XX} \geq I. \tag{57}$$

Aplicando a memória $\mathcal{V}_{XX}$ *em (57) pela esquerda, temos*

$$\mathcal{S}_{XX} \circ \mathcal{V}_{XX} \geq I \circ \mathcal{V}_{XX} = \mathcal{V}_{XX} \tag{58}$$

Ainda, compondo a memória $\mathcal{V}_{XX}$ *em (58) pela direita, temos*

$$\mathcal{V}_{XX} \circ \mathcal{S}_{XX} \circ \mathcal{V}_{XX} \geq \mathcal{V}_{XX} \circ \mathcal{V}_{XX} = \mathcal{V}_{XX} \tag{59}$$

Demonstração

Além disso, a memória $\mathcal{S}_{XX}$ *satisfaz* $\mathcal{S}_{XX}(x) \geq x, \forall x \in \mathbb{R}^n$, *então*

$$\mathcal{S}_{XX} \geq I. \tag{57}$$

Aplicando a memória $\mathcal{V}_{XX}$ *em (57) pela esquerda, temos*

$$\mathcal{S}_{XX} \circ \mathcal{V}_{XX} \geq I \circ \mathcal{V}_{XX} = \mathcal{V}_{XX} \tag{58}$$

Ainda, compondo a memória $\mathcal{V}_{XX}$ *em (58) pela direita, temos*

$$\mathcal{V}_{XX} \circ \mathcal{S}_{XX} \circ \mathcal{V}_{XX} \geq \mathcal{V}_{XX} \circ \mathcal{V}_{XX} = \mathcal{V}_{XX} \tag{59}$$

Demonstração

Das desigualdades (54) e (57), obtemos

$$\mathcal{V}_{XX} \leq \mathcal{S}_{XX}$$

Memórias Morfológicas Autoassociativas de Projeções

Demonstração

Das desigualdades (54) e (57), obtemos

$$\mathcal{V}_{XX} \leq \mathcal{S}_{XX} \tag{60}$$

Compondo a memória $\mathcal{S}_{XX}$ *pela direita da desigualdade (60), temos*

$$\mathcal{S}_{XX} \circ \mathcal{V}_{XX} \leq \mathcal{S}_{XX} \circ \mathcal{S}_{XX} = \mathcal{S}_{XX}$$

Demonstração

Das desigualdades (54) e (57), obtemos

$$\mathcal{V}_{XX} \leq \mathcal{S}_{XX} \tag{60}$$

Compondo a memória $\mathcal{S}_{XX}$ pela direita da desigualdade (60), temos

$$\mathcal{S}_{XX} \circ \mathcal{V}_{XX} \leq \mathcal{S}_{XX} \circ \mathcal{S}_{XX} = \mathcal{S}_{XX} \tag{61}$$

Por conseguinte, aplicando a memória $\mathcal{V}_{XX}$ pela direita em (61), tem-se

$$\mathcal{V}_{XX} \circ \mathcal{S}_{XX} \circ \mathcal{V}_{XX} \leq \mathcal{V}_{XX} \circ \mathcal{S}_{XX}$$

Demonstração

Das desigualdades (54) e (57), obtemos

$$\mathcal{V}_{XX} \leq \mathcal{S}_{XX} \tag{60}$$

Compondo a memória $\mathcal{S}_{XX}$ pela direita da desigualdade (60), temos

$$\mathcal{S}_{XX} \circ \mathcal{V}_{XX} \leq \mathcal{S}_{XX} \circ \mathcal{S}_{XX} = \mathcal{S}_{XX} \tag{61}$$

Por conseguinte, aplicando a memória $\mathcal{V}_{XX}$ pela direita em (61), tem-se

$$\mathcal{V}_{XX} \circ \mathcal{S}_{XX} \circ \mathcal{V}_{XX} \leq \mathcal{V}_{XX} \circ \mathcal{S}_{XX} \tag{62}$$

Demonstração

Analogamente, mostra-se que

$$\mathcal{S}_{XX} \circ \mathcal{V}_{XX} \leq \mathcal{S}_{XX} \circ \mathcal{V}_{XX} \circ \mathcal{S}_{XX}.$$

Memórias Morfológicas Autoassociativas de Projeções

Demonstração

Analogamente, mostra-se que

$$\mathcal{S}_{XX} \circ \mathcal{V}_{XX} \leq \mathcal{S}_{XX} \circ \mathcal{V}_{XX} \circ \mathcal{S}_{XX}. \tag{63}$$

Portanto

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{XX}(x) \overbrace{\leq}^{(59)} \mathcal{V}_{XX}(\mathcal{S}_{XX}(\mathcal{V}_{XX}(x))) \overbrace{\leq}^{(23)} \mathcal{S}_{XX}(\mathcal{V}_{XX}(x)) \\ \overbrace{\leq}^{(63)} \mathcal{S}_{XX}(\mathcal{V}_{XX}(\mathcal{S}_{XX}(x))) \overbrace{\leq}^{(56)} \mathcal{S}_{XX}(x) \end{aligned} \tag{64}$$

Demonstração

Finalmente,

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_{XX}(x) \quad &\overbrace{\leq}^{(59)} \quad \mathcal{V}_{XX}(\mathcal{S}_{XX}(\mathcal{V}_{XX}(x))) \overbrace{\leq}^{(62)} \mathcal{V}_{XX}(\mathcal{S}_{XX}(x)) \\ &\overbrace{\leq}^{(24)} \quad \mathcal{S}_{XX}(\mathcal{V}_{XX}(\mathcal{S}_{XX}(x))) \overbrace{\leq}^{(56)} \mathcal{S}_{XX}(x) \end{aligned} \tag{65}$$

Memórias Morfológicas Autoassociativas de Projeções

Exemplo 5

Vamos determinar $\mathcal{S}_{XX}(\mathcal{V}_{XX}(x)) = \mathcal{S}_{XX}(y)$, *onde* $y = [2 \;\; 0 \;\; 6 \; 4 \;\; 2]^T$ *foi obtido no exemplo 2.*

Exemplo 5

Vamos determinar $\mathcal{S}_{XX}(\mathcal{V}_{XX}(x)) = \mathcal{S}_{XX}(y)$*, onde* $y = [2 \ \ 0 \ \ 6 \ 4 \ \ 2]^T$ *foi obtido no exemplo 2.O vetor* $\theta = [0 \ \ 4 \ \ 2]^T$ *, e a saída é dada por*

$$\mathcal{S}_{XX}(\mathcal{V}_{XX}(x)) = (\theta_1 + x^1) \wedge (\theta_2 + x^2) \wedge (\theta_3 + x^3)$$

Memórias Morfológicas Autoassociativas de Projeções

Exemplo 5

Vamos determinar $\mathcal{S}_{XX}(\mathcal{V}_{XX}(x)) = \mathcal{S}_{XX}(y)$*, onde* $y = [2 \;\; 0 \;\; 6 \; 4 \;\; 2]^T$ *foi obtido no exemplo 2.O vetor* $\theta = [0 \;\; 4 \;\; 2]^T$*, e a saída é dada por*

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{XX}(\mathcal{V}_{XX}(x)) &= (\theta_1 + x^1) \wedge (\theta_2 + x^2) \wedge (\theta_3 + x^3) \\ &= \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 7 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 7 \\ 11 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \\ 6 \\ 10 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 6 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} \neq x^1 \end{aligned} \qquad (66)$$

Observação

Note que

$$\mathcal{S}_{XX}\mathcal{V}_{XX} \neq \mathcal{V}_{XX} \neq \mathcal{S}_{XX} \neq \mathcal{M}_{XX} \neq \mathcal{W}_{XX}.$$

Consequentemente, a aplicação $\mathcal{S}_{XX}\mathcal{V}_{XX}$ *é uma nova memória para o conjunto fundamental* $\mathcal{X}$.

Exemplo 6

Pelo exemplo 2 temos $\mathcal{V}_{XX}(x) = [2 \;\; 6 \;\; 3 \; 3 \;\; 3]^T$, *onde* $x = [4 \; 6 \; 3 \; 3 \; 4]^T$. *Portanto,*

$$\mathcal{S}_{XX}(\mathcal{V}_{XX}(x)) = [4 \; 6 \; 3 \; 4 \; 5]^T.$$

Memórias Morfológicas Autoassociativas de Projeções

Exemplo 6

Pelo exemplo 2 temos $\mathcal{V}_{XX}(x) = [2 \;\; 6 \;\; 3 \; 3 \;\; 3]^T$, *onde* $x = [4 \; 6 \; 3 \; 3 \; 4]^T$. *Portanto,*

$$\mathcal{S}_{XX}(\mathcal{V}_{XX}(x)) = [4 \; 6 \; 3 \; 4 \; 5]^T. \tag{67}$$

Consequentemente,

$$\mathcal{V}_{XX}(\mathcal{S}_{XX}(\mathcal{V}_{XX}(x))) = [2 \; 6 \; 3 \; 4 \; 3]^T \neq x^2. \tag{68}$$

Observação

Segue dos exemplos que

$$\mathcal{V}_{XX}\mathcal{S}_{XX}\mathcal{V}_{XX} \neq \mathcal{S}_{XX}(\mathcal{V}_{XX}) \neq \mathcal{V}_{XX} \neq \mathcal{S}_{XX} \neq \mathcal{M}_{XX} \neq \mathcal{W}_{XX}.$$

Logo, $\mathcal{V}_{XX}\mathcal{S}_{XX}\mathcal{V}_{XX}$ *é uma nova memória para o conjunto fundamental* $\mathcal{X}$.

Exemplo 7

Pelo exemplo 2 temos $\mathcal{S}_{XX}(x) = [10 \;\; 5 \;\; 8 \; 10 \;\; 8]^T$, *onde* $x = [10 \; 0 \; 7 \; 4 \; 2]^T$. *Portanto,*

$$\mathcal{V}_{XX}(\mathcal{S}_{XX}(x)) = [8 \; 5 \; 8 \; 10 \; 6]^T.$$

Exemplo 7

Pelo exemplo 2 temos $\mathcal{S}_{XX}(x) = [10 \;\; 5 \;\; 8 \; 10 \;\; 8]^T$, *onde* $x = [10 \; 0 \; 7 \; 4 \; 2]^T$. *Portanto,*

$$\mathcal{V}_{XX}(\mathcal{S}_{XX}(x)) = [8 \; 5 \; 8 \; 10 \; 6]^T. \tag{69}$$

Note que

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{XX}\mathcal{S}_{XX} &\neq \mathcal{V}_{XX} \neq \mathcal{W}_{XX} \neq \mathcal{S}_{XX} && (70)\\ &\neq \mathcal{M}_{XX} \neq \mathcal{V}_{XX}\mathcal{S}_{XX}\mathcal{V}_{XX} \neq \mathcal{S}_{XX}\mathcal{V}_{XX} && (71) \end{aligned}$$

Considerações

Alguns questionamentos que serão investigados:

1. Os operadores $\mathcal{V}_{XX}$ e $\mathcal{S}_{XX}$ são filtros morfológicos. Será que os operadores $\mathcal{V}_{XX}\mathcal{S}_{XX}$ e $\mathcal{S}_{XX}\mathcal{V}_{XX}$ são filtros?

Considerações

Alguns questionamentos que serão investigados:

1. Os operadores $\mathcal{V}_{XX}$ e $\mathcal{S}_{XX}$ são filtros morfológicos. Será que os operadores $\mathcal{V}_{XX}\mathcal{S}_{XX}$ e $\mathcal{S}_{XX}\mathcal{V}_{XX}$ são filtros?
2. Conjectura: O conjuto dos pontos fixos do operador $\mathcal{V}_{XX}\mathcal{S}_{XX}$ é o mesmo conjunto dos pontos fixos de $\mathcal{V}_{XX}\mathcal{S}_{XX}\mathcal{V}_{XX}$.

Considerações

Alguns questionamentos que serão investigados:

1. Os operadores $\mathcal{V}_{XX}$ e $\mathcal{S}_{XX}$ são filtros morfológicos. Será que os operadores $\mathcal{V}_{XX}\mathcal{S}_{XX}$ e $\mathcal{S}_{XX}\mathcal{V}_{XX}$ são filtros?
2. Conjectura: O conjuto dos pontos fixos do operador $\mathcal{V}_{XX}\mathcal{S}_{XX}$ é o mesmo conjunto dos pontos fixos de $\mathcal{V}_{XX}\mathcal{S}_{XX}\mathcal{V}_{XX}$.
3. Quais são as tolerâncias das memórias $\mathcal{V}_{XX}$ e $\mathcal{S}_{XX}$ quando são apresentados padrões corrompidos das memórias fundamentais?
4. Quais são as versões das PAMMs para os padrões de entradas sendo um conjunto fuzzy?

Considerações

Alguns questionamentos que serão investigados:

1. Os operadores $\mathcal{V}_{XX}$ e $\mathcal{S}_{XX}$ são filtros morfológicos. Será que os operadores $\mathcal{V}_{XX}\mathcal{S}_{XX}$ e $\mathcal{S}_{XX}\mathcal{V}_{XX}$ são filtros?
2. Conjectura: O conjuto dos pontos fixos do operador $\mathcal{V}_{XX}\mathcal{S}_{XX}$ é o mesmo conjunto dos pontos fixos de $\mathcal{V}_{XX}\mathcal{S}_{XX}\mathcal{V}_{XX}$.
3. Quais são as tolerâncias das memórias $\mathcal{V}_{XX}$ e $\mathcal{S}_{XX}$ quando são apresentados padrões corrompidos das memórias fundamentais?
4. Quais são as versões das PAMMs para os padrões de entradas sendo um conjunto fuzzy?
5. Outros questionamentos que surgiram no processo de investigação.

Alguns questionamentos que serão investigados:

1. Os operadores $\mathcal{V}_{XX}$ e $\mathcal{S}_{XX}$ são filtros morfológicos. Será que os operadores $\mathcal{V}_{XX}\mathcal{S}_{XX}$ e $\mathcal{S}_{XX}\mathcal{V}_{XX}$ são filtros?
2. Conjectura: O conjuto dos pontos fixos do operador $\mathcal{V}_{XX}\mathcal{S}_{XX}$ é o mesmo conjunto dos pontos fixos de $\mathcal{V}_{XX}\mathcal{S}_{XX}\mathcal{V}_{XX}$.
3. Quais são as tolerâncias das memórias $\mathcal{V}_{XX}$ e $\mathcal{S}_{XX}$ quando são apresentados padrões corrompidos das memórias fundamentais?
4. Quais são as versões das PAMMs para os padrões de entradas sendo um conjunto fuzzy?
5. Outros questionamentos que surgiram no processo de investigação.

Obrigado!