UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
MS580/MT808 – 1o. Sem. 2015 – 1a. Prova – 28/04/2015

Q1	
Q2	
Q3	
Q4	
Q5	
$\sum$	

ALUNO	RA

MS580/MT808 – 1o. Sem. 2015 – 1a. Prova – 28/04/2015

INSTRUÇÕES

NÃO É PERMITIDO DESTACAR AS FOLHAS DA PROVA

É PROIBIDO O USO DE CALCULADORAS

SERÃO CONSIDERADAS SOMENTE AS QUESTÕES ESCRITAS DE FORMA CLARA E DEVIDAMENTE JUSTIFICADAS

INFORMAÇÕES ÚTEIS

Teorema 1 (Representação de um Número *Fuzzy* de Ralescu-Negoita)**.** *Considere uma família* $\{I_\alpha : \alpha \in [0,1]\}$ *de intervalos fechados, limitados e não-vazios de* $\mathbb{R}$ *satisfazendo*

(a) $\overline{\bigcup_{\alpha\in(0,1]} I_\alpha} = I_0$.

(b) Se $0 \leq \alpha \leq \beta \leq 1$*, então* $I_\beta \subseteq I_\alpha$*,*

(c) Se $\alpha_k \leq \alpha$ *é uma sequência que converge para* $\alpha \in (0,1]$*, então*

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} I_{\alpha_k} = I_\alpha.$$

Nessas condições, existe um único número fuzzy $A \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ *tal que* $[A]^\alpha = I_\alpha$*, para todo* $\alpha \in [0,1]$.

Definição 2 (Princípio de Extensão e Zadeh)**.** *Seja* $f : U \to V$ *uma função clássica. A extensão de Zadeh de* f *é a função* $\hat{f} : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ *que fornece, para qualquer* $A \in \mathcal{F}(U)$*, o conjunto fuzzy* $f(A) \in \mathcal{F}(V)$ *cuja função de pertinência é*

$$f(A)(v) = \sup_{u:f(u)=v} A(u), \quad \forall v \in V.$$

Definição 3 (Relação de Equivalência $\triangle$-Fuzzy)**.** *Seja* $\mathcal{R} \in \mathcal{F}(U \times U)$ *uma relação fuzzy e* $\triangle$ *uma t-norma. Dizemos que* $\mathcal{R}$ *é uma relação de equivalência* $\triangle$*-fuzzy se*

(a) $\mathcal{R}(u,u) = 1$ *para todo* $u \in U$*.* *(Reflexiva)*

(b) $\mathcal{R}(u,v) = \mathcal{R}(v,u)$*, para todo* $u, v \in U$*.* *(Simétrica)*

(c) $\mathcal{R}(u,w) \geq \mathcal{R}(u,v) \triangle \mathcal{R}(v,w)$ $\forall u, v, w \in U$*.* *($\triangle$-transitiva)*

Questão 1. Mostre que a operação binária $\triangle_F : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ dada por

$$\triangle_F(a,b) = \ln\left(1 + \frac{(e^a - 1)(e^b - 1)}{e - 1}\right), \quad \forall a, b \in [0,1],$$

é uma t-norma. Encontre uma expressão para a implicação residual de $\triangle_F$ definida através da equação $a \to_F b = \sup\{z \in [0,1] : a \triangle_F z \leq b\}$.

Questão 2. Considere a família de intervalos $\mathcal{A} = \{I_\alpha = [e + e^\alpha, 4e - e^{\alpha^2}] : \alpha \in [0,1]\}$. Mostre que a família $\mathcal{A}$ define um número *fuzzy* A e determine uma expressão para sua função de pertinência.

Questão 3. Sejam $f : U \to V$ uma função clássica e $A \in \mathcal{F}(U)$ um conjunto *fuzzy*. Mostre que a extensão de Zadeh $\hat{f} : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ satisfaz $f([A]^\alpha) \subseteq \left[\hat{f}(A)\right]^\alpha$ para todo $\alpha \in [0,1]$.

Questão 4. Seja $d : U \times U \to [0,1]$ tal que

(i) $d(u,v) = 0$ se e somente se $u = v$.

(ii) $d(u,v) = d(v,u)$, para todo $u, v \in U$.

(iii) $d(u,w) \leq d(u,v) + d(v,w)$ para todo $u, v, w \in U$.

Mostre que a relação fuzzy $\mathcal{R} \in \mathcal{F}(U \times U)$ dada por

$$\mathcal{R}(u,v) = 1 - d(u,v),$$

é uma relação de equivalência $\triangle_L$-fuzzy, em que $\triangle_L$ denota a t-norma de Lukasiewicz.

Questão 5.

(a) Considere a relação *fuzzy* $\mathcal{R} \in \mathcal{F}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ dada por

$$\mathcal{R}(x,y) = e^{-(x-y)^2},$$

que descreve o conceito "x está próximo de y". Determine a expressão para a relação $\mathcal{S} \in \mathcal{F}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ dada pela composições sup-$\triangle_P$, ou seja, $\mathcal{S} = \mathcal{R} \circ \mathcal{R}$ com a t-norma do produto. A relação $\mathcal{S}$ também descreve o conceito "x está próximo de y"? Justifique sua resposta.

(b) Encontre, se possível, uma relação *fuzzy* $\mathcal{X} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}$ tal que $\mathcal{R} \circ \mathcal{X} = \mathcal{S}$, em que $\mathcal{R} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.5 & 0.9 \end{bmatrix}$, $\mathcal{S} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.3 \\ 0.1 & 0.5 \end{bmatrix}$ e "$\circ$" denota a composição max-min.

Boa Prova!