MEMÓRIAS ASSOCIATIVAS MORFOLÓGICAS

Alex Santana dos Santos
Prof. Marcos Eduardo
Tópicos de Biomatemática

Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP

09 de abril de 2015.

ESTRUTURA DA APRESENTAÇÃO

Nossa apresentação será baseada no artigo dos pesquisadores Ritter, Sussner e Diaz-de-Leon, *Morphological Associative Memories*, IEEE VOL. 9, NO. 2, MARCH 1998.

1. Conceitos Básicos;
2. Memórias Associativas Morfológicas;
3. Kernel de matrizes (X, Y);

ESTRUTURA DA APRESENTAÇÃO

Nossa apresentação será baseada no artigo dos pesquisadores Ritter, Sussner e Diaz-de-Leon, *Morphological Associative Memories*, IEEE VOL. 9, NO. 2, MARCH 1998.

1. Conceitos Básicos;
2. Memórias Associativas Morfológicas;
3. Kernel de matrizes (X, Y);

Memórias Assocaitvas

Uma Memória Associativa (*AM*) é um modelo inspirado na maneira com que o cérebro humano armazena e recorda informações por associacão.

A finalidade embutida por trás deste modelo está em armazenar pares de associacões e recuperar corretamente um padrão que foi previamente armazenado em sua estrutura, a partir de um padrão incompleto ou ruidosa.

Memórias Assocaitvas

Uma Memória Associativa (*AM*) é um modelo inspirado na maneira com que o cérebro humano armazena e recorda informações por associacão.
A finalidade embutida por trás deste modelo está em armazenar pares de associacões e recuperar corretamente um padrão que foi previamente armazenado em sua estrutura, a partir de um padrão incompleto ou ruidosa.

Definição Matemática

Seja o conjunto $\{(x^\xi, y^\xi) : \xi = 1, \ldots, k\}$, onde $x^\xi \in \mathbb{R}^n$ e $y^\xi \in \mathbb{R}^m$, chamado conjunto das memórias fundamentais. Uma *AM* corresponde uma aplicação $\mathcal{M} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ tal que

$$\mathcal{M}(x^\xi) \cong y^\xi \textit{ para todo } \xi = 1, \ldots, k. \tag{1}$$

Formulação do problema

Dado um conjunto de memórias fundamentais, $\{(x^\xi, y^\xi) : \xi = 1, \ldots, k\}$, onde $x^\xi \in \mathbb{R}^n$ e $y^\xi \in \mathbb{R}^m$, queremos determinar uma aplicação $\mathcal{M} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ tal que

- $\mathcal{M}(x^\xi) = y^\xi$ *para todo* $\xi = 1, \ldots, k$;
- Dados padrões ruidosos ou incompletos $\tilde{x}^\xi$ de $x^\xi, \forall \xi = 1, \ldots, k$, a aplicação $\mathcal{M}$ deve ser capaz de recordar o padrão y^ξ, isto é $\mathcal{M}(\tilde{x}^\xi) = y^\xi$ *para todo* $\xi = 1, \ldots, k$.

Formulação do problema

Dado um conjunto de memórias fundamentais, $\{(x^\xi, y^\xi) : \xi = 1, \ldots, k\}$, onde $x^\xi \in \mathbb{R}^n$ e $y^\xi \in \mathbb{R}^m$, queremos determinar uma aplicação $\mathcal{M} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ tal que

- $\mathcal{M}(x^\xi) = y^\xi$ *para todo* $\xi = 1, \ldots, k$;
- Dados padrões ruidosos ou incompletos $\tilde{x}^\xi$ de $x^\xi, \forall \xi = 1, \ldots, k$, a aplicação $\mathcal{M}$ deve ser capaz de recordar o padrão y^ξ, isto é $\mathcal{M}(\tilde{x}^\xi) = y^\xi$ *para todo* $\xi = 1, \ldots, k$.

Formulação do problema

Dado um conjunto de memórias fundamentais, $\{(x^\xi, y^\xi) : \xi = 1, \ldots, k\}$, onde $x^\xi \in \mathbb{R}^n$ e $y^\xi \in \mathbb{R}^m$, queremos determinar uma aplicação $\mathcal{M} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ tal que

- $\mathcal{M}(x^\xi) = y^\xi$ *para todo* $\xi = 1, \ldots, k$;
- Dados padrões ruidosos ou incompletos $\tilde{x}^\xi$ de $x^\xi, \forall \xi = 1, \ldots, k$, a aplicação $\mathcal{M}$ deve ser capaz de recordar o padrão y^ξ, isto é $\mathcal{M}(\tilde{x}^\xi) = y^\xi$ *para todo* $\xi = 1, \ldots, k$.

Memórias Associativas lineares por correlação

Uma maneira para determinar uma memória associativa é usar o postulado de aprendizado do neuropsicólogo Hebb (1949).

Postulado de Hebbiano

Quando um axiônio da célula A está perto o suficiente para excitar uma célula B e partipa do seu disparo repetida ou persistentemente, então algum processo de crescimento ou modificação metabólico acontece em uma das células ou em ambas, de tal forma que a eficiência de A como uma célula que dispara B é aumentada. (Haykin, Simon)

Memórias Associativas lineares por correlação

Uma maneira para determinar uma memória associativa é usar o postulado de aprendizado do neuropsicólogo Hebb (1949).

Postulado de Hebbiano

Quando um axiônio da célula A está perto o suficiente para excitar uma célula B e partipa do seu disparo repetida ou persistentemente, então algum processo de crescimento ou modificação metabólico acontece em uma das células ou em ambas, de tal forma que a eficiência de A como uma célula que dispara B é aumentada. (Haykin, Simon)

Dado o conjunto de memórias fundamentais $\left\{(x^\xi, y^\xi) : \xi = 1, \ldots, k\right\}$, onde $x^\xi \in \mathbb{R}^n$ e $y^\xi \in \mathbb{R}^m$, podemos formular o postulado de Hebb no contexto de memórias associativas lineares da seguinte maneira:

Para que o padrão $y^\xi \in \mathbb{R}^m$ seja recordado depois da apresentação de $x^\xi \in \mathbb{R}^n$, o termo do peso sináptico w_{ij} tem que ser proporcional a ambos x_i^ξ e y_j^ξ

Assim, $w_{ij} = \sum_{\xi=1}^k y_i^\xi \cdot (x_j^\xi)$ é a entrada da matriz W. Logo, a matriz de correlação é dada por

$$W = \sum_{\xi=1}^{k} y^\xi \cdot (x^\xi)' \tag{2}$$

Dado o conjunto de memórias fundamentais $\{(x^\xi, y^\xi) : \xi = 1, \ldots, k\}$, onde $x^\xi \in \mathbb{R}^n$ e $y^\xi \in \mathbb{R}^m$, podemos formular o postulado de Hebb no contexto de memórias associativas lineares da seguinte maneira:

Para que o padrão $y^\xi \in \mathbb{R}^m$ seja recordado depois da apresentação de $x^\xi \in \mathbb{R}^n$, o termo do peso sináptico w_{ij} tem que ser proporcional a ambos x_i^ξ e y_j^ξ

Assim, $w_{ij} = \sum_{\xi=1}^{k} y_i^\xi \cdot (x_j^\xi)$ é a entrada da matriz W. Logo, a matriz de correlação é dada por

$$W = \sum_{\xi=1}^{k} y^\xi \cdot (x^\xi)' \tag{2}$$

Observação

Note que, se os vetores $x^1, \ldots, x^k$ são ortogonais, então

$$\begin{aligned} W \cdot x^i &= \left[y^1 \cdot (x^1)' + \ldots + y^i \cdot (x^i)' + \ldots + y^k \cdot (x^k)' \right] \cdot x^i \\ &= \left[y^1 \cdot (x^1)' \cdot x^i + \ldots + y^i \cdot (x^i)' \cdot x^i + \ldots + y^k \cdot (x^k)' \cdot x^i \right] \\ &= y^i. \end{aligned}$$

Assim, a aplicação $\mathcal{M} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ definida por

$$\mathcal{M}(x) = W \cdot x$$

é uma memória associativa linear baseada no armazenamento por correlação para o conjunto fundamental $\left\{(x^\xi, y^\xi) : \xi = 1, \ldots, k\right\}$ se, e somente se, os vetores $x^1, \ldots, x^k$ são ortogonais.

Álgebra Minimax

Memórias associativas morfológicas são descritas em termos dos produtos de matrizes que são definidos na teoria desenvolvida por Cuninghame-Green, denominada álgebra minimax. A caractéristica essencial desta estrutura algébrica é munir o conjunto dos números reais extendido com as operaçõoes binárias de máximo, mínimo e adição.

A base da artimética da estrutura algébrica $(\mathbb{R}_{-\infty}, \vee, +)$ e $(\mathbb{R}_{+\infty}, \wedge, +')$ são as seguintes

- $+$ adição usual com a seguinte soma dos termos:

$$a + (-\infty) = (-\infty) + a = -\infty \ \ \forall a \in \mathbb{R}_{-\infty};$$

- $+'$ é definida por $a + b = b + a$ (soma usual), $\forall a, b \in \mathbb{R}$ e

$$a +' (+\infty) = (+\infty) + a = +\infty \ \ \forall a \in \mathbb{R}_{+\infty};$$

- $\vee$ e $\wedge$ são as operações do máximo e mínimo.

A base da artimética da estrutura algébrica $(\mathbb{R}_{-\infty}, \vee, +)$ e $(\mathbb{R}_{+\infty}, \wedge, +')$ são as seguintes

- $+$ adição usual com a seguinte soma dos termos:

$$a + (-\infty) = (-\infty) + a = -\infty \ \ \forall a \in \mathbb{R}_{-\infty};$$

- $+'$ é definida por $a + b = b + a$ (soma usual), $\forall a, b \in \mathbb{R}$ e

$$a +' (+\infty) = (+\infty) + a = +\infty \ \ \forall a \in \mathbb{R}_{+\infty};$$

- $\vee$ e $\wedge$ são as operações do máximo e mínimo.

A base da artimética da estrutura algébrica $(\mathbb{R}_{-\infty}, \vee, +)$ e $(\mathbb{R}_{+\infty}, \wedge, +')$ são as seguintes

- $+$ adição usual com a seguinte soma dos termos:

$$a + (-\infty) = (-\infty) + a = -\infty \ \ \forall a \in \mathbb{R}_{-\infty};$$

- $+'$ é definida por $a + b = b + a$ (soma usual), $\forall a, b \in \mathbb{R}$ e

$$a +' (+\infty) = (+\infty) + a = +\infty \ \ \forall a \in \mathbb{R}_{+\infty};$$

- $\vee$ e $\wedge$ são as operações do máximo e mínimo.

A base da artimética da estrutura algébrica $(\mathbb{R}_{-\infty}, \vee, +)$ e $(\mathbb{R}_{+\infty}, \wedge, +')$ são as seguintes

- $+$ adição usual com a seguinte soma dos termos:

$$a + (-\infty) = (-\infty) + a = -\infty \;\; \forall a \in \mathbb{R}_{-\infty};$$

- $+'$ é definida por $a + b = b + a$ (soma usual), $\forall a, b \in \mathbb{R}$ e

$$a +' (+\infty) = (+\infty) + a = +\infty \;\; \forall a \in \mathbb{R}_{+\infty};$$

- $\vee$ e $\wedge$ são as operações do máximo e mínimo.

A base da artimética da estrutura algébrica $(\mathbb{R}_{-\infty}, \vee, +)$ e $(\mathbb{R}_{+\infty}, \wedge, +')$ são as seguintes

- $+$ adição usual com a seguinte soma dos termos:

$$a + (-\infty) = (-\infty) + a = -\infty \;\; \forall a \in \mathbb{R}_{-\infty};$$

- $+'$ é definida por $a + b = b + a$ (soma usual), $\forall a, b \in \mathbb{R}$ e

$$a +' (+\infty) = (+\infty) + a = +\infty \;\; \forall a \in \mathbb{R}_{+\infty};$$

- $\vee$ e $\wedge$ são as operações do máximo e mínimo.

Álgebra Minimax

Dada a estrutura algébrica $(\mathbb{R}_{-\infty}, \vee, +)$ e $(\mathbb{R}_{+\infty}, \wedge, +')$, então podemos definir as seguintes operações no espaço das matrizes $\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$.

Sejam as matrizes $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$ pertencentes à $\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, então o máximo $A \vee B$ e mínimo $A \wedge B$ são definidos, respectivamente

$$C = A \vee B \iff c_{ij} = a_{ij} \vee b_{ij}, \quad \forall i = 1, \ldots m \text{ e } j = 1 \ldots n; \tag{3}$$

$$D = A \wedge B \iff d_{ij} = a_{ij} \wedge b_{ij}, \quad \forall i = 1, \ldots m \text{ e } j = 1 \ldots n; \tag{4}$$

Álgebra Minimax

Dada a estrutura algébrica $(\mathbb{R}_{-\infty}, \vee, +)$ e $(\mathbb{R}_{+\infty}, \wedge, +')$, então podemos definir as seguintes operações no espaço das matrizes $\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$.

Sejam as matrizes $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$ pertencentes à $\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, então o máximo $A \vee B$ e mínimo $A \wedge B$ são definidos, respectivamente

$$C = A \vee B \Longleftrightarrow c_{ij} = a_{ij} \vee b_{ij}, \;\; \forall i = 1, \ldots m \text{ e } j = 1 \ldots n; \tag{3}$$

$$D = A \wedge B \Longleftrightarrow d_{ij} = a_{ij} \wedge b_{ij}, \;\; \forall i = 1, \ldots m \text{ e } j = 1 \ldots n; \tag{4}$$

Álgebra Minimax

Definição (Max-Produto e Min-Produto)

Sejam as matrizes $A \in \mathbb{R}^{m\times k}$ e $B \in \mathbb{R}^{k\times n}$.

1. *O max-produto de A por B é dado por*

$$C = A \boxtimes B \Longleftrightarrow c_{ij} = \bigvee_{\xi=1}^{k} (a_{i\xi} + b_{\xi j}), \quad \forall i = 1, \ldots m \text{ e } j = 1 \ldots n; \tag{5}$$

2. *O min-produto de A por B é dado por*

$$D = A \boxtimes B \Longleftrightarrow d_{ij} = \bigwedge_{\xi=1}^{k} (a_{i\xi} + b_{\xi j}), \quad \forall i = 1, \ldots m \text{ e } j = 1 \ldots n; \tag{6}$$

Álgebra Minimax

Definição (Max-Produto e Min-Produto)

Sejam as matrizes $A \in \mathbb{R}^{m \times k}$ *e* $B \in \mathbb{R}^{k \times n}$.

1. *O max-produto de A por B é dado por*

$$C = A \boxtimes B \iff c_{ij} = \bigvee_{\xi=1}^{k} (a_{i\xi} + b_{\xi j}), \quad \forall i = 1, \ldots m \text{ e } j = 1 \ldots n; \quad (5)$$

2. *O min-produto de A por B é dado por*

$$D = A \boxtimes B \iff d_{ij} = \bigwedge_{\xi=1}^{k} (a_{i\xi} + b_{\xi j}), \quad \forall i = 1, \ldots m \text{ e } j = 1 \ldots n; \quad (6)$$

Álgebra Minimax

Definição (Max-Produto e Min-Produto)

Sejam as matrizes $A \in \mathbb{R}^{m \times k}$ *e* $B \in \mathbb{R}^{k \times n}$.

1. *O max-produto de A por B é dado por*

$$C = A \boxvee B \Longleftrightarrow c_{ij} = \bigvee_{\xi=1}^{k} (a_{i\xi} + b_{\xi j}), \quad \forall i = 1, \ldots m \text{ e } j = 1 \ldots n; \tag{5}$$

2. *O min-produto de A por B é dado por*

$$D = A \boxwedge B \Longleftrightarrow d_{ij} = \bigwedge_{\xi=1}^{k} (a_{i\xi} + b_{\xi j}), \quad \forall i = 1, \ldots m \text{ e } j = 1 \ldots n; \tag{6}$$

Álgebra Minimax

Sejam as matrizes $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$ pertencentes à $\mathbb{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$.

$$A \leq B \Longleftrightarrow a_{ij} \leq b_{ij}, \quad \forall i = 1, \ldots m \text{ e } j = 1 \ldots n; \tag{7}$$

Dada a estrutura algébrica $(\mathbb{R}, \vee, \wedge, +)$ e $r \in \mathbb{R}$, definimos o seu conjugado aditivo r^* como $r^* = -r$. Consequentemente,

$$(r^*)^* = r \quad e \quad r \wedge u = (r^* \vee u^*)^* \quad \forall r, u \in \mathbb{R}. \tag{8}$$

Álgebra Minimax

Sejam as matrizes $A = \left[a_{ij}\right]$ e $B = \left[b_{ij}\right]$ pertencentes à $\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$.

$$A \leq B \iff a_{ij} \leq b_{ij}, \;\; \forall i = 1, \ldots m \text{ e } j = 1 \ldots n; \tag{7}$$

Dada a estrutura algébrica $(\mathbb{R}, \vee, \wedge, +)$ e $r \in \mathbb{R}$, definimos o seu conjugado aditivo r^* como $r^* = -r$. Consequentemente,

$$(r^*)^* = r \;\; e \;\; r \wedge u = (r^* \vee u^*)^* \;\; \forall r, u \in \mathbb{R}. \tag{8}$$

Álgebra Minimax

Sejam as matrizes $A = \left[a_{ij}\right]$ e $B = \left[b_{ij}\right]$ pertencentes à $\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$.

$$A \leq B \Longleftrightarrow a_{ij} \leq b_{ij}, \quad \forall i = 1, \ldots m \text{ e } j = 1 \ldots n; \tag{7}$$

Dada a estrutura algébrica $(\mathbb{R}, \vee, \wedge, +)$ e $r \in \mathbb{R}$, definimos o seu conjugado aditivo r^* como $r^* = -r$. Consequentemente,

$$(r^*)^* = r \quad e \quad r \wedge u = (r^* \vee u^*)^* \quad \forall r, u \in \mathbb{R}. \tag{8}$$

Álgebra Minimax

Definição (Matriz Conjugada)

A matriz conjugada de $A \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ *é a matriz* $A^* \in \mathbb{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ *tal que suas entradas satisfazem*

$$a^*_{ij} = -a_{ji} \quad \forall i = 1, \ldots, m \text{ e } j = 1, \ldots, n.$$

Propriedade (Dualidade das Operações)

Sejam as $A \in \mathbb{R}^{m\times k}$, $B \in \mathbb{R}^{k\times n}$ *e* $C \in \mathbb{R}^{n\times m}$, *então*

1. $A \wedge B = (A^* \vee B^*)^*$;
2. $A \boxed{\wedge} B = (B^* \boxed{\vee} A^*)^*$;
3. $A \boxed{\vee} B \leq C \iff B \leq A^* \boxed{\wedge} C \iff A \leq C \boxed{\wedge} B^*$;

Álgebra Minimax

Definição (Matriz Conjugada)

A matriz conjugada de $A \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ é a matriz $A^* \in \mathbb{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ tal que suas entradas satisfazem

$$a^*_{ij} = -a_{ji} \quad \forall i = 1, \ldots, m \text{ e } j = 1, \ldots, n.$$

Propriedade (Dualidade das Operações)

Sejam as $A \in \mathbb{R}^{m\times k}$, $B \in \mathbb{R}^{k\times n}$ e $C \in \mathbb{R}^{n\times m}$, então

1. $A \wedge B = (A^* \vee B^*)^*$;
2. $A \boxed{\wedge} B = (B^* \boxed{\vee} A^*)^*$;
3. $A \boxed{\vee} B \leq C \iff B \leq A^* \boxed{\wedge} C \iff A \leq C \boxed{\wedge} B^*$;

Álgebra Minimax

Definição (Matriz Conjugada)

A matriz conjugada de $A \in \mathbb{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ é a matriz $A^* \in \mathbb{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$ tal que suas entradas satisfazem

$$a^*_{ij} = -a_{ji} \quad \forall i = 1, \ldots, m \text{ e } j = 1, \ldots, n.$$

Propriedade (Dualidade das Operações)

Sejam as $A \in \mathbb{R}^{m \times k}$, $B \in \mathbb{R}^{k \times n}$ e $C \in \mathbb{R}^{n \times m}$, então

1. $A \wedge B = (A^* \vee B^*)^*$;
2. $A \mathbin{\boxed{\wedge}} B = (B^* \mathbin{\boxed{\vee}} A^*)^*$;
3. $A \mathbin{\boxed{\vee}} B \leq C \iff B \leq A^* \mathbin{\boxed{\wedge}} C \iff A \leq C \mathbin{\boxed{\wedge}} B^*$;

Álgebra Minimax

Definição (Matriz Conjugada)

A matriz conjugada de $A \in \mathbb{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ *é a matriz* $A^* \in \mathbb{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$ *tal que suas entradas satisfazem*

$$a^*_{ij} = -a_{ji} \quad \forall i = 1, \ldots, m \text{ e } j = 1, \ldots, n.$$

Propriedade (Dualidade das Operações)

Sejam as $A \in \mathbb{R}^{m \times k}$, $B \in \mathbb{R}^{k \times n}$ *e* $C \in \mathbb{R}^{n \times m}$, *então*

1. $A \wedge B = (A^* \vee B^*)^*$;
2. $A \boxed{\wedge} B = (B^* \boxed{\vee} A^*)^*$;
3. $A \boxed{\vee} B \leq C \iff B \leq A^* \boxed{\wedge} C \iff A \leq C \boxed{\wedge} B^*$;

Álgebra Minimax

Definição (Matriz Conjugada)

A matriz conjugada de $A \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ *é a matriz* $A^* \in \mathbb{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ *tal que suas entradas satisfazem*

$$a^*_{ij} = -a_{ji} \quad \forall i = 1, \dots, m \text{ e } j = 1, \dots, n.$$

Propriedade (Dualidade das Operações)

Sejam as $A \in \mathbb{R}^{m\times k}$, $B \in \mathbb{R}^{k\times n}$ *e* $C \in \mathbb{R}^{n\times m}$, *então*

1. $A \wedge B = (A^* \vee B^*)^*$;
2. $A \mathbin{\boxed{\wedge}} B = (B^* \mathbin{\boxed{\vee}} A^*)^*$;
3. $A \mathbin{\boxed{\vee}} B \leq C \iff B \leq A^* \mathbin{\boxed{\wedge}} C \iff A \leq C \mathbin{\boxed{\wedge}} B^*$;

Definição (Matriz Conjugada)

A matriz conjugada de $A \in \mathbb{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ é a matriz $A^* \in \mathbb{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$ tal que suas entradas satisfazem

$$a_{ij}^* = -a_{ji} \quad \forall i = 1, \ldots, m \text{ e } j = 1, \ldots, n.$$

Propriedade (Dualidade das Operações)

Sejam as $A \in \mathbb{R}^{m \times k}$, $B \in \mathbb{R}^{k \times n}$ e $C \in \mathbb{R}^{n \times m}$, então

1. $A \wedge B = (A^* \vee B^*)^*$;
2. $A \boxed{\wedge} B = (B^* \boxed{\vee} A^*)^*$;
3. $A \boxed{\vee} B \leq C \iff B \leq A^* \boxed{\wedge} C \iff A \leq C \boxed{\wedge} B^*$;

Memórias Associativas Morfológicas (MAMs)

Memórias associativas morfológicas originou-se à medida em que a álgebra de imagens estava sendo desenvolvida por Ritter. O desenvolvimento da álgebra de imagens foi impulsionada pelas necessidades da Força Aérea Americana de uma linguagem unificada de processamentos de imagens.

O objetivo era criar uma estrutura algébrica unificada e completa que fornecesse um ambiente matemático para o desenvolvimento de algoritmos em processamento de imagens, sua otimização, comparação, codificação e avaliação de performance.

Foi mostrado que a álgebra minimax (que descreve as operações do produto de matrizes nas Memórias Associativas Morfológicas) é uma subálgebra da álgebra de imagens.

Memórias Associativas Morfológicas (MAMs)

Memórias associativas morfológicas originou-se à medida em que a álgebra de imagens estava sendo desenvolvida por Ritter. O desenvolvimento da álgebra de imagens foi impulsionada pelas necessidades da Força Aérea Americana de uma linguagem unificada de processamentos de imagens.
O objetivo era criar uma estrutura algébrica unificada e completa que fornecesse um ambiente matemático para o desenvolvimento de algoritmos em processamento de imagens, sua otimização, comparação, codificação e avaliação de performance.
Foi mostrado que a álgebra minimax (que descreve as operações do produto de matrizes nas Memórias Associativas Morfológicas) é uma subálgebra da álgebra de imagens.

Memórias Associativas Morfológicas (MAMs)

Memórias associativas morfológicas originou-se à medida em que a álgebra de imagens estava sendo desenvolvida por Ritter. O desenvolvimento da álgebra de imagens foi impulsionada pelas necessidades da Força Aérea Americana de uma linguagem unificada de processamentos de imagens.
O objetivo era criar uma estrutura algébrica unificada e completa que fornecesse um ambiente matemático para o desenvolvimento de algoritmos em processamento de imagens, sua otimização, comparação, codificação e avaliação de performance.
Foi mostrado que a álgebra minimax (que descreve as operações do produto de matrizes nas Memórias Associativas Morfológicas) é uma subálgebra da álgebra de imagens.

Memórias Associativas Morfológicas (MAMs)

Memórias associativas morfológicas originou-se à medida em que a álgebra de imagens estava sendo desenvolvida por Ritter. O desenvolvimento da álgebra de imagens foi impulsionada pelas necessidades da Força Aérea Americana de uma linguagem unificada de processamentos de imagens.

O objetivo era criar uma estrutura algébrica unificada e completa que fornecesse um ambiente matemático para o desenvolvimento de algoritmos em processamento de imagens, sua otimização, comparação, codificação e avaliação de performance.

Foi mostrado que a álgebra minimax (que descreve as operações do produto de matrizes nas Memórias Associativas Morfológicas) é uma subálgebra da álgebra de imagens.

Dado um conjunto de memórias fundamentais, $\left\{(x^\xi, y^\xi) : \xi = 1, \ldots, k\right\}$, onde $x^\xi \in \mathbb{R}^n$ e $y^\xi \in \mathbb{R}^m$, a MAM é aplicação $\mathcal{M}_{XY} : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ dada por

$$\mathcal{M}_{XY}(x) = M_{XY} \mathbin{\boxed{\wedge}} x \tag{9}$$

para alguma matriz $M_{XY} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, denominada de matriz de peso sinápticos.

A MAM é aplicação $\mathcal{W}_{XY} : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ dada por

$$\mathcal{W}_{XY}(x) = W_{XY} \mathbin{\boxed{\vee}} x \tag{10}$$

para alguma matriz $W_{XY} \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Formulação Matemática

Dado um conjunto de memórias fundamentais, $\{(x^\xi, y^\xi) : \xi = 1, \ldots, k\}$, onde $x^\xi \in \mathbb{R}^n$ e $y^\xi \in \mathbb{R}^m$, a MAM é aplicação $\mathcal{M}_{XY} : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ dada por

$$\mathcal{M}_{XY}(x) = M_{XY} \boxed{\wedge} x \tag{9}$$

para alguma matriz $M_{XY} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, denominada de matriz de peso sinápticos.
A MAM é aplicação $\mathcal{W}_{XY} : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ dada por

$$\mathcal{W}_{XY}(x) = W_{XY} \boxed{\vee} x \tag{10}$$

para alguma matriz $W_{XY} \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Observação

Em virtude das propriedades de dualidade, nós iremos concentrar as demonstrações dos resultados apenas para aplicação $\mathcal{W}_{XY}$*, visto que resultados análogos são obtidos usando as propriedades de dualidade para aplicação* $\mathcal{M}_{XY}$

Memórias Associativas Morfológicas (MAMs)

A matriz dos pesos sinápticos $W_{XY} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ é a solução do seguinte problema:

Dado um conjunto de memórias fundamentais, $\{(x^\xi, y^\xi) : \xi = 1, \ldots, k\} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, a matriz W_{XY} satisfaz

$$W_{XY} = \bigvee \left\{ A \in \mathbb{R}^{m \times n} : A \boxtimes x^\xi \leq y^\xi, \forall \xi = 1, \ldots, k \right\} \quad (11)$$

Memórias Associativas Morfológicas (MAMs)

A matriz dos pesos sinápticos $W_{XY} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ é a solução do seguinte problema:

Dado um conjunto de memórias fundamentais, $\left\{(x^\xi, y^\xi) : \xi = 1, \ldots, k\right\} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, a matriz W_{XY} satisfaz

$$W_{XY} = \bigvee \left\{A \in \mathbb{R}^{m \times n} : A \boxed{\vee} x^\xi \leq y^\xi, \forall \xi = 1, \ldots, k\right\} \tag{11}$$

Memórias Associativas Morfológicas (MAMs)

A solução de (11) pode ser obitida usando a versão minimax do armazenamento por correlação, isto é

$$W_{XY} = Y \boxtimes X^*, \tag{12}$$

onde $X = [x^1 x^2 \ldots x^k] \in \mathbb{R}^{n \times k}$ e $Y = [y^1 y^2 \ldots y^k] \in \mathbb{R}^{m \times k}$ são as matrizes cujas colunas correspondem os vetores dos pares do conjunto de memórias fundamentais.

Equivalentemente,

$$W_{XY} = \bigwedge_{\xi=1}^{k} (y^\xi \boxtimes (-x^\xi)'), \tag{13}$$

onde $y^\xi \boxtimes (-x^\xi)' = \begin{bmatrix} y_1^\xi - x_1^\xi & y_1^\xi - x_2^\xi & \ldots & y_1^\xi - x_n^\xi \\ y_2^\xi - x_1^\xi & y_2^\xi - x_2^\xi & \ldots & y_2^\xi - x_n^\xi \\ \vdots & \ddots & \ldots & \vdots \\ y_m^\xi - x_1^\xi & y_m^\xi - x_2^\xi & \ldots & y_m^\xi - x_n^\xi \end{bmatrix}$

Memórias Associativas Morfológicas (MAMs)

A solução de (11) pode ser obitida usando a versão minimax do armazenamento por correlação, isto é

$$W_{XY} = Y \boxed{\wedge} X^*, \tag{12}$$

onde $X = \left[x^1 x^2 \ldots x^k\right] \in \mathbb{R}^{n \times k}$ e $Y = \left[y^1 y^2 \ldots y^k\right] \in \mathbb{R}^{m \times k}$ são as matrizes cujas colunas correspondem os vetores dos pares do conjunto de memórias fundamentais.

Equivalentemente,

$$W_{XY} = \bigwedge_{\xi=1}^{k} (y^\xi \boxed{\wedge} (-x^\xi)'), \tag{13}$$

onde $y^\xi \boxed{\wedge} (-x^\xi)' = \begin{bmatrix} y_1^\xi - x_1^\xi & y_1^\xi - x_2^\xi & \ldots & y_1^\xi - x_n^\xi \\ y_2^\xi - x_1^\xi & y_2^\xi - x_2^\xi & \ldots & y_2^\xi - x_n^\xi \\ \vdots & \ddots & \ldots & \vdots \\ y_m^\xi - x_1^\xi & y_m^\xi - x_2^\xi & \ldots & y_m^\xi - x_n^\xi \end{bmatrix}$

Memórias Associativas Morfológicas (MAMs)

A solução de (11) pode ser obitida usando a versão minimax do armazenamento por correlação, isto é

$$W_{XY} = Y \boxed{\wedge} X^*, \tag{12}$$

onde $X = \left[x^1 x^2 \ldots x^k\right] \in \mathbb{R}^{n \times k}$ e $Y = \left[y^1 y^2 \ldots y^k\right] \in \mathbb{R}^{m \times k}$ são as matrizes cujas colunas correspondem os vetores dos pares do conjunto de memórias fundamentais.
Equivalentemente,

$$W_{XY} = \bigwedge_{\xi=1}^{k} \left(y^\xi \boxed{\wedge} (-x^\xi)'\right), \tag{13}$$

onde $y^\xi \boxed{\wedge} (-x^\xi)' = \begin{bmatrix} y_1^\xi - x_1^\xi & y_1^\xi - x_2^\xi & \ldots & y_1^\xi - x_n^\xi \\ y_2^\xi - x_1^\xi & y_2^\xi - x_2^\xi & \ldots & y_2^\xi - x_n^\xi \\ \vdots & \ddots & \ldots & \vdots \\ y_m^\xi - x_1^\xi & y_m^\xi - x_2^\xi & \ldots & y_m^\xi - x_n^\xi \end{bmatrix}$

Memórias Associativas Morfológicas (MAMs)

A solução de (11) pode ser obitida usando a versão minimax do armazenamento por correlação, isto é

$$W_{XY} = Y \boxtimes X^*, \tag{12}$$

onde $X = \left[x^1 x^2 \ldots x^k\right] \in \mathbb{R}^{n \times k}$ e $Y = \left[y^1 y^2 \ldots y^k\right] \in \mathbb{R}^{m \times k}$ são as matrizes cujas colunas correspondem os vetores dos pares do conjunto de memórias fundamentais.
Equivalentemente,

$$W_{XY} = \bigwedge_{\xi=1}^{k} (y^\xi \boxtimes (-x^\xi)'), \tag{13}$$

onde $y^\xi \boxtimes (-x^\xi)' = \begin{bmatrix} y_1^\xi - x_1^\xi & y_1^\xi - x_2^\xi & \ldots & y_1^\xi - x_n^\xi \\ y_2^\xi - x_1^\xi & y_2^\xi - x_2^\xi & \ldots & y_2^\xi - x_n^\xi \\ \vdots & \ddots & \ldots & \vdots \\ y_m^\xi - x_1^\xi & y_m^\xi - x_2^\xi & \ldots & y_m^\xi - x_n^\xi \end{bmatrix}$

Memórias Associativas Morfológicas (MAMs)

Demonstração

Vamos mostrar que $W_{XY} \boxed{\vee}\, x^{\xi} \leq y^{\xi}, \forall \xi = 1, \ldots, k$*, além disso se* $A \boxed{\vee}\, x^{\xi} \leq y^{\xi}, \forall \xi = 1, \ldots, k$*, então* $A \leq W_{XY}$*.*

De fato, segue da definição da matriz W_{XY} *que*

$$W_{XY} = \bigwedge_{\xi=1}^{k} \left(y^{\xi} \boxed{\wedge}\, (-x^{\xi})'\right) \leq y^{\xi} \boxed{\wedge}\, (-x^{\xi})', \tag{14}$$

Assim,

$$W_{XY} \boxed{\vee}\, x^{\xi} \leq \left[y^{\xi} \boxed{\wedge}\, (-x^{\xi})'\right] \boxed{\vee}\, x^{\xi} = y^{\xi}. \tag{15}$$

Logo, $W_{XY} \boxed{\vee}\, x^{\xi} \leq y^{\xi}$.

Memórias Associativas Morfológicas (MAMs)

Demonstração

Vamos mostrar que $W_{XY} \boxed{\vee}\, x^{\xi} \leq y^{\xi}, \forall \xi = 1, \ldots, k$*, além disso se* $A \boxed{\vee}\, x^{\xi} \leq y^{\xi}, \forall \xi = 1, \ldots, k$*, então* $A \leq W_{XY}$*.*
De fato, segue da definição da matriz W_{XY} *que*

$$W_{XY} = \bigwedge_{\xi=1}^{k} \left(y^{\xi} \boxed{\wedge} (-x^{\xi})'\right) \leq y^{\xi} \boxed{\wedge} (-x^{\xi})', \tag{14}$$

Assim,

$$W_{XY} \boxed{\vee}\, x^{\xi} \leq \left[y^{\xi} \boxed{\wedge} (-x^{\xi})'\right] \boxed{\vee}\, x^{\xi} = y^{\xi}. \tag{15}$$

Logo, $W_{XY} \boxed{\vee}\, x^{\xi} \leq y^{\xi}$.

Memórias Associativas Morfológicas (MAMs)

Demonstração

Vamos mostrar que $W_{XY} \boxdot x^{\xi} \leq y^{\xi}, \forall \xi = 1, \ldots, k$, *além disso se* $A \boxdot x^{\xi} \leq y^{\xi}, \forall \xi = 1, \ldots, k$, *então* $A \leq W_{XY}$.
De fato, segue da definição da matriz W_{XY} *que*

$$W_{XY} = \bigwedge_{\xi=1}^{k} (y^{\xi} \boxtimes (-x^{\xi})') \leq y^{\xi} \boxtimes (-x^{\xi})', \tag{14}$$

Assim,

$$W_{XY} \boxdot x^{\xi} \leq \left[y^{\xi} \boxtimes (-x^{\xi})' \right] \boxdot x^{\xi} = y^{\xi}. \tag{15}$$

Logo, $W_{XY} \boxdot x^{\xi} \leq y^{\xi}$.

Memórias Associativas Morfológicas (MAMs)

Demonstração

Vamos mostrar que $W_{XY} \boxvee x^\xi \leq y^\xi, \forall \xi = 1, \ldots, k$*, além disso se* $A \boxvee x^\xi \leq y^\xi, \forall \xi = 1, \ldots, k$*, então* $A \leq W_{XY}$*.*
De fato, segue da definição da matriz W_{XY} *que*

$$W_{XY} = \bigwedge_{\xi=1}^{k} (y^\xi \boxwedge (-x^\xi)') \leq y^\xi \boxvee (-x^\xi)', \tag{14}$$

Assim,

$$W_{XY} \boxvee x^\xi \leq \left[y^\xi \boxwedge (-x^\xi)' \right] \boxvee x^\xi = y^\xi. \tag{15}$$

Logo, $W_{XY} \boxvee x^\xi \leq y^\xi$.

Memórias Associativas Morfológicas (MAMs)

Demonstração

Ainda, se $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ *tal que* $A \boxtimes x^{\xi} \leq y^{\xi}, \forall \xi = 1, \ldots, k$*, então*

$$
\begin{aligned}
(A \boxtimes x^{(\xi)})_i \leq y_i^{(\xi)} \quad & \Longleftrightarrow \quad \bigvee_{\xi=1}^{k} (a_{ij} + x_j^{(\xi)}) \leq y_i^{(\xi)} \\
& \Longleftrightarrow \quad a_{ij} + x_j^{(\xi)} \leq y_i^{(\xi)} \Longleftrightarrow a_{ij} \leq y_i^{(\xi)} - x_j^{(\xi)} \\
& \Longleftrightarrow \quad a_{ij} \leq \bigwedge_{\xi=1}^{k} (y_i^{(\xi)} - x_j^{(\xi)}) \Longleftrightarrow a_{ij} \leq w_{ij},
\end{aligned}
$$

$\forall i = 1, \cdots, m$ *e* $\forall j = 1, \cdots, n$*. Portanto, temos* $A \leq W_{XY}$*.*

Definição

Sejam $X = \left[x^1 x^2 \dots x^k\right] \in \mathbb{R}^{n \times k}$ *e* $Y = \left[y^1 y^2 \dots y^k\right] \in \mathbb{R}^{m \times k}$ *matrizes cujas colunas correspondem os vetores do conjunto* $\left\{(x^\xi, y^\xi) : \xi = 1, \dots, k\right\}$ *de memórias fundamentais, respectivamente. Dizemos que a matriz* $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ *é* $\boxed{\vee}$ $-$*perfeita do par* (X, Y)*, se* $A \boxed{\vee}\, x^\xi = y^\xi, \forall \xi = 1, \cdots, k$.

Corolário

Se existe uma matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ $\boxed{\vee}$ $-$perfeita, então a matriz $W_{XY} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ satisfaz $W_{XY} \boxed{\vee}\, x^{\xi} = y^{\xi}, \forall \xi = 1, \cdots, k$.

Demonstração

Segue da desigualdade (15) que, $W_{XY} \boxed{\vee}\, x^{\xi} \leq y^{\xi}, \forall \xi = 1, \cdots, k$ Além disso, pela hipótese existe uma matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tal que $A \boxed{\vee}\, x^{\xi} = y^{\xi} \forall \xi = 1, \cdots, k$. Assim,

$$y^{\xi} = A \boxed{\vee}\, x^{\xi} \leq W_{XY} \boxed{\vee}\, x^{\xi} \leq y^{\xi}, \quad \forall \xi = 1, \cdots, k. \tag{16}$$

Portanto, $W_{XY} \boxed{\vee}\, x^{\xi} = y^{\xi}$.

Corolário

Se existe uma matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ $\boxed{\vee}$ $-$*perfeita, então a matriz* $W_{XY} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *satisfaz* $W_{XY} \boxed{\vee}\, x^{\xi} = y^{\xi}, \forall \xi = 1, \cdots, k.$

Demonstração

Segue da desigualdade (15) que, $W_{XY} \boxed{\vee}\, x^{\xi} \leq y^{\xi}, \forall \xi = 1, \cdots, k$
Além disso, pela hipótese existe uma matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *tal que* $A \boxed{\vee}\, x^{\xi} = y^{\xi} \forall \xi = 1, \cdots, k$. *Assim,*

$$y^{\xi} = A \boxed{\vee}\, x^{\xi} \leq W_{XY} \boxed{\vee}\, x^{\xi} \leq y^{\xi}, \;\; \forall \xi = 1, \cdots, k. \tag{16}$$

Portanto, $W_{XY} \boxed{\vee}\, x^{\xi} = y^{\xi}$.

Teorema 1

Se W_{XY} é $\boxed{\vee} -$ perfeita para o par (X, Y) se, e somente se, para cada $\xi = 1, \cdots, k$, cada linha da matriz

$$\left[y^{\xi} \boxed{\wedge} (-x^{\xi})' \right] - W_{XY} \tag{17}$$

contém uma entrada nula.

Memórias Associativas Morfológicas (MAMs)

Demonstração

Se W_{XY} *é* $\boxdot -$ *perfeita para o par* (X, Y)

$$
\begin{aligned}
&\iff (W_{XY} \boxdot x^{\xi})_i = y_i^{\xi}, \ \ \forall \xi = 1, \cdots, k \ e \ \forall i = 1, \cdots, m \\
&\iff y_i^{\xi} - (W_{XY} \boxdot x^{\xi})_i = 0, \ \ \forall \xi = 1, \cdots, k \ e \ \forall i = 1, \cdots, m \\
&\iff y_i^{\xi} - \bigvee_{j=1}^{n} (w_{ij} + x_j^{\xi}) = 0, \ \ \forall \xi = 1, \cdots, k \ e \ \forall i = 1, \cdots, m
\end{aligned}
$$

Memórias Associativas Morfológicas (MAMs)

Demonstração

Se W_{XY} *é* $\boxvee$ *− perfeita para o par* (X, Y)

$$
\begin{aligned}
&\iff \quad (W_{XY} \boxvee x^{\xi})_i = y_i^{\xi}, \ \ \forall \xi = 1, \cdots, k \ e \ \forall i = 1, \cdots, m \\
&\iff \quad y_i^{\xi} - (W_{XY} \boxvee x^{\xi})_i = 0, \ \ \forall \xi = 1, \cdots, k \ e \ \forall i = 1, \cdots, m \\
&\iff \quad y_i^{\xi} - \bigvee_{j=1}^{n} (w_{ij} + x_j^{\xi}) = 0, \ \ \forall \xi = 1, \cdots, k \ e \ \forall i = 1, \cdots, m
\end{aligned}
$$

Memórias Associativas Morfológicas (MAMs)

Demonstração

Se W_{XY} *é* $\boxed{\vee} -$ *perfeita para o par* (X, Y)

$$\begin{aligned}
&\iff (W_{XY} \boxed{\vee}\, x^{\xi})_i = y_i^{\xi}, \;\; \forall \xi = 1, \cdots, k \text{ e } \forall i = 1, \cdots, m \\
&\iff y_i^{\xi} - (W_{XY} \boxed{\vee}\, x^{\xi})_i = 0, \;\; \forall \xi = 1, \cdots, k \text{ e } \forall i = 1, \cdots, m \\
&\iff y_i^{\xi} - \bigvee_{j=1}^{n} (w_{ij} + x_j^{\xi}) = 0, \;\; \forall \xi = 1, \cdots, k \text{ e } \forall i = 1, \cdots, m
\end{aligned}$$

Memórias Associativas Morfológicas (MAMs)

Demonstração

Se W_{XY} *é* $\boxtimes$ $-$ *perfeita para o par* (X, Y)

$$
\begin{aligned}
&\iff (W_{XY} \boxtimes x^{\xi})_i = y_i^{\xi}, \;\; \forall \xi = 1, \cdots, k \text{ e } \forall i = 1, \cdots, m \\
&\iff y_i^{\xi} - (W_{XY} \boxtimes x^{\xi})_i = 0, \;\; \forall \xi = 1, \cdots, k \text{ e } \forall i = 1, \cdots, m \\
&\iff y_i^{\xi} - \bigvee_{j=1}^{n} (w_{ij} + x_j^{\xi}) = 0, \;\; \forall \xi = 1, \cdots, k \text{ e } \forall i = 1, \cdots, m
\end{aligned}
$$

Memórias Associativas Morfológicas (MAMs)

Demonstração

$$\iff \quad y_i^\xi + \bigwedge_{j=1}^{n}(-w_{ij} - x_j^\xi) = 0, \;\; \forall \xi = 1, \cdots, k \text{ e } \forall i = 1, \cdots, m$$

$$\iff \quad \bigwedge_{j=1}^{n}(y_i^\xi - x_j^\xi - w_{ij}) = 0, \;\; \forall \xi = 1, \cdots, k \text{ e } \forall i = 1, \cdots, m$$

$$\iff \quad \bigwedge_{j=1}^{n}\left[y^\xi \boxtimes (-x^\xi)' - W_{XY}\right]_{ij} = 0, \;\; \forall \xi = 1, \cdots, k \text{ e } \forall i = 1, \cdots, m$$

Assim, ultima equação é verdadeira se, e somente se, a coluna da i-ésima linha de entrada da matriz $y^\xi \boxtimes (-x^\xi)' - W_{XY}$ contém um elemento nulo na entrada.

Memórias Associativas Morfológicas (MAMs)

Demonstração

$$\iff \quad y_i^\xi + \bigwedge_{j=1}^{n} (-w_{ij} - x_j^\xi) = 0, \quad \forall \xi = 1, \cdots, k \text{ e } \forall i = 1, \cdots, m$$

$$\iff \quad \bigwedge_{j=1}^{n} (y_i^\xi - x_j^\xi - w_{ij}) = 0, \quad \forall \xi = 1, \cdots, k \text{ e } \forall i = 1, \cdots, m$$

$$\iff \quad \bigwedge_{j=1}^{n} \left[y^\xi \boxtimes (-x^\xi)' - W_{XY} \right]_{ij} = 0, \quad \forall \xi = 1, \cdots, k \text{ e } \forall i = 1, \cdots, m$$

Assim, ultima equação é verdadeira se, e somente se, a coluna da i-ésima linha de entrada da matriz $y^\xi \boxtimes (-x^\xi)' - W_{XY}$ contém um elemento nulo na entrada.

Memórias Associativas Morfológicas (MAMs)

Demonstração

$$\iff \quad y_i^\xi + \bigwedge_{j=1}^{n}(-w_{ij} - x_j^\xi) = 0, \;\; \forall \xi = 1, \cdots, k \text{ e } \forall i = 1, \cdots, m$$

$$\iff \quad \bigwedge_{j=1}^{n}(y_i^\xi - x_j^\xi - w_{ij}) = 0, \;\; \forall \xi = 1, \cdots, k \text{ e } \forall i = 1, \cdots, m$$

$$\iff \quad \bigwedge_{j=1}^{n} \left[y^\xi \boxtimes (-x^\xi)' - W_{XY} \right]_{ij} = 0, \;\; \forall \xi = 1, \cdots, k \text{ e } \forall i = 1, \cdots, m$$

Assim, ultima equação é verdadeira se, e somente se, a coluna da i-ésima linha de entrada da matriz $y^\xi \boxtimes (-x^\xi)' - W_{XY}$ contém um elemento nulo na entrada.

Memórias Associativas Morfológicas (MAMs)

Demonstração

$$\Longleftrightarrow \quad y_i^{\xi} + \bigwedge_{j=1}^{n} (-w_{ij} - x_j^{\xi}) = 0, \;\; \forall \xi = 1, \cdots, k \text{ e } \forall i = 1, \cdots, m$$

$$\Longleftrightarrow \quad \bigwedge_{j=1}^{n} (y_i^{\xi} - x_j^{\xi} - w_{ij}) = 0, \;\; \forall \xi = 1, \cdots, k \text{ e } \forall i = 1, \cdots, m$$

$$\Longleftrightarrow \quad \bigwedge_{j=1}^{n} \left[y^{\xi} \boxed{\wedge} (-x^{\xi})' - W_{XY} \right]_{ij} = 0, \;\; \forall \xi = 1, \cdots, k \text{ e } \forall i = 1, \cdots, m$$

Assim, ultima equação é verdadeira se, e somente se, a coluna da i-ésima linha de entrada da matriz $y^{\xi} \boxed{\wedge} (-x^{\xi})' - W_{XY}$ *contém um elemento nulo na entrada.*

Observação

O teorema estabelece que $W_{XY} \boxed{\vee}\, x^\xi = y^\xi, \forall \xi = 1, \ldots, k$ se, e somente se, para cada linha $i = 1, \cdots, m$ e cada $\xi \in \{1, \ldots, k\}$ existe uma índice $j \in \{1, \ldots, k\}$ com j dependendo de i e ξ, tal que

$$w_{ij} = \left[y^\xi \boxed{\wedge}\, x^\xi \right]_{ij}.$$

Memórias Associativas Morfológicas (MAMs)

Corolário

$W_{XY} \boxtimes X = Y$ se, e somente se, para cada linha $i = 1, \cdots, m$ e cada $\gamma \in \{1, \ldots, k\}$ existe um de índice $j \in \{1, \ldots, k\}$, j dependendo de i e γ, tal que

$$x_j^\gamma = \bigvee_{\xi=1}^{k} (x_j^\xi - y_i^\xi) + y_i^\gamma \tag{18}$$

Demonstração

Pelo teorema $W_{XY} \boxtimes x^\xi = y^\xi, \forall \xi = 1, \ldots, k$ se, e somente se, para cada linha $i = 1, \cdots, m$ e cada $\gamma \in \{1, \ldots, k\}$ existe uma coluna de índice $j \in \{1, \ldots, k\}$, j dependendo de i e γ, tal que

$$y_i^\gamma - x_j^\gamma = w_{ij} = \bigwedge_{\xi=1}^{k} (y_i^\xi - x_j^\xi)$$

Assim,

$$x_j^\gamma - y_i^\gamma = -w_{ij} = \bigvee_{\xi=1}^{k} (x_j^\xi - y_i^\xi)$$

Portanto,

$$x_j^\gamma = \bigvee_{\xi=1}^{k} (x_j^\xi - y_i^\xi) + y_i^\gamma.$$

Memórias Associativas Morfológicas (MAMs)

Demonstração

Pelo teorema $W_{XY} \boxtimes x^{\xi} = y^{\xi}, \forall \xi = 1, \ldots, k$ *se, e somente se, para cada linha* $i = 1, \cdots, m$ *e cada* $\gamma \in \{1, \ldots, k\}$ *existe uma coluna de índice* $j \in \{1, \ldots, k\}$, *j dependendo de i e* γ, *tal que*

$$y_i^{\gamma} - x_j^{\gamma} = w_{ij} = \bigwedge_{\xi=1}^{k} (y_i^{\xi} - x_j^{\xi})$$

Assim,

$$x_j^{\gamma} - y_i^{\gamma} = -w_{ij} = \bigvee_{\xi=1}^{k} (x_j^{\xi} - y_i^{\xi})$$

Portanto,

$$x_j^{\gamma} = \bigvee_{\xi=1}^{k} (x_j^{\xi} - y_i^{\xi}) + y_i^{\gamma}.$$

Memórias Associativas Morfológicas (MAMs)

Demonstração

Pelo teorema $W_{XY} \boxtimes x^\xi = y^\xi, \forall \xi = 1, \ldots, k$ *se, e somente se, para cada linha* $i = 1, \cdots, m$ *e cada* $\gamma \in \{1, \ldots, k\}$ *existe uma coluna de índice* $j \in \{1, \ldots, k\}$*,* j *dependendo de* i *e* γ*, tal que*

$$y_i^\gamma - x_j^\gamma = w_{ij} = \bigwedge_{\xi=1}^{k} (y_i^\xi - x_j^\xi)$$

Assim,

$$x_j^\gamma - y_i^\gamma = -w_{ij} = \bigvee_{\xi=1}^{k} (x_j^\xi - y_i^\xi)$$

Portanto,

$$x_j^\gamma = \bigvee_{\xi=1}^{k} (x_j^\xi - y_i^\xi) + y_i^\gamma.$$

Memórias Associativas Morfológicas (MAMs)

Demonstração

Pelo teorema $W_{XY} \boxtimes x^{\xi} = y^{\xi}, \forall \xi = 1, \ldots, k$ *se, e somente se, para cada linha* $i = 1, \cdots, m$ *e cada* $\gamma \in \{1, \ldots, k\}$ *existe uma coluna de índice* $j \in \{1, \ldots, k\}$*,* j *dependendo de* i *e* γ*, tal que*

$$y_i^{\gamma} - x_j^{\gamma} = w_{ij} = \bigwedge_{\xi=1}^{k} (y_i^{\xi} - x_j^{\xi})$$

Assim,

$$x_j^{\gamma} - y_i^{\gamma} = -w_{ij} = \bigvee_{\xi=1}^{k} (x_j^{\xi} - y_i^{\xi})$$

Portanto,

$$x_j^{\gamma} = \bigvee_{\xi=1}^{k} (x_j^{\xi} - y_i^{\xi}) + y_i^{\gamma}.$$

Demonstração

Pelo teorema $W_{XY} \boxvee x^{\xi} = y^{\xi}, \forall \xi = 1, \ldots, k$ *se, e somente se, para cada linha* $i = 1, \cdots, m$ *e cada* $\gamma \in \{1, \ldots, k\}$ *existe uma coluna de índice* $j \in \{1, \ldots, k\}$*,* j *dependendo de* i *e* γ*, tal que*

$$y_i^{\gamma} - x_j^{\gamma} = w_{ij} = \bigwedge_{\xi=1}^{k} (y_i^{\xi} - x_j^{\xi})$$

Assim,

$$x_j^{\gamma} - y_i^{\gamma} = -w_{ij} = \bigvee_{\xi=1}^{k} (x_j^{\xi} - y_i^{\xi})$$

Portanto,

$$x_j^{\gamma} = \bigvee_{\xi=1}^{k} (x_j^{\xi} - y_i^{\xi}) + y_i^{\gamma}.$$

Memórias Associativas Morfológicas (MAMs)

Teorema 2

Seja $\tilde{x}^\gamma$ uma versão distorcida de x^γ. Então, $W_{XY} \boxtimes \tilde{x}^\gamma = y^\xi$ se, e somente se,

$$\tilde{x}_j^\gamma \leq x^\gamma \vee \bigwedge_{i=1}^{m} \left(\bigvee_{\xi \neq \gamma} \left[y_i^\gamma - y_i^\xi + x_j^\xi \right) \right] \tag{19}$$

e para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$ existe $j_i \in \{1, \ldots, n\}$ tal que

$$\tilde{x}_j^\gamma = x^\gamma \vee \left(\bigvee_{\xi \neq \gamma} \left[y_i^\gamma - y_i^\xi + x_j^\xi \right) \right] \tag{20}$$

Memórias Morfológicas Autoassociativas

Se $X = Y$, isto é, $y^\xi = x^\xi, \forall \xi = 1, \ldots, k$, dizemos que W_{XX} e M_{XX} são memórias autoassociativas.
As característcas das memórias moforlógicas autoassociativas são:

- Capacidade de armazenamento ilimitado;
- Convergência em um único passo.

Memórias Morfológicas Autoassociativas

Se $X = Y$, isto é, $y^{\xi} = x^{\xi}, \forall \xi = 1, \ldots, k$, dizemos que W_{XX} e M_{XX} são memórias autoassociativas.
As caracteríscas das memórias moforlógicas autoassociativas são:

- Capacidade de armazenamento ilimitado;
- Convergência em um único passo.

Memórias Morfológicas Autoassociativas

Se $X = Y$, isto é, $y^\xi = x^\xi, \forall \xi = 1, \ldots, k$, dizemos que W_{XX} e M_{XX} são memórias autoassociativas.
As característcas das memórias moforlógicas autoassociativas são:

- Capacidade de armazenamento ilimitado;
- Convergência em um único passo.

Teorema 3

Seja $X = \left[x^1 x^2 \ldots x^k\right] \in \mathbb{R}^{n \times k}$*, então* $W_{XX} \boxed{\vee} X = X$.

Demonstração

Seja $w_{ii} = \left[x^\xi \boxed{\wedge} x^\xi\right]_{ii} = x_i^\xi - x_i^\xi = 0$ *para cada* $i = 1, \ldots, n$ *e* $\forall \xi = 1, \ldots, k$. *Assim, cada linha da matriz* $W_{XX} - \left[x^\xi \boxed{\wedge} (-x^\xi)'\right]$ *contém uma entrada nula. Portanto, pelo teorema* 1*, tem-se que* W_{XX} *é uma memória perfeita, ou seja,* $W_{XX} \boxed{\vee} X = X$

Teorema 3

Seja $X = \left[x^1 x^2 \ldots x^k\right] \in \mathbb{R}^{n\times k}$*, então* $W_{XX} \boxed{\vee} X = X$*.*

Demonstração

Seja $w_{ii} = \left[x^\xi \boxed{\wedge} x^\xi\right]_{ii} = x_i^\xi - x_i^\xi = 0$ *para cada* $i = 1, \ldots, n$ *e* $\forall \xi = 1, \ldots, k$*. Assim, cada linha da matriz* $W_{XX} - \left[x^\xi \boxed{\wedge} (-x^\xi)'\right]$ *contém uma entrada nula. Portanto, pelo teorema* 1*, tem-se que* W_{XX} *é uma memória perfeita, ou seja,* $W_{XX} \boxed{\vee} X = X$

Teorema 4

Se $W_{XX} \boxed{\vee}\, z = v$ e $M_{XX} \boxed{\wedge}\, z = u$, então $W_{XX} \boxed{\vee}\, v = v$ e $M_{XX} \boxed{\wedge}\, u = u$.

Demonstração

Pelo teorema 3, temos que a diagonal da matriz W_{XX} é nula, ou seja, $w_{ii} = 0, \forall i = 1, \ldots, n$. Assim,

$$\begin{aligned} (W_{XX} \boxed{\vee}\, v)_i &= \bigvee_{j=1}^{n} w_{ij} + v_j \\ &\geq w_{ii} + v_i \\ &= v_i . \end{aligned} \tag{21}$$

Portanto, $W_{XX} \boxed{\vee}\, v \geq v$.

Teorema 4

Se $W_{XX} \boxvee z = v$ e $M_{XX} \boxwedge z = u$, então $W_{XX} \boxvee v = v$ e $M_{XX} \boxwedge u = u$.

Demonstração

Pelo teorema 3, temos que a diagonal da matriz W_{XX} é nula, ou seja, $w_{ii} = 0, \forall i = 1, \ldots, n$. Assim,

$$
\begin{aligned}
(W_{XX} \boxvee v)_i &= \bigvee_{j=1}^{n} w_{ij} + v_j \\
&\geq w_{ii} + v_i \\
&= v_i. \qquad (21)
\end{aligned}
$$

Portanto, $W_{XX} \boxvee v \geq v$.

Demonstração

Sejam $i, j, l \in \{1, \ldots, n\}$. *Note que*

$$w_{il} = \bigwedge_{\xi=1}^{k} (x_i^{\xi} - x_l^{\xi}) \leq x_i^{\gamma} - x_l^{\gamma}, \ \ \forall \gamma = 1, ..., k \tag{22}$$

e

$$w_{lj} = \bigwedge_{\xi=1}^{k} (x_l^{\xi} - x_j^{\xi}) \leq x_l^{\gamma} - x_j^{\gamma}, \ \ \forall \gamma = 1, ..., k. \tag{23}$$

Portanto,

$$w_{il} + w_{lj} \leq (x_i^{\gamma} - x_l^{\gamma}) + x_l^{\gamma} - x_j^{\gamma} = x_i^{\gamma} - x_j^{\gamma}, \ \ \forall \gamma = 1, ..., k \tag{24}$$

Consequentemente,

$$w_{il} + w_{lj} \leq \bigwedge_{\xi=1}^{k} (x_i^{\xi} - x_j^{\xi}) = w_{ij}. \tag{25}$$

Demonstração

Aplicando a hipótese e desigualdade (25) para $i = 1, \ldots, n$, temos

$$\begin{aligned} v_i &= \bigvee_{j=1}^{n} (w_{ij} + z_j) \\ &\geq \bigvee_{j=1}^{n} (w_{il} + w_{lj} + z_j) \;\; \forall l = 1, ..., n. \end{aligned} \tag{26}$$

Logo,

$$\begin{aligned} v_i &\geq \bigvee_{l=1}^{n} \bigvee_{j=1}^{n} (w_{il} + w_{lj} + z_j) = \bigvee_{l=1}^{n} \left[w_{il} + \bigvee_{j=1}^{n} (w_{lj} + z_j) \right] \\ &= \bigvee_{l=1}^{n} [w_{il} + v_l] = (W_{XX} \boxdot v)_i, \;\; \forall i = 1, \ldots, n \end{aligned} \tag{27}$$

Demonstração

Consequentemente,

$$v \geq W_{XX} \boxed{\vee}\, v \tag{28}$$

Portanto, da desigualdade (21) e (28), temos que

$$v = W_{XX} \boxed{\vee}\, v.$$

Tolerância aos ruídos

A mudança em um padrão de valores de pixel $p(i,j) = 1$ para $p(i,j) = 0$ é denominada mudança erosiva, ou seja, se $\tilde{x}^\gamma$ é padrão erosivo de x^γ, então $\tilde{x}^\gamma \leq x^\gamma$.

Um padrão de valores de pixel $p(i,j) = 0$ para $p(i,j) = 1$ é denominada mudança ditativa, assim se $\tilde{x}^\gamma$ é padrão dilativo de x^γ, então $\tilde{x}^\gamma \geq x^\gamma$.

A memória autoassociativa morfológica W_{XX} é extremamente robusta para padrões que são distorções devido a mudança erosiva e M_{XX} é extremamente robusta para padrões que são distorções devido a mudança dilativa. Desde que as versões corrompidas satisfaçam o teorema 2.

As mémorias autoassociativas morfológicas W_{XX} e W_{XX} são vulneravéis aos padrões corrompidos com ruídos dilativos e erosivos.

Tolerância aos ruídos

A mudança em um padrão de valores de pixel $p(i,j) = 1$ para $p(i,j) = 0$ é denominada mudança erosiva, ou seja, se $\tilde{x}^\gamma$ é padrão erosivo de x^γ, então $\tilde{x}^\gamma \leq x^\gamma$.
Um padrão de valores de pixel $p(i,j) = 0$ para $p(i,j) = 1$ é denominada mudança ditativa, assim se $\tilde{x}^\gamma$ é padrão dilativo de x^γ, então $\tilde{x}^\gamma \geq x^\gamma$.
A memória autoassociativa morfológica W_{XX} é extremamente robusta para padrões que são distorções devido a mudança erosiva e M_{XX} é extremamente robusta para padrões que são distorções devido a mudança dilativa. Desde que as versões corrompidas satisfaçam o teorema 2.
As mémorias autoassociativas morfológicas W_{XX} e W_{XX} são vulneravéis aos padrões corrompidos com ruídos dilativos e erosivos.

Tolerância aos ruídos

A mudança em um padrão de valores de pixel $p(i,j) = 1$ para $p(i,j) = 0$ é denominada mudança erosiva, ou seja, se $\tilde{x}^{\gamma}$ é padrão erosivo de x^{γ}, então $\tilde{x}^{\gamma} \leq x^{\gamma}$.

Um padrão de valores de pixel $p(i,j) = 0$ para $p(i,j) = 1$ é denominada mudança ditativa, assim se $\tilde{x}^{\gamma}$ é padrão dilativo de x^{γ}, então $\tilde{x}^{\gamma} \geq x^{\gamma}$.

A memória autoassociativa morfológica W_{XX} é extremamente robusta para padrões que são distorções devido a mudança erosiva e M_{XX} é extremamente robusta para padrões que são distorções devido a mudança dilativa. Desde que as versões corrompidas satisfaçam o teorema 2.

As mémorias autoassociativas morfológicas W_{XX} e W_{XX} são vulneravéis aos padrões corrompidos com ruídos dilativos e erosivos.

Tolerância aos ruídos

A mudança em um padrão de valores de pixel $p(i,j) = 1$ para $p(i,j) = 0$ é denominada mudança erosiva, ou seja, se $\tilde{x}^\gamma$ é padrão erosivo de x^γ, então $\tilde{x}^\gamma \leq x^\gamma$.
Um padrão de valores de pixel $p(i,j) = 0$ para $p(i,j) = 1$ é denominada mudança ditativa, assim se $\tilde{x}^\gamma$ é padrão dilativo de x^γ, então $\tilde{x}^\gamma \geq x^\gamma$.
A memória autoassociativa morfológica W_{XX} é extremamente robusta para padrões que são distorções devido a mudança erosiva e M_{XX} é extremamente robusta para padrões que são distorções devido a mudança dilativa. Desde que as versões corrompidas satisfaçam o teorema 2.
As mémorias autoassociativas morfológicas W_{XX} e W_{XX} são vulneravéis aos padrões corrompidos com ruídos dilativos e erosivos.

Kernel de Matrizes

Definição

Seja $Z = \left[z^1, z^2, \ldots, z^k\right]$ uma matriz de ordem $n \times k$. Dizemos que Z é um kernel para o par (X, Y) se, e somente se, as condições são satisfeitas:

1. $M_{ZZ} \boxed{\triangle} X = Z$;
2. $W_{ZY} \boxed{\triangledown} Z = Y$.

Segue da definição que se Z é um kernel para (X, Y), então

$$W_{ZY} \boxed{\triangledown} (M_{ZZ} \boxed{\triangle} X) = W_{ZY} \boxed{\triangledown} Z = Y. \tag{29}$$

Teorema 5

Se Z é um kernel para (X, Y), então $Z \leq X$.

Demonstração

Se Z é um kernel para (X, Y), então $M_{ZZ} \boxtimes x^{\xi} = z^{\xi}, \forall \xi = 1, \ldots, k$. Assim,

$$\begin{aligned} z_i^{\xi} &= (M_{ZZ} \boxtimes x^{\xi})_i \\ &= \bigwedge_{j=1}^{n} (m_{ij} + x_j) \\ &\leq m_{ii} + x_i = x_i, \end{aligned}$$

$\forall \xi = 1, \ldots, k$ e $i = 1, \ldots, n$. Portanto, $Z \leq X$.

Teorema 6

Se Z é um kernel para (X, Y), $\tilde{x}^\gamma$ uma versão corrompida de x^γ tal que $z_j^\gamma \leq \tilde{x}_j^\gamma, \forall j = 1, \ldots, n$ e $z_j^\gamma = \tilde{x}_j^\gamma$, sempre que $m_{ij} = z_i^\gamma - z_j^\gamma$, então

$$M_{ZZ} \boxed{\wedge}\, \tilde{x}^\gamma = z^\gamma. \tag{30}$$

Demonstração

Por hipótese, $z_j^\gamma \leq \tilde{x}_j^\gamma, \forall j = 1, \ldots, n$, assim

$$\tilde{x}_j^\gamma \geq z_j^\gamma \wedge \bigvee_{i=1}^{n} \left(\bigwedge_{\xi \neq \gamma} \left[z_i^\gamma - z_i^\xi + z_j^\xi \right] \right), \forall j = 1, \ldots, n.$$

e $M_{ZZ} \boxed{\wedge}\, z^\xi$ (teorema 3). Além disso, pelo corolário, para cada linha $i = 1, \ldots, n$ e cada $\alpha \in \{1, \ldots, k\}$, existe $j \in \{1, \ldots, k\}$ dependendo de i e α tal que

Demonstração

$$z_j^\alpha = \bigwedge_{\xi=1}^{k} \left[z_j^\xi - z_i^\xi + z_i^\alpha \right].$$

Fazendo $\alpha = \gamma$, temos

$$z_j^\gamma = \bigwedge_{\xi=1}^{k} \left[z_j^\xi - z_i^\xi + z_i^\gamma \right].$$

Segue que

$$z_i^\gamma - z_j^\gamma = -\left(\bigwedge_{\xi=1}^{k} \left[z_j^\xi - z_i^\xi \right] \right) = \bigvee_{\xi=1}^{k} \left[z_j^\gamma - z_i^\xi \right] = m_{ij}.$$

Demonstração

$$z_j^{\alpha} = \bigwedge_{\xi=1}^{k} \left[z_j^{\xi} - z_i^{\xi} + z_i^{\alpha} \right].$$

Fazendo $\alpha = \gamma$, *temos*

$$z_j^{\gamma} = \bigwedge_{\xi=1}^{k} \left[z_j^{\xi} - z_i^{\xi} + z_i^{\gamma} \right].$$

Segue que

$$z_i^{\gamma} - z_j^{\gamma} = -\left(\bigwedge_{\xi=1}^{k} \left[z_j^{\xi} - z_i^{\xi} \right] \right) = \bigvee_{\xi=1}^{k} \left[z_j^{\gamma} - z_i^{\xi} \right] = m_{ij}.$$

Demonstração

$$z_j^\alpha = \bigwedge_{\xi=1}^{k} \left[z_j^\xi - z_i^\xi + z_i^\alpha \right].$$

Fazendo $\alpha = \gamma$, *temos*

$$z_j^\gamma = \bigwedge_{\xi=1}^{k} \left[z_j^\xi - z_i^\xi + z_i^\gamma \right].$$

Segue que

$$z_i^\gamma - z_j^\gamma = -\left(\bigwedge_{\xi=1}^{k} \left[z_j^\xi - z_i^\xi \right] \right) = \bigvee_{\xi=1}^{k} \left[z_j^\gamma - z_i^\xi \right] = m_{ij}.$$

Demonstração

$$z_j^{\alpha} = \bigwedge_{\xi=1}^{k} \left[z_j^{\xi} - z_i^{\xi} + z_i^{\alpha} \right].$$

Fazendo $\alpha = \gamma$*, temos*

$$z_j^{\gamma} = \bigwedge_{\xi=1}^{k} \left[z_j^{\xi} - z_i^{\xi} + z_i^{\gamma} \right].$$

Segue que

$$z_i^{\gamma} - z_j^{\gamma} = -\left(\bigwedge_{\xi=1}^{k} \left[z_j^{\xi} - z_i^{\xi} \right] \right) = \bigvee_{\xi=1}^{k} \left[z_j^{\gamma} - z_i^{\xi} \right] = m_{ij}.$$

Demonstração

Então, $\tilde{x}_j^{\gamma} = z_j^{\gamma} \wedge \bigwedge_{\xi=1}^{k} \left[z_j^{\xi} - z_i^{\xi} + z_i^{\gamma} \right]$

Assim, pelo teorema 2 segue o resultado.

Considerações Finais

Estudar os seguintes artigos:

- Sussner, Observations on Morphological Associative e the Kernel Method, 2000.
- Sussner e Valle, Grayscale Morphological Associative, 2006
- Valle, An introduction to the Max-Plus Projection Autossociative Morphological Memory e Some of Its Variatons, 2014.