Aula 9
Relações *Fuzzy*.

MS580 - Introdução à Teoria *Fuzzy*

Marcos Eduardo Valle

Departamento de Matemática Aplicada
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Universidade Estadual de Campinas

Uma relação clássica expressa a presença ou ausência de uma associação, interação ou interconexão entre elementos de dois ou mais conjuntos.

As relações *fuzzy* permitem graus ou forças de associação, interação ou interconexão entre elementos.

Tais graus são representados por números do intervalo $[0, 1]$ e a relação *fuzzy* é caracterizada de forma única por uma função de pertinência.

Relação Clássica

Definição 1 (Relação Clássica)

Uma relação $\mathcal{R}$ entre conjuntos $U_1, U_2, \ldots, U_n$ é um subconjunto do produto Cartesiano $U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_n$, ou seja,

$$\mathcal{R} \subseteq U_1 \times \ldots \times U_n.$$

A n-upla $(u_1, u_2, \ldots, u_n) \in \mathcal{R}$ se, e somente se, os elementos $u_1, u_2, \ldots, u_n$ estão relacionados, ou seja, existe uma associação, interação ou interconexão entre esses elementos.

Uma relação definida no produto Cartesiano de dois conjuntos é chamada **relação binária**.

Exemplo 2

Considere os conjuntos

$$X = \{\text{Brasil}, \text{Portugal}, \text{França}, \text{Estados Unidos}, \text{Canadá}\},$$

$$Y = \{\text{Português}, \text{Francês}, \text{Inglês}\},$$

e

$$Z = \{\text{Real}, \text{Dólar}, \text{Euro}\}.$$

Determine a relação $\mathcal{R}$ que associa o país com a língua e a moeda.

Exemplo 2

Considere os conjuntos

$$X = \{\text{Brasil}, \text{Portugal}, \text{França}, \text{Estados Unidos}, \text{Canadá}\},$$

$$Y = \{\text{Português}, \text{Francês}, \text{Inglês}\},$$

e

$$Z = \{\text{Real}, \text{Dólar}, \text{Euro}\}.$$

Determine a relação $\mathcal{R}$ que associa o país com a língua e a moeda.

Resposta: A relação é

$$\mathcal{R} = \left\{ \begin{array}{l} (\text{Brasil,Português,Real}), (\text{Portugal,Português,Euro}), \\ (\text{França,Francês,Euro}), (\text{Estados Unidos,Inglês,Dólar}), \\ (\text{Canadá,Inglês,Dólar}), (\text{Canadá,Francês,Dólar}) \end{array} \right\}.$$

Observe que (Brasil,Inglês, Dólar) não pertence à $\mathcal{R}$. Logo, inglês não é a língua franca ou o dólar não é a unidade monetária do Brasil.

Exemplo 3

Considere um ecossistema U, no qual interagem as populações de **águias** (a), **cobras** (c), **insetos** (i), **lebres** (l) e **sapos** (s).

Um estudo de interesse é o processo de predação, isto é, a relação **presa-predador**.

Em termos matemáticos, sejam $U = \{a, c, i, l, s\}$ e $\mathcal{R} \subseteq U \times U$ tal que $(u, v) \in \mathcal{R}$ se u é presa de v.

Exemplo 3

Considere um ecossistema U, no qual interagem as populações de **águias** (a), **cobras** (c), **insetos** (i), **lebres** (l) e **sapos** (s).

Um estudo de interesse é o processo de predação, isto é, a relação **presa-predador**.

A relação $\mathcal{R}$ pode ser representada pela tabela:

		predador				
	$\mathcal{R}$	a	c	i	l	s
presa	a	0	0	0	0	0
	c	1	1	0	0	0
	i	1	0	1	0	1
	l	1	1	0	0	0
	s	1	1	0	0	1

Exemplo 3

Considere um ecossistema U, no qual interagem as populações de **águias** (a), **cobras** (c), **insetos** (i), **lebres** (l) e **sapos** (s).

Um estudo de interesse é o processo de predação, isto é, a relação **presa-predador**.

A relação $\mathcal{R}$ também pode ser representada pela matriz

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

em que $r_{ij} = 1$ se e somente se o elemento u_i é presa de u_j.

Definição 4 (Relação *Fuzzy*)

Uma relação *fuzzy* $\mathcal{R}$ é um conjunto *fuzzy* do produto cartesiano $U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_n$, ou seja, $\mathcal{R} \in \mathcal{F}(U_1 \times \ldots \times U_n)$, que é caracterizado por uma função de pertinência

$$\mathcal{R} : U_1 \times \ldots \times U_n \rightarrow [0, 1].$$

O grau de pertinência de $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ em $\mathcal{R}$,

$$\mathcal{R}(u_1, u_2, \ldots, u_n),$$

indica a força da relação (associação, interação ou interconexão) entre os elementos $u_1, u_2, \ldots, u_n$.

Exemplo 5

Considere novamente um ecossistema U, no qual interagem as populações de **águias** (a), **cobras** (c), **insetos** (i), **lebres** (l) e **sapos** (s).

O estudo do processo de predação pode ser descrito considerando uma relação *fuzzy* que indica o preferência de um predador por alguma presa.

Em termos matemáticos, sejam $U = \{a, c, i, l, s\}$ e $\mathcal{R} \in \mathcal{F}(U \times U)$ tal que $\mathcal{R}(u, v)$ representa o grau com que v tem preferência por u.

Exemplo 5

Considere novamente um ecossistema U, no qual interagem as populações de **águias** (a), **cobras** (c), **insetos** (i), **lebres** (l) e **sapos** (s).

O estudo do processo de predação pode ser descrito considerando uma relação *fuzzy* que indica o preferência de um predador por alguma presa.

A relação *fuzzy* $\mathcal{R}$ pode ser representada pela tabela:

		predador				
	$\mathcal{R}$	a	c	i	l	s
presa	a	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	c	1.0	0.2	0.0	0.0	0.0
	i	0.1	0.0	0.3	0.0	1.0
	l	1.0	0.8	0.0	0.0	0.0
	s	0.2	1.0	0.0	0.0	0.1

Exemplo 5

Considere novamente um ecossistema U, no qual interagem as populações de **águias** (a), **cobras** (c), **insetos** (i), **lebres** (l) e **sapos** (s).

O estudo do processo de predação pode ser descrito considerando uma relação *fuzzy* que indica o preferência de um predador por alguma presa.

A relação *fuzzy* $\mathcal{R}$ também pode ser representada pela matriz

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 1.0 & 0.2 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.1 & 0.0 & 0.3 & 0.0 & 1.0 \\ 1.0 & 0.8 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.2 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.1 \end{bmatrix},$$

em que r_{ij} representa a preferência de u_i por u_j.

No exemplo anterior, representamos uma relação binária na forma matricial.

Especificamente, se $U = \{u_1, \ldots, u_m\}$ e $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ são ambos conjuntos finitos, uma relação $\mathcal{R} \in \mathcal{F}(U \times V)$ pode ser representada por uma matriz

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \ldots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \ldots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ r_{m1} & r_{m2} & \ldots & r_{mn} \end{bmatrix},$$

em que $r_{ij} = \mathcal{R}(u_i, u_j)$.

Relações *Fuzzy* Binárias

Definição 6 (Relação Inversa)

Seja $\mathcal{R} \in \mathcal{F}(U \times V)$ uma relação *fuzzy* binária. A relação *fuzzy* inversa de $\mathcal{R}$ tem função de pertinência $\mathcal{R}^{-1} : V \times U \to [0, 1]$ dada por

$$\mathcal{R}^{-1}(v, u) = \mathcal{R}(u, v).$$

Usando a representação matricial, a relação inversa $\mathcal{R}^{-1}$ coincide com a transposta de $\mathcal{R}$. Por isso, muitos autores adotam o termo “transposta de $\mathcal{R}$” no lugar de “inversa de $\mathcal{R}$”.

Exemplo 7

Considere o ecossistema do exemplo anterior e a relação *fuzzy* $\mathcal{R}$ que indica a preferência de um predador por uma presa.

A relação inversa $\mathcal{R}^{-1}$, representada pela matriz

$$\mathcal{R}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.0 & 1.0 & 0.1 & 1.0 & 0.2 \\ 0.0 & 0.2 & 0.0 & 0.8 & 1.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.3 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.1 \end{bmatrix},$$

indica o grau com que u_i é predado por u_j.

Definição 8

Seja $\mathcal{R} \in \mathcal{F}(U \times V)$ uma relação *fuzzy* binária.

- O domínio de $\mathcal{R}$, denotado por $Dom\mathcal{R}$, é o conjunto *fuzzy* de U dado por

$$Dom\mathcal{R}(u) = \sup_{v \in V} \mathcal{R}(u, v), \quad \forall u \in U.$$

- A imagem de $\mathcal{R}$, denotado por $Imag\mathcal{R}$, é o conjunto *fuzzy* de V dado por

$$Imag\mathcal{R}(v) = \sup_{v \in V} \mathcal{R}(u, v), \quad \forall v \in V.$$

Usando a representação matricial, $Dom\mathcal{R}$ e $Imag\mathcal{R}$ são os máximos, respectivamente, por linha e por coluna.

Exemplo 9

Considere o ecossistema do exemplo anterior e a relação *fuzzy*

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 1.0 & 0.2 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.1 & 0.0 & 0.3 & 0.0 & 1.0 \\ 1.0 & 0.8 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.2 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.1 \end{bmatrix}.$$

Neste caso,

$$Dom\mathcal{R} = [\underbrace{0.0}_{a}, \underbrace{1.0}_{c}, \underbrace{1.0}_{i}, \underbrace{1.0}_{l}, \underbrace{1.0}_{s}].$$

Logo, a água não é predada por nenhuma espécie de U enquanto que os insetos são predados por alguma(s) espécie(s) de U.

Exemplo 9

Considere o ecossistema do exemplo anterior e a relação *fuzzy*

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 1.0 & 0.2 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.1 & 0.0 & 0.3 & 0.0 & 1.0 \\ 1.0 & 0.8 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.2 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.1 \end{bmatrix}.$$

Neste caso,

$$Imag\mathcal{R} = [\underbrace{1.0}_{a}, \underbrace{1.0}_{c}, \underbrace{0.3}_{i}, \underbrace{0.0}_{l}, \underbrace{1.0}_{s}].$$

Assim, o grau com que a águia é predador por alguma espécie de U é 0. Por outro lado, o grau com que os insetos predam alguma espécie é 0.3.

Relações binárias definidas no produto cartesiano de um único conjunto U possuem um papel importante.

Definição 10

Seja $\mathcal{R} \in \mathcal{F}(U \times U)$ uma relação *fuzzy*. Dizemos que $\mathcal{R}$ é

(a) **reflexiva** se $\mathcal{R}(u,u) = 1$ para todo $u \in U$.
"Todo elemento tem relação máxima consigo próprio."

(b) **simétrica** se $\mathcal{R}(u,v) = \mathcal{R}(v,u)$, para todo $u, v \in U$.
"Há reciprocidade com a mesma pertinência entre elementos relacionados."

(c) $\triangle$**-transitiva** se $\mathcal{R}(u,w) \geq \mathcal{R}(u,v) \triangle \mathcal{R}(v,w)\ \forall u, v, w \in U$.
"A relação entre dois elementos não deve ser inferior a relação deles com os demais elementos."

(d) **anti-simétrica** se $\mathcal{R}(u,v) > 0$ e $\mathcal{R}(v,u) > 0$ implica $u = v$.
"A relação não admite reciprocidade entre indivíduos distintos."

Exemplo 11

- Uma relação de hierarquia do tipo "*u* é superior a *v*" pode ser transitiva e anti-simétrica, mas não pode ser simétrica.
- A relação de amizade entre dois indivíduos pode ser simétrica e reflexiva, mas não pode ser transitiva.

Definição 12 (Relação de Equivalência)

Uma relação $\mathcal{R} \in \mathcal{F}(U \times U)$ reflexiva, simétrica e $\triangle$-transitiva é chamada **relação de equivalência $\triangle$-*fuzzy***.
Se $\triangle = \wedge$, dizemos simplesmente que $\mathcal{R}$ é uma **relação de equivalência *fuzzy***.

Exemplo 13

A relação "*u* tem aproximadamente a mesma idade que *v*" pode ser modelada como uma relação de equivalência *fuzzy*.