Aula 3
União, Intersecção e Complemento de Conjuntos *Fuzzy*.

MS580 - Introdução à Teoria *Fuzzy*

Marcos Eduardo Valle

Departamento de Matemática Aplicada
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Universidade Estadual de Campinas

Nessa aula, generalizaremos as operações de união, intersecção e complemento de conjuntos.

Operações com conjuntos clássicos:

- Intersecção:

$$A \cap B = \{x \in U : x \in A \textbf{ e } x \in B\}.$$

- União:

$$A \cup B = \{x \in U : x \in A \textbf{ ou } x \in B\}.$$

- Complemento:

$$A^c = \{x \in U : x \notin A\}.$$

Essas operações estão intimamente relacionadas aos conectivos "**e**" (conjunção), "**ou**" (disjunção) e "**não**" (negação) da lógica clássica.

Intersecção de Conjuntos *Fuzzy*

Em termos das funções características, a intersecção satisfaz:

$\chi_A(x)$	$\chi_B(x)$	$\chi_{A\cap B}(x)$
0	0	0
1	0	0
0	1	0
1	1	1

Tabela verdade da conjunção.

No caso *fuzzy*, a função de pertinência da intersecção $A \cap B$ é determinada ponto-a-ponto a partir de uma conjunção *fuzzy* das funções de pertinência de A e B, ou seja,

$$(A \cap B)(x) = \mathcal{C}\big(A(x), B(x)\big), \quad \forall x \in U,$$

em que $\mathcal{C}$ denota uma conjunção *fuzzy*.

Conjunção *Fuzzy*

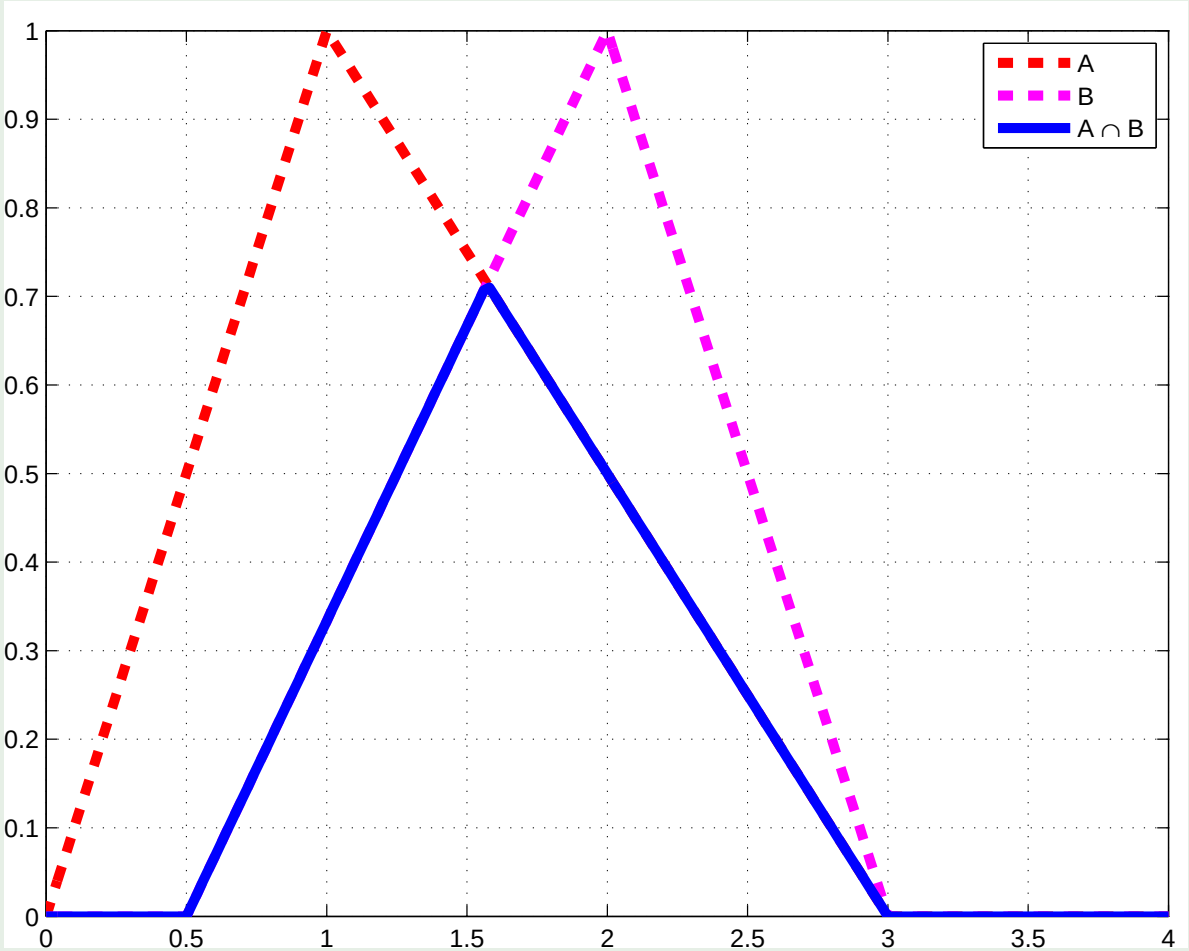
Definição 1 (Conjunção *Fuzzy*)

Uma função $\mathcal{C} : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ decrescente em ambos argumentos é uma conjunção *fuzzy* se

$$\mathcal{C}(0,0) = \mathcal{C}(0,1) = \mathcal{C}(1,0) = 0 \quad \text{e} \quad \mathcal{C}(1,1) = 1.$$

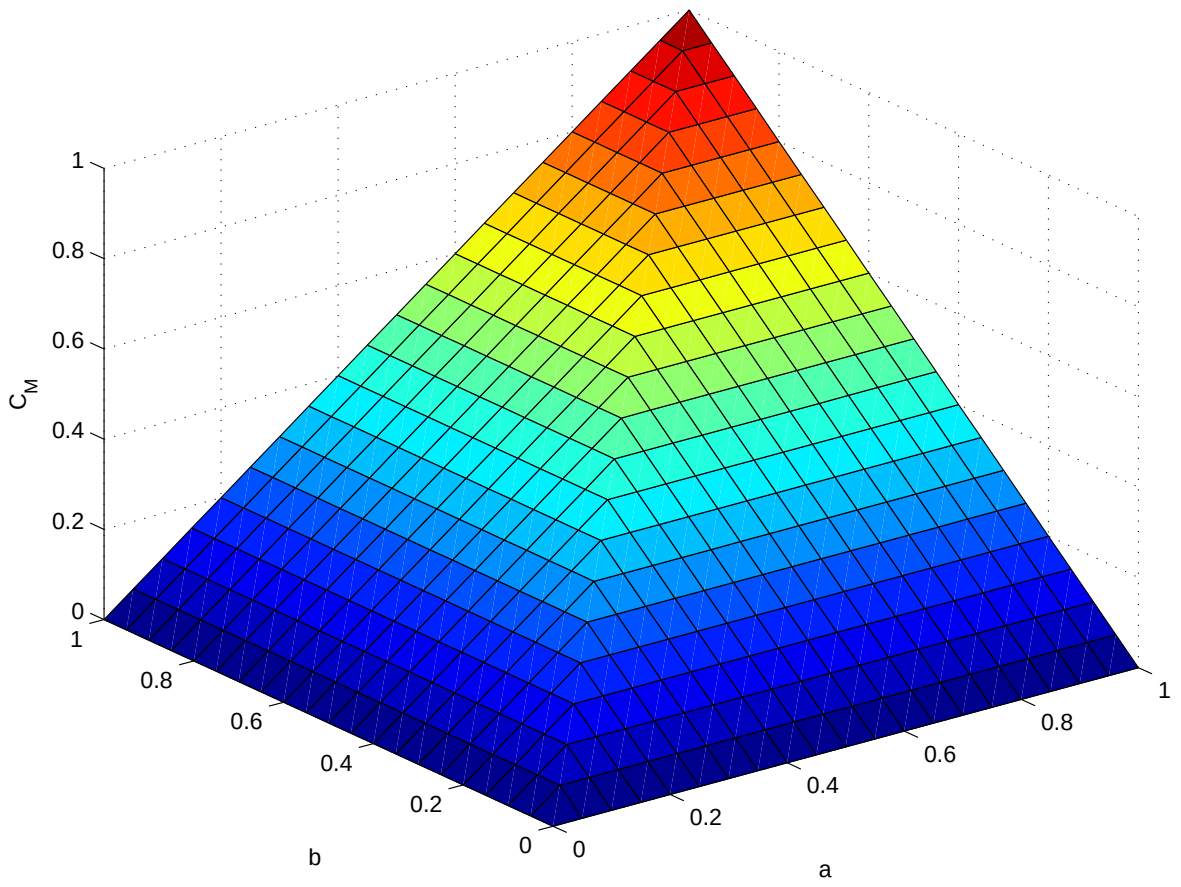
Exemplo 2 (Mínimo)

$$C_M(a,b) = \min\{a,b\} = a \wedge b.$$



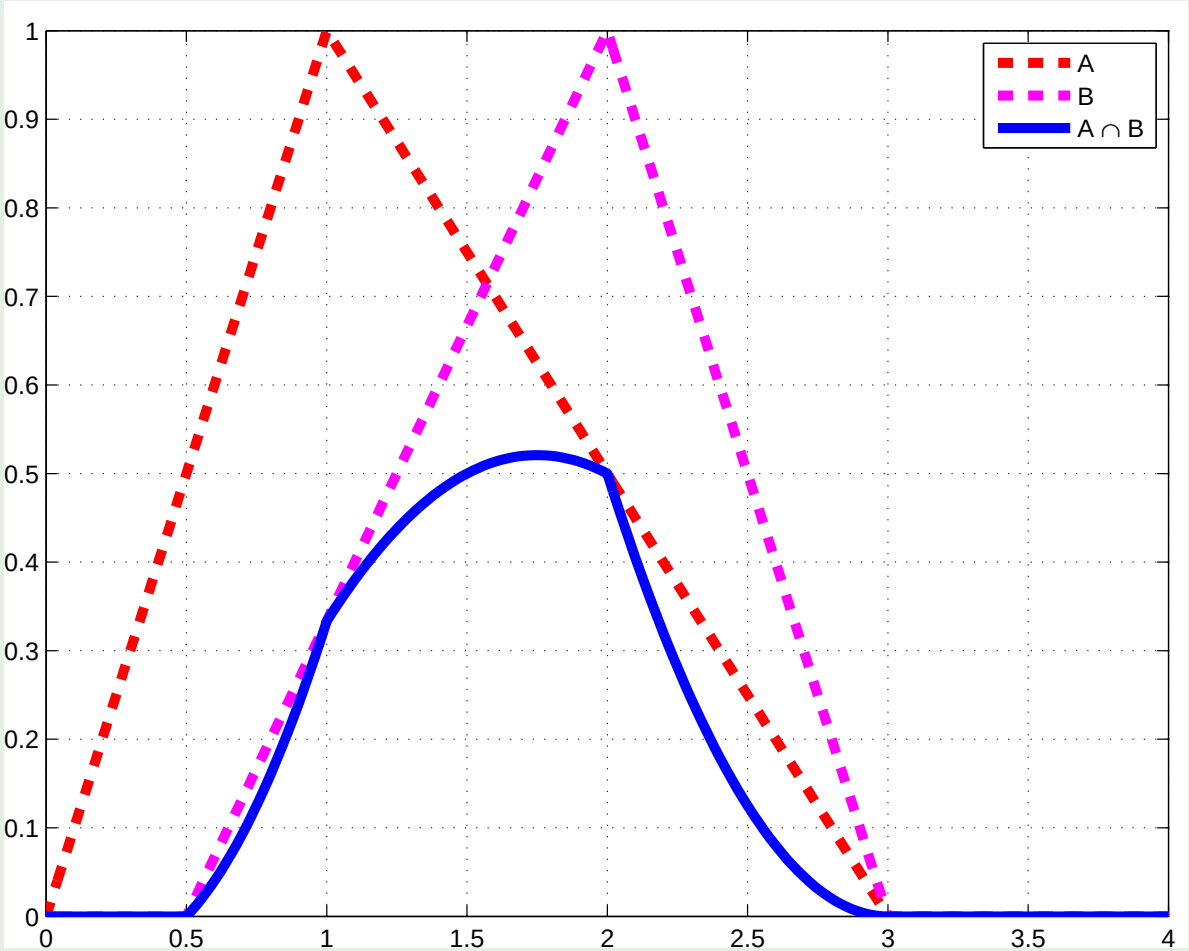
Exemplo 2 (Mínimo)

$$C_M(a,b) = \min\{a,b\} = a \wedge b.$$



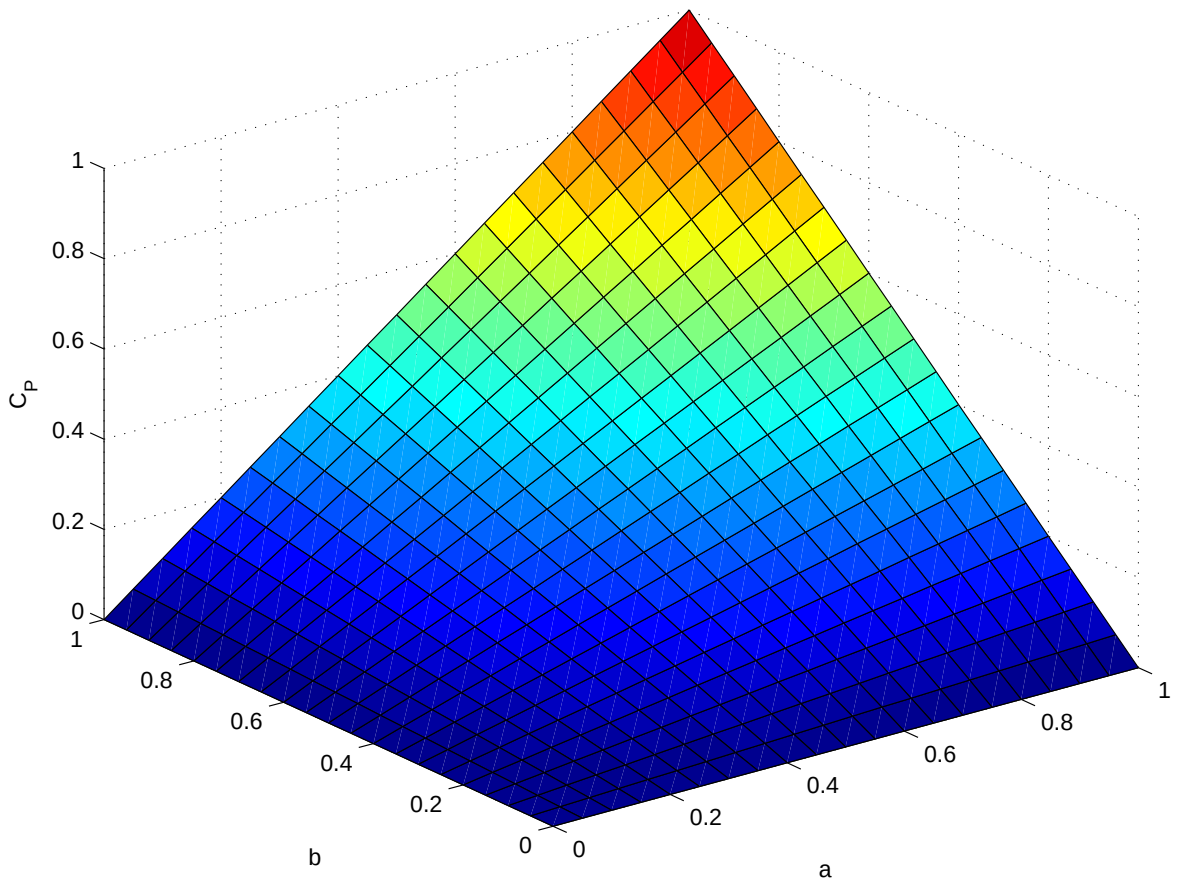
Exemplo 3 (Produto)

$$C_P(a, b) = a \cdot b.$$



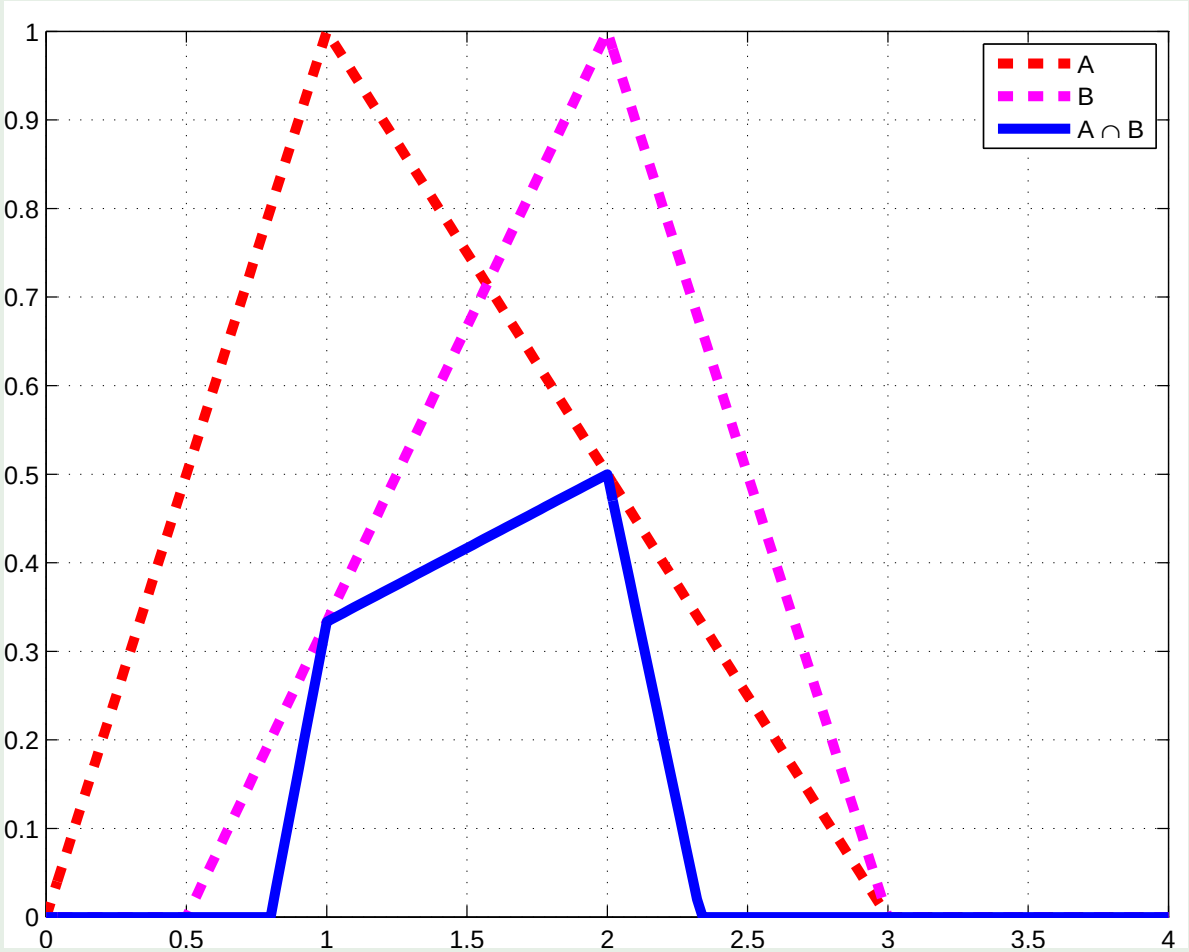
Exemplo 3 (Produto)

$$C_P(a, b) = a \cdot b.$$



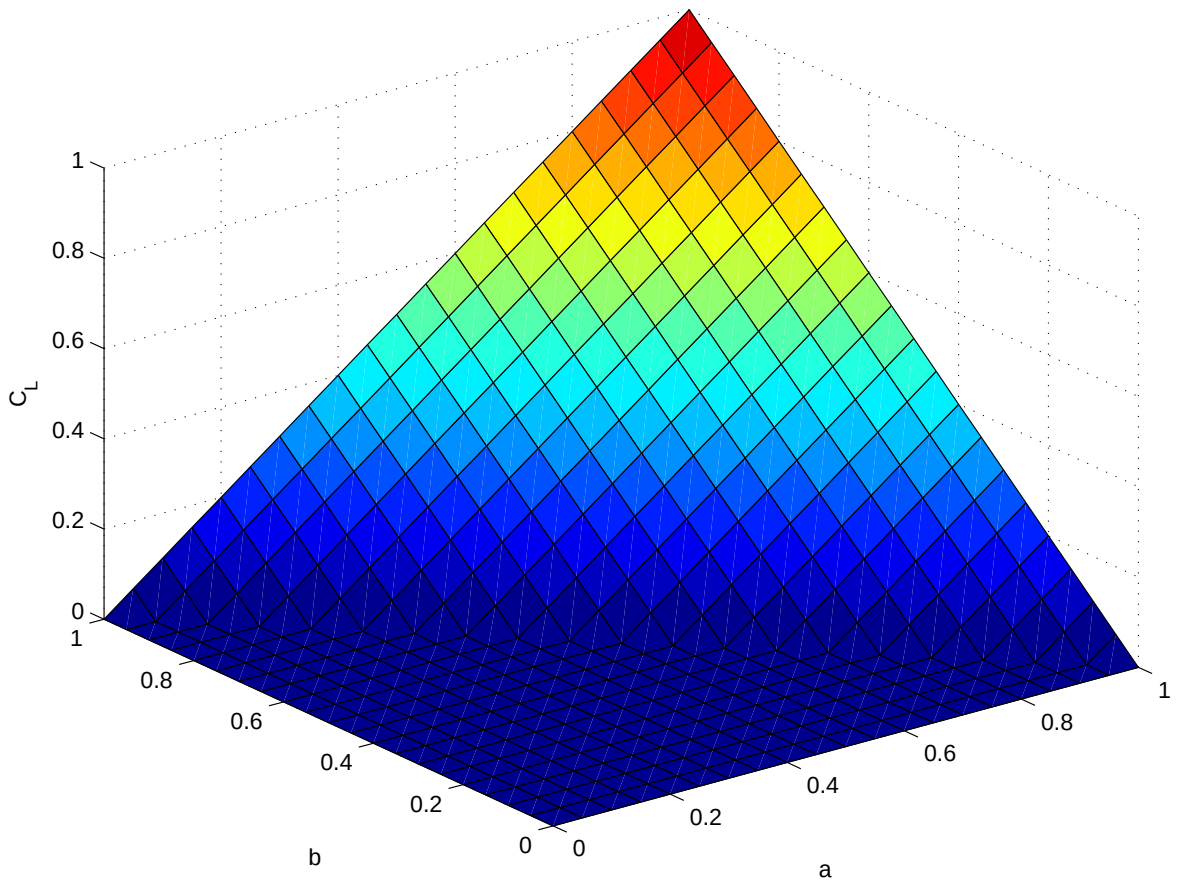
Exemplo 4 (Conjunção de Lukasiewicz)

$$C_L(a, b) = \max\{0, a + b - 1\}.$$



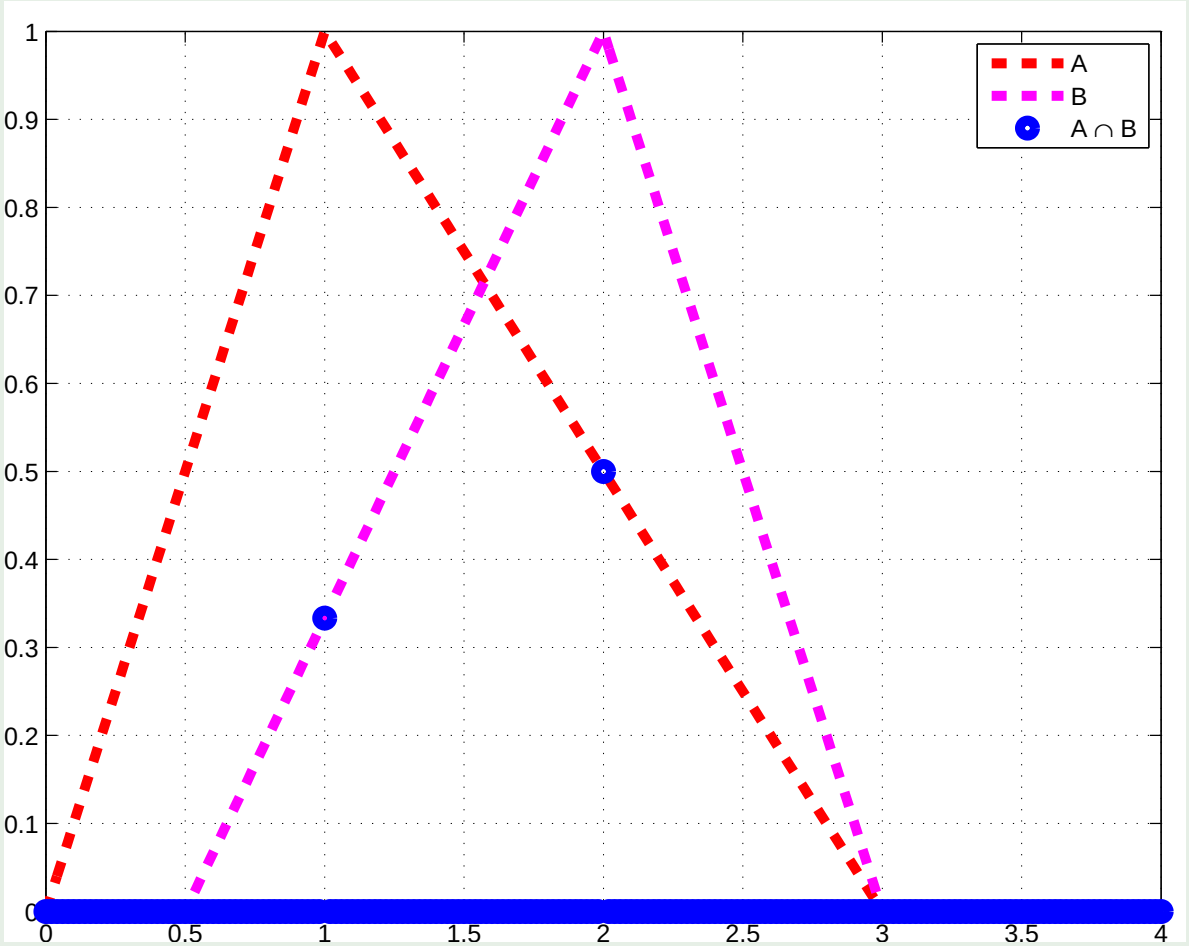
Exemplo 4 (Conjunção de Lukasiewicz)

$$C_L(a, b) = \max\{0, a + b - 1\}.$$



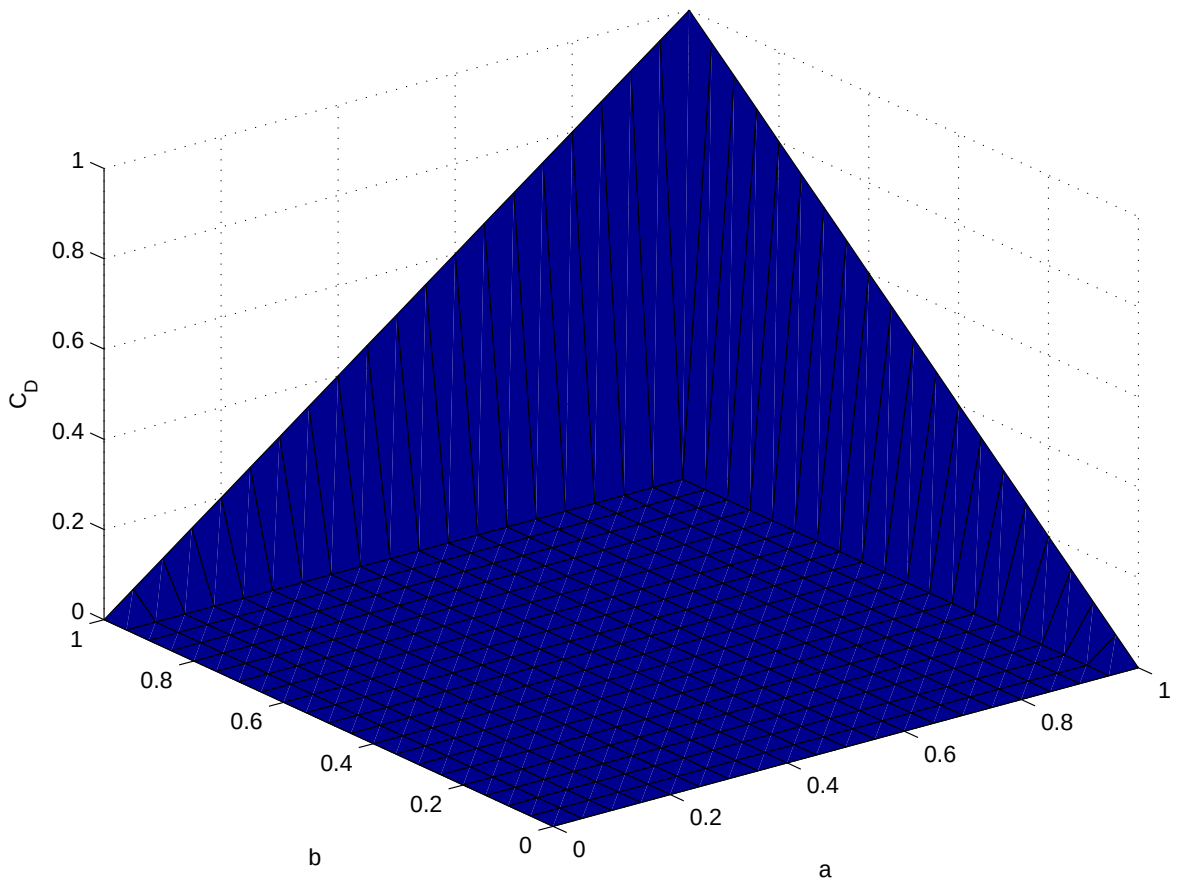
Exemplo 5 (Conjunção Drástica)

$$C_D(a,b) = \begin{cases} a, & b = 1, \\ b, & a = 1, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$



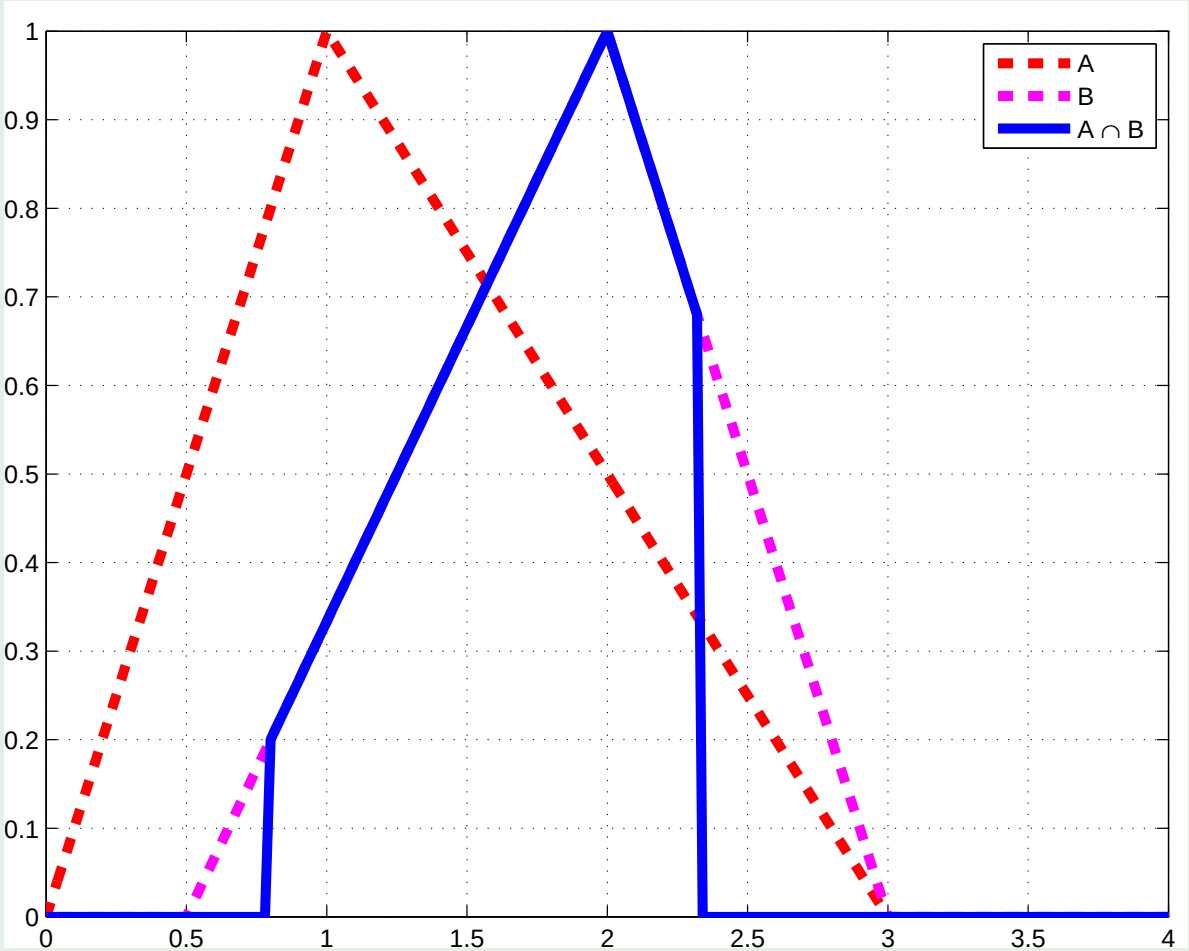
Exemplo 5 (Conjunção Drástica)

$$C_D(a,b) = \begin{cases} a, & b = 1, \\ b, & a = 1, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$



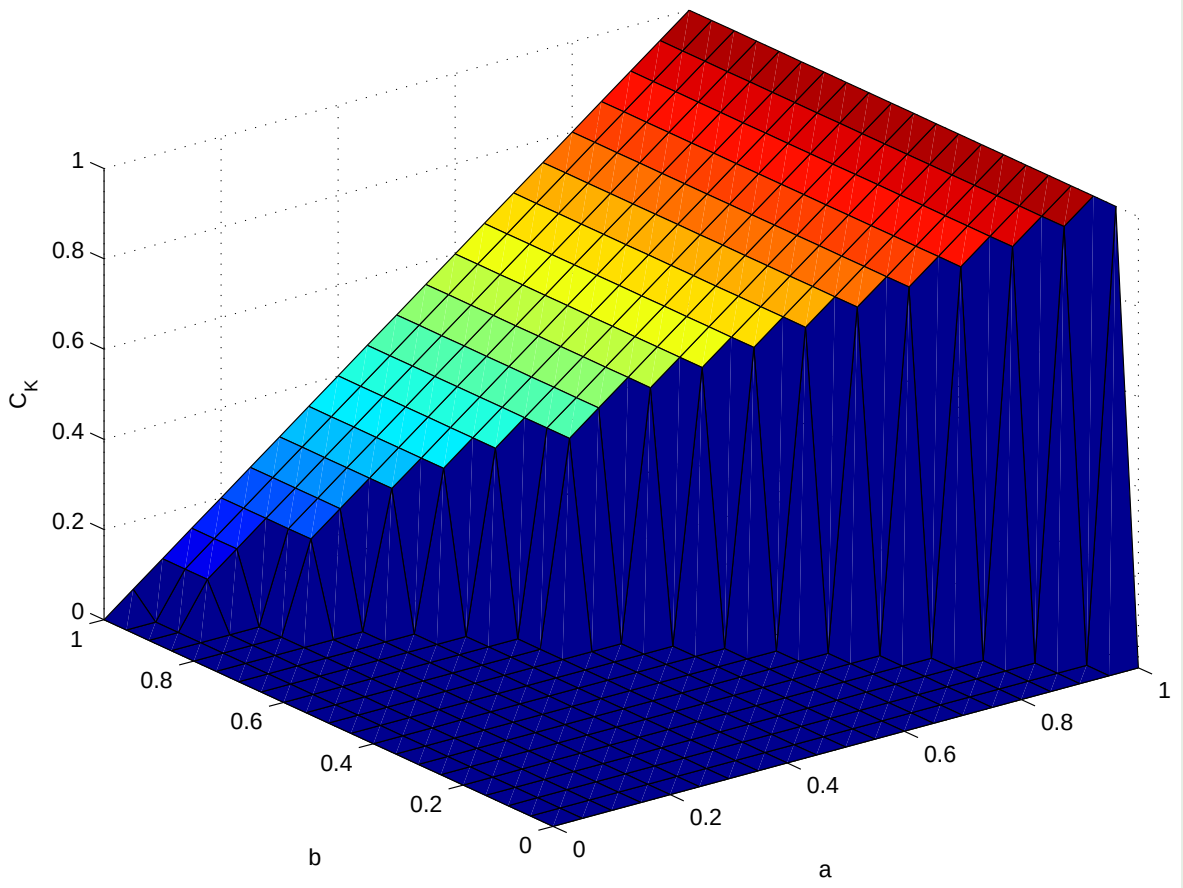
Exemplo 6 (Kleene-Dienes)

$$C_K(a,b) = \begin{cases} 0, & b \leq 1-a, \\ b, & b > 1-a. \end{cases}$$

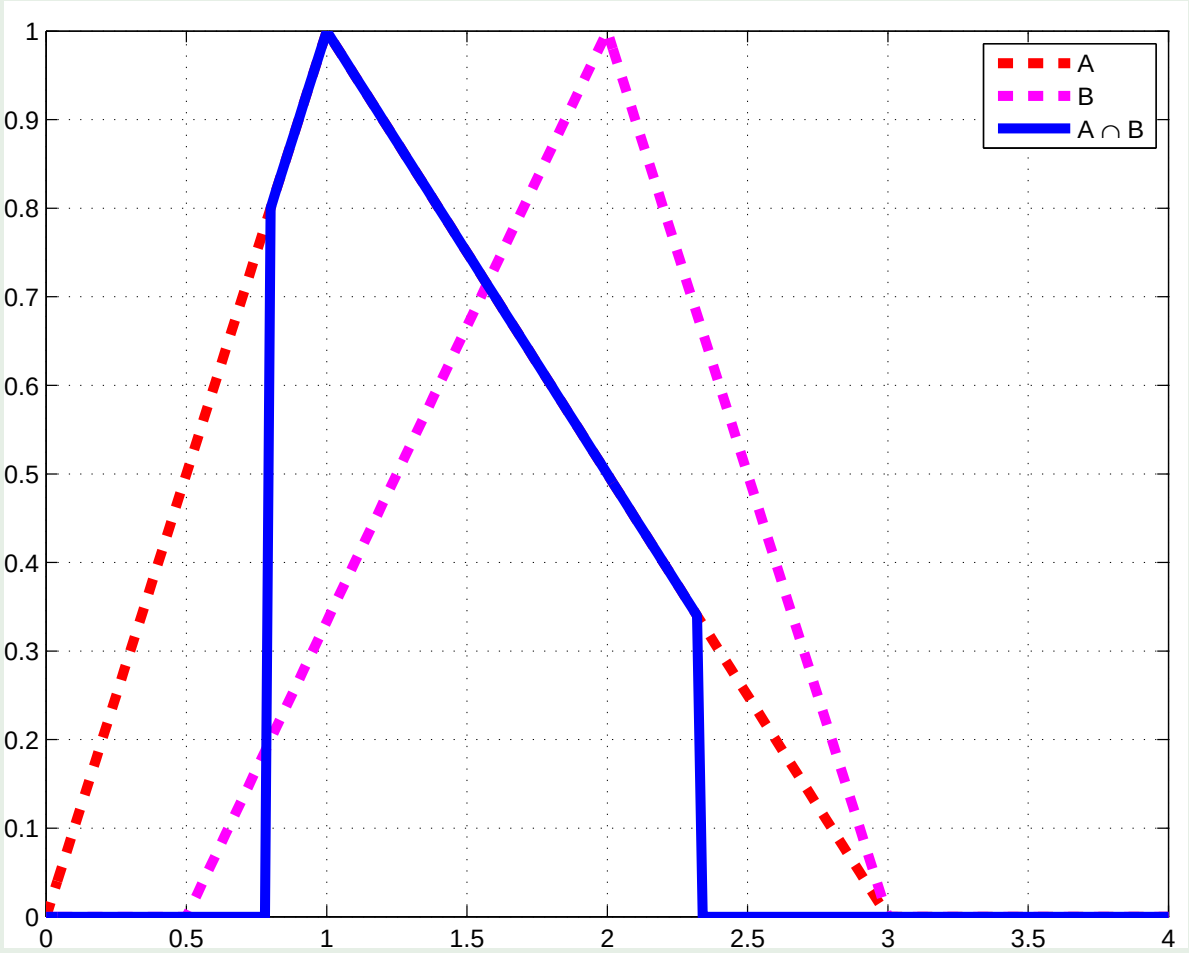


Exemplo 6 (Kleene-Dienes)

$$C_K(a,b) = \begin{cases} 0, & b \leq 1-a, \\ b, & b > 1-a. \end{cases}$$



Exemplo 7 (Kleene-Dienes)



A conjunção de Kleene-Dienes não é comutativa!
Ela também não é associativa, ou seja, podemos ter $(A \cap B) \cap C \neq A \cap (B \cap C)$.

Norma Triangular

A intersecção de conjuntos clássicos é comutativa, associativa e satisfaz $A \cap U = A$.
Impondo essas propriedades na intersecção de conjuntos *fuzzy*, concluímos que a conjunção deve ser comutativa, associativa e ter 1 como identidade. Logo, temos:

Definição 8 (Norma Triangular ou t-norma)

Uma norma triangular ou t-norma é uma operação $\triangle : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$, com $\triangle(a,b) = a \triangle b$, tal que

1. $a \triangle b = b \triangle a$, (comutativa)
2. $(a \triangle b) \triangle c = a \triangle (b \triangle c)$, (associativa)
3. $b \leq c \quad \Longrightarrow \quad a \triangle b \leq a \triangle c$, (monótona crescente)
4. $a \triangle 1 = a$, (identidade)

para $a, b, c \in [0,1]$.

Examples 9

- As conjunções do mínimo, produto, Lukasiewicz e drástica são todas normas t-normas denotadas por $\triangle_M$, $\triangle_P$, $\triangle_L$ e $\triangle_D$, respectivamente.
- A conjunção de Kleene-Dienes não é uma t-norma.

As t-normas geralmente não podem ser ordenadas. Porém, o mínimo é a maior t-norma enquanto que a t-norma drástica é a menor t-norma.

Pode-se demonstrar a seguinte relação em que $\triangle$ denota uma t-norma arbitrária:

$$a \triangle_D b \leq a \triangle b \leq a \triangle_M b, \quad \forall a, b \in [0, 1].$$

União de Conjuntos *Fuzzy*

Em termos das funções características, a união satisfaz:

$\chi_A(x)$	$\chi_B(x)$	$\chi_{A\cup B}(x)$
0	0	0
1	0	1
0	1	1
1	1	1

Tabela verdade da disjunção.

No caso *fuzzy*, a função de pertinência da união $A \cup B$ é determinada ponto-a-ponto a partir de uma disjunção *fuzzy* das funções de pertinência de A e B, ou seja,

$$(A \cup B)(x) = \mathcal{D}\big(A(x), B(x)\big), \quad \forall x \in U,$$

em que $\mathcal{D}$ denota uma disjunção *fuzzy*.

Disjunção *Fuzzy*

Definição 10 (Disjunção *Fuzzy*)

Uma função $\mathcal{D} : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ crescente em ambos argumentos é uma disjunção *fuzzy* se

$$\mathcal{D}(0,0) = 0 \quad \text{e} \quad \mathcal{D}(0,1) = \mathcal{D}(1,0) = \mathcal{D}(1,1) = 1.$$

Uma disjunção *fuzzy* não precisa ser comutativa, associativa nem possuir uma identidade!

Conorma Triangular

A união de conjuntos clássicos é comutativa, associativa e satisfaz $A \cup \emptyset = A$.
Impondo essas propriedades na união de conjuntos *fuzzy*, concluímos que a disjunção deve ser comutativa, associativa e ter 0 como identidade. Logo, temos:

Definição 11 (Conorma Triangular ou t-conorma)

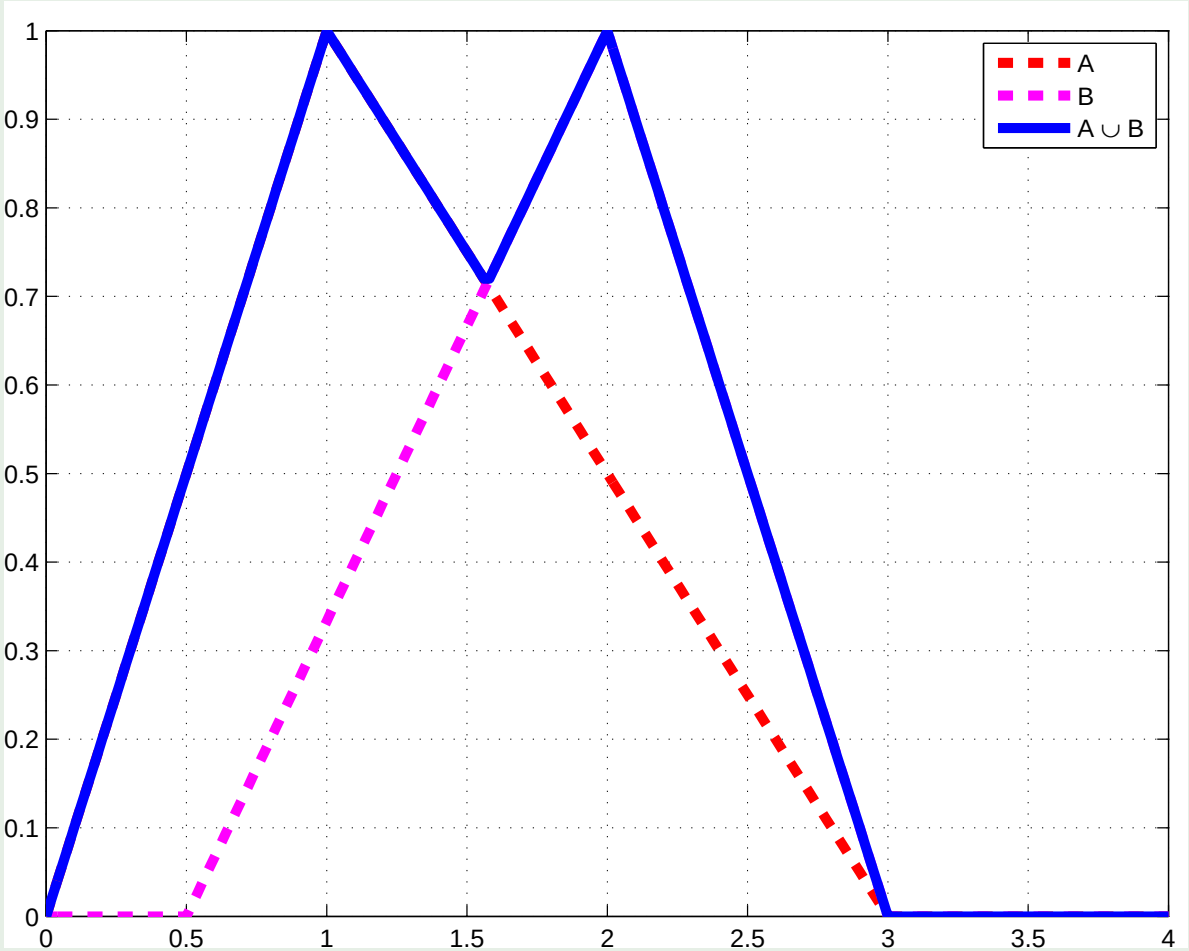
Uma conorma triangular ou t-conorma é uma operação $\bigtriangledown : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$, com $\bigtriangledown(a,b) = a \bigtriangledown b$, tal que

1. $a \bigtriangledown b = b \bigtriangledown a$, (comutativa)
2. $(a \bigtriangledown b) \bigtriangledown c = a \bigtriangledown (b \bigtriangledown c)$, (associativa)
3. $b \leq c \quad \Longrightarrow \quad a \bigtriangledown b \leq a \bigtriangledown c$, (monótona crescente)
4. $a \bigtriangledown 0 = a$, (identidade)

para $a, b, c \in [0,1]$.

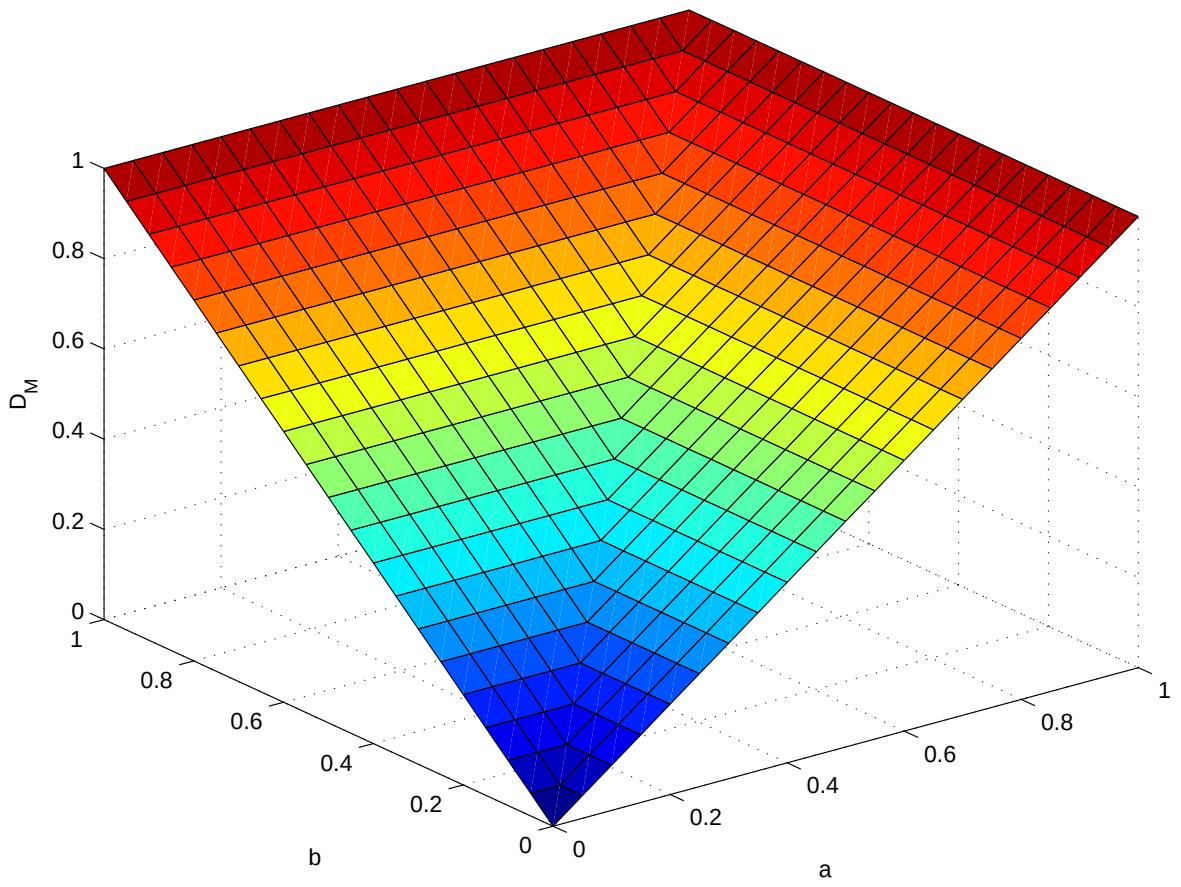
Exemplo 12 (Máximo)

$$\bigtriangledown_M(a, b) = \max\{a, b\} = a \vee b.$$



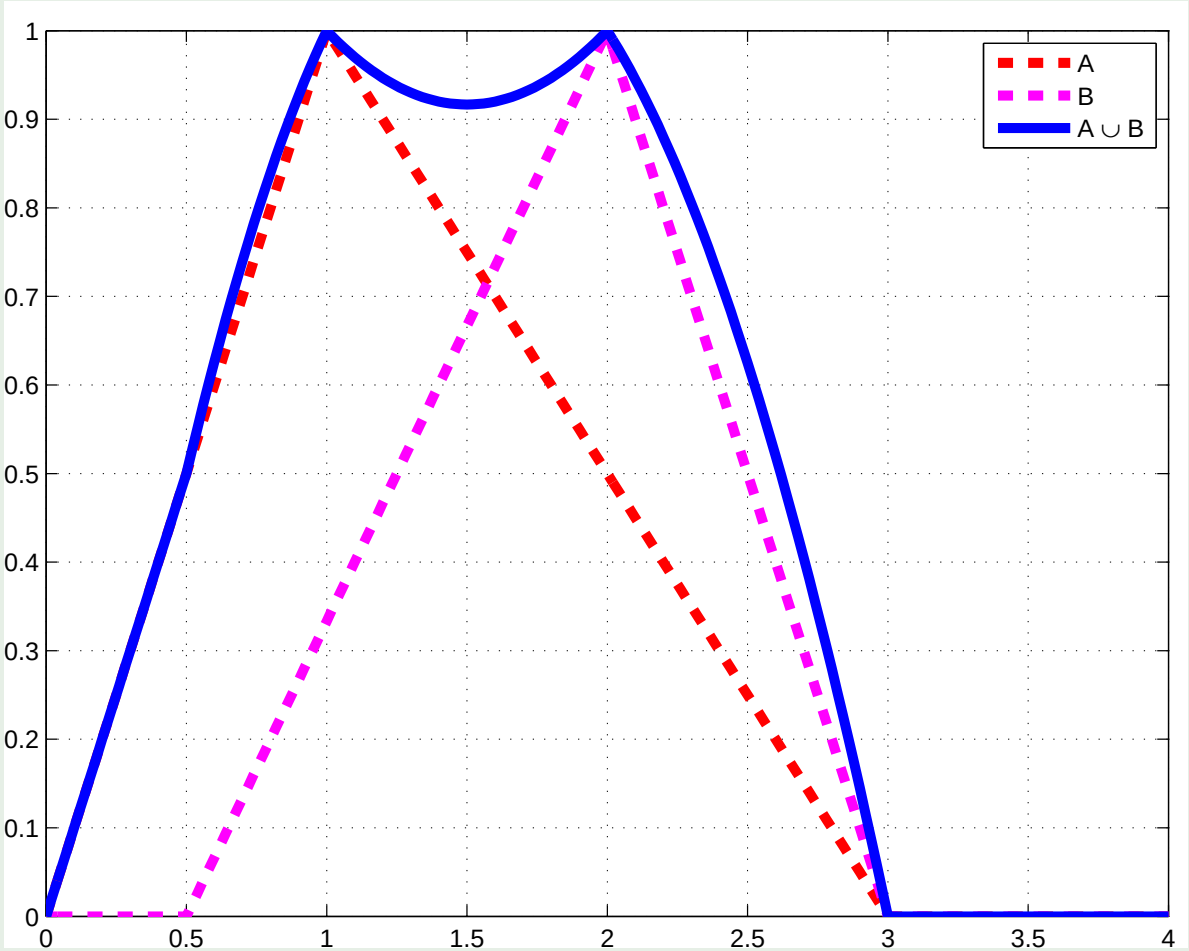
Exemplo 12 (Máximo)

$$\bigtriangledown_M(a, b) = \max\{a, b\} = a \vee b.$$



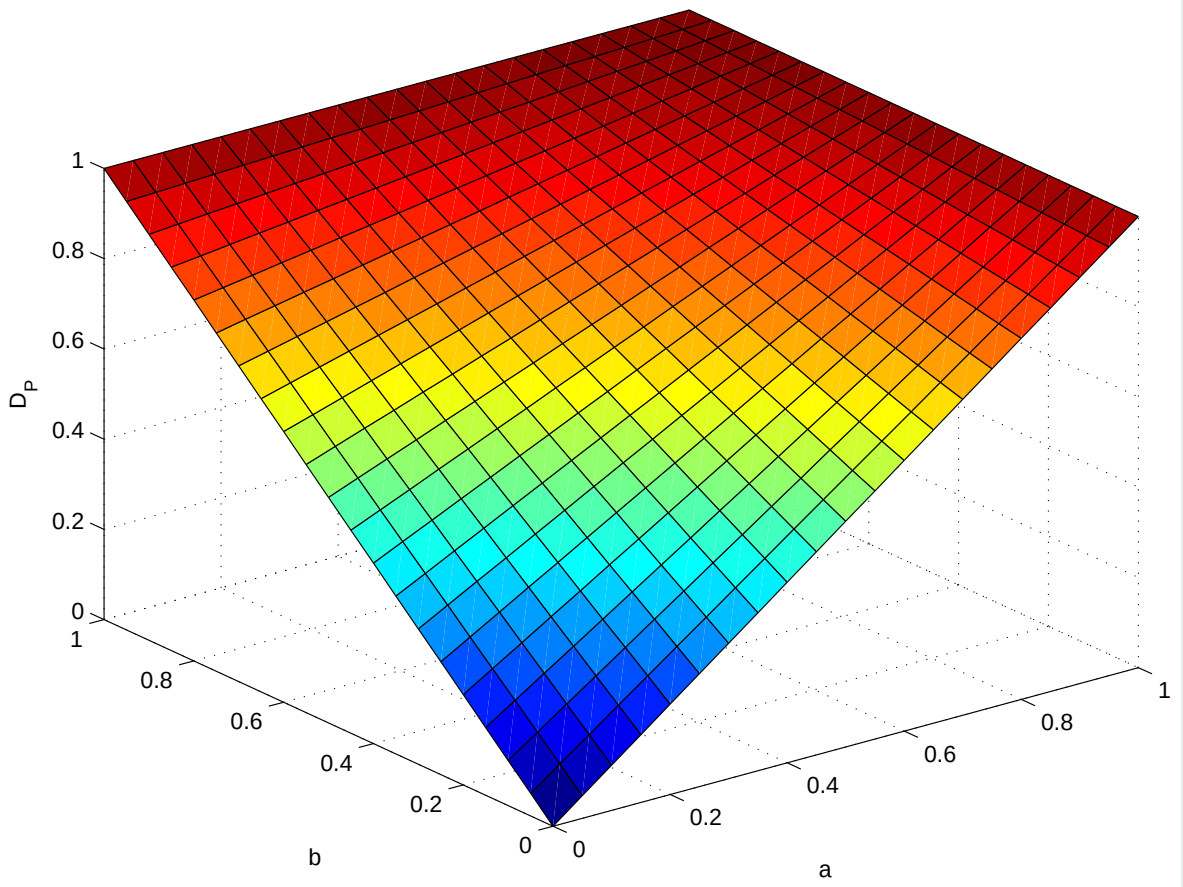
Exemplo 13 (Soma probabilística)

$$\bigtriangledown_P(a, b) = a + b - a \cdot b.$$



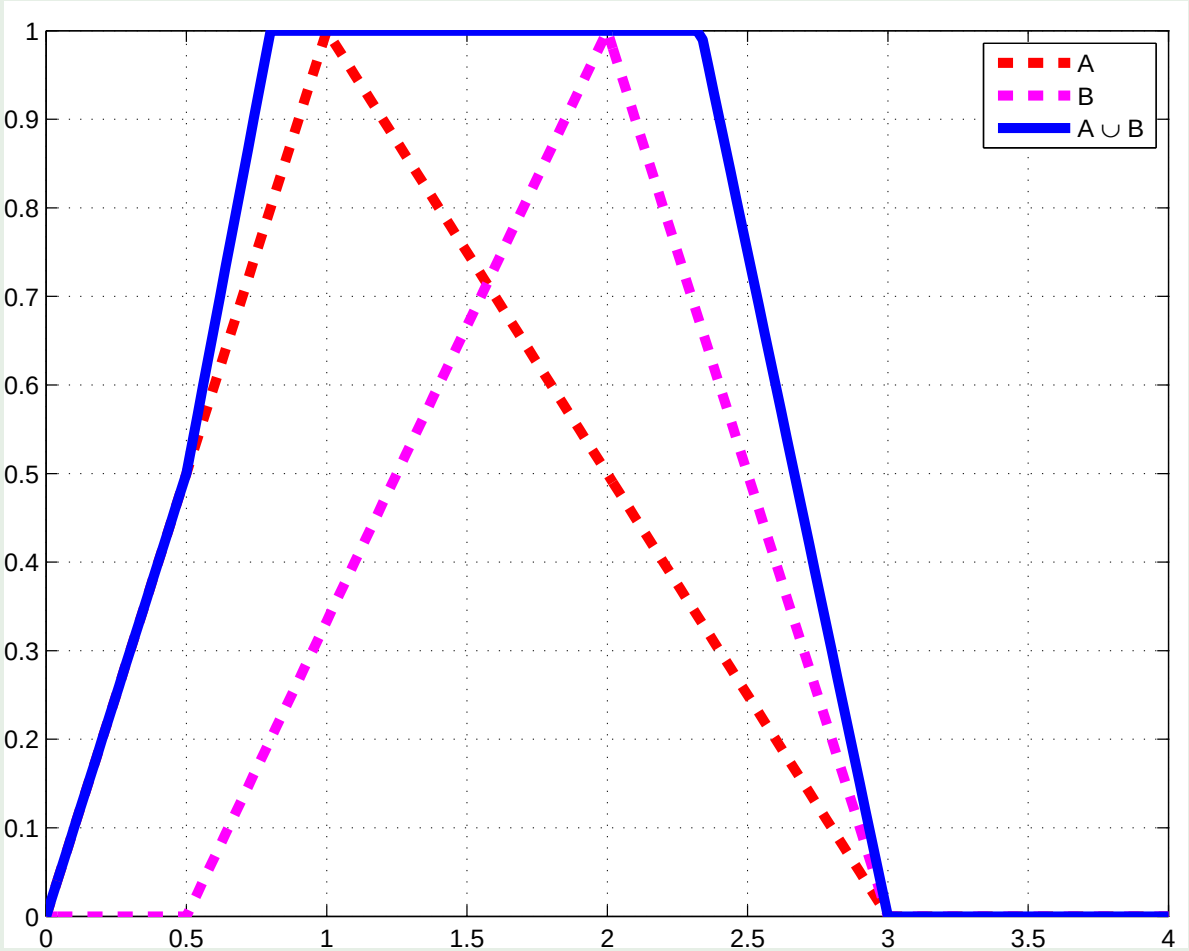
Exemplo 13 (Soma probabilística)

$$\bigtriangledown_P(a, b) = a + b - a \cdot b.$$



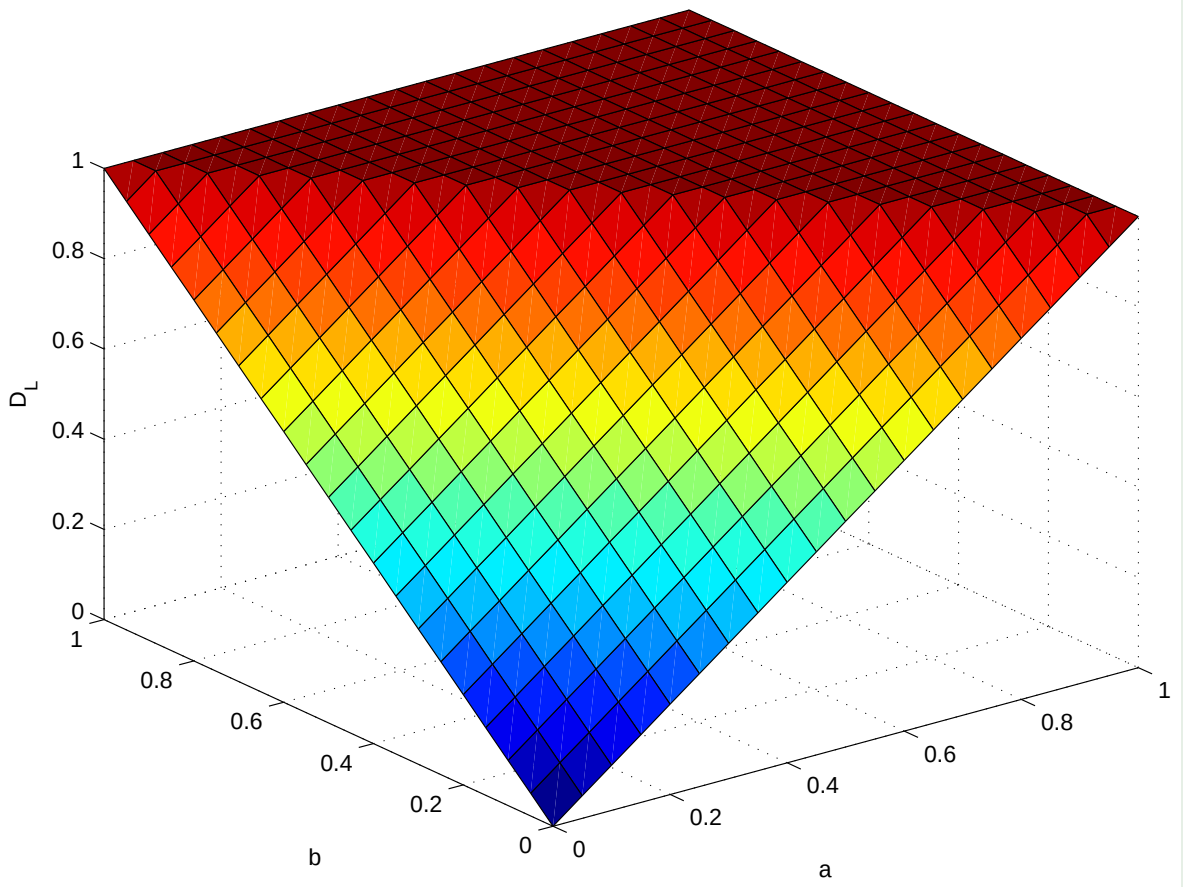
Exemplo 14 (T-conorma de Lukasiewicz)

$$\bigtriangledown_L(a,b) = \min\{1, a+b\}.$$



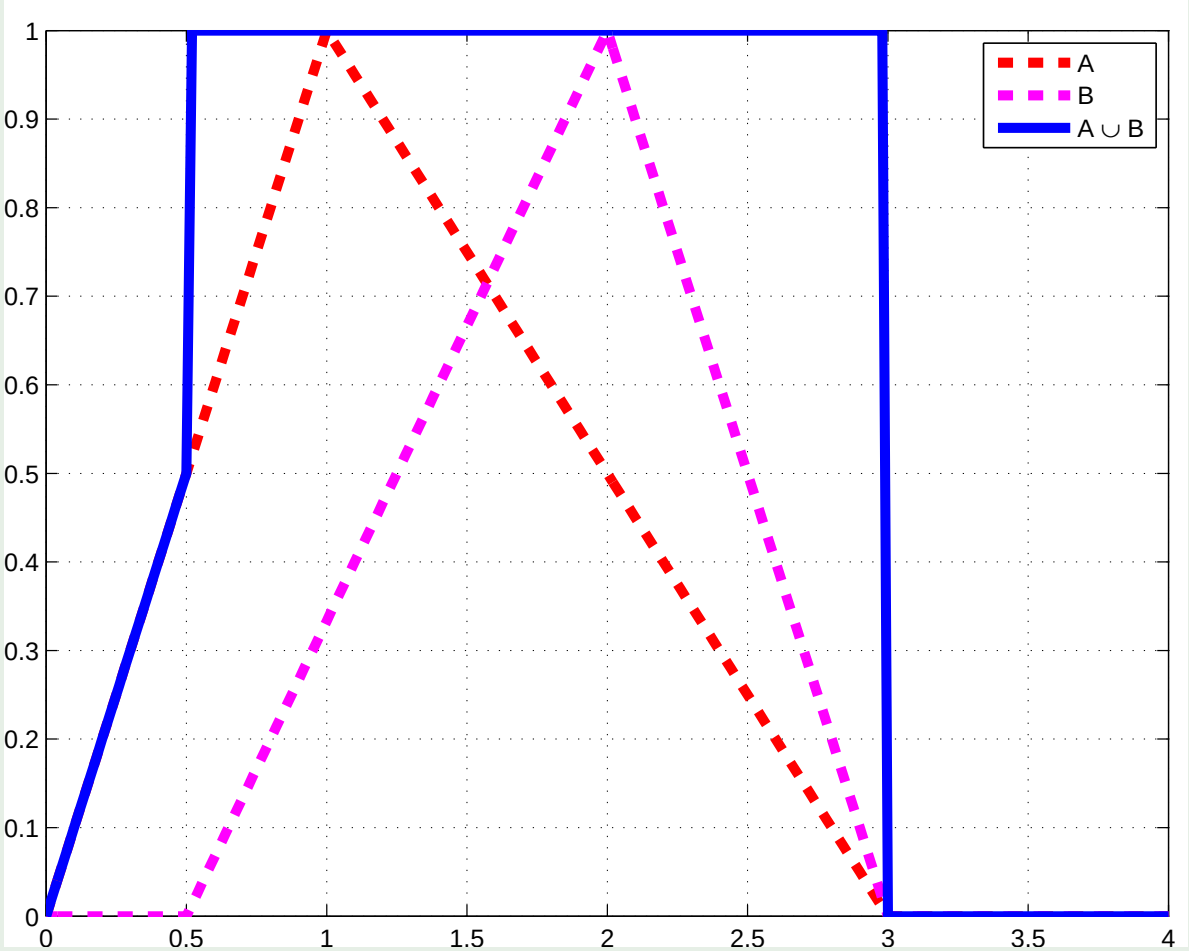
Exemplo 14 (T-conorma de Lukasiewicz)

$$\bigtriangledown_L(a, b) = \min\{1, a + b\}.$$



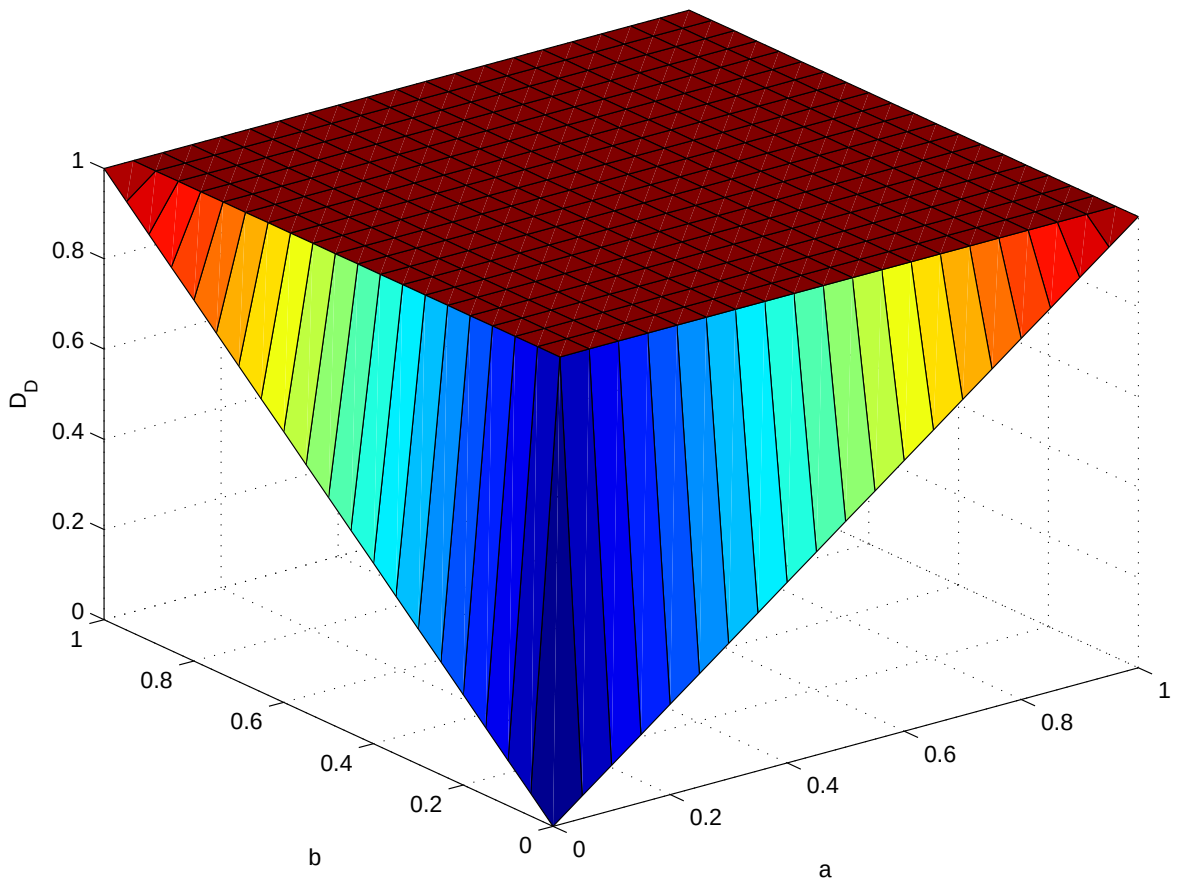
Exemplo 15 (Conjunção Drástica)

$$\triangledown_D(a,b) = \begin{cases} a, & b = 0, \\ b, & a = 0, \\ 1, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$



Exemplo 15 (Conjunção Drástica)

$$\triangledown_D(a,b) = \begin{cases} a, & b = 0, \\ b, & a = 0, \\ 1, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$



As t-conormas geralmente não podem ser ordenadas. Porém, o máximo é a menor t-conorma enquanto que a t-conorma drástica é a maior t-norma.

Pode-se demonstrar a seguinte relação em que $\bigtriangledown$ denota uma t-conorma arbitrária:

$$a \bigtriangledown_M b \leq a \bigtriangledown b \leq a \bigtriangledown_D b, \quad \forall a, b \in [0, 1].$$

Complemento de um Conjunto *Fuzzy*

Na teoria clássica, o complemento de um conjunto A é formado por todos os elementos que **não** pertencem a A, ou seja,

$$A^c = \{x \in U : x \notin A\}.$$

Em termos das funções características, o complemento satisfaz satisfaz:

$\chi_A(x)$	$\chi_{A^c}(x)$
0	1
1	0

Tabela verdade da negação.

No caso *fuzzy*, a função de pertinência do complemento A^c é determinada ponto-a-ponto pela negação *fuzzy* da função de pertinência de A, ou seja,

$$A^c(x) = \eta\big(A(x)\big), \quad \forall x \in U,$$

em que η denota uma negação *fuzzy*.

Negação *Fuzzy*

Definição 16 (Negação Fuzzy)

Uma aplicação decrescente $\eta : [0,1] \to [0,1]$ é uma negação *fuzzy* se satisfaz $\eta(0) = 1$ e $\eta(1) = 0$.

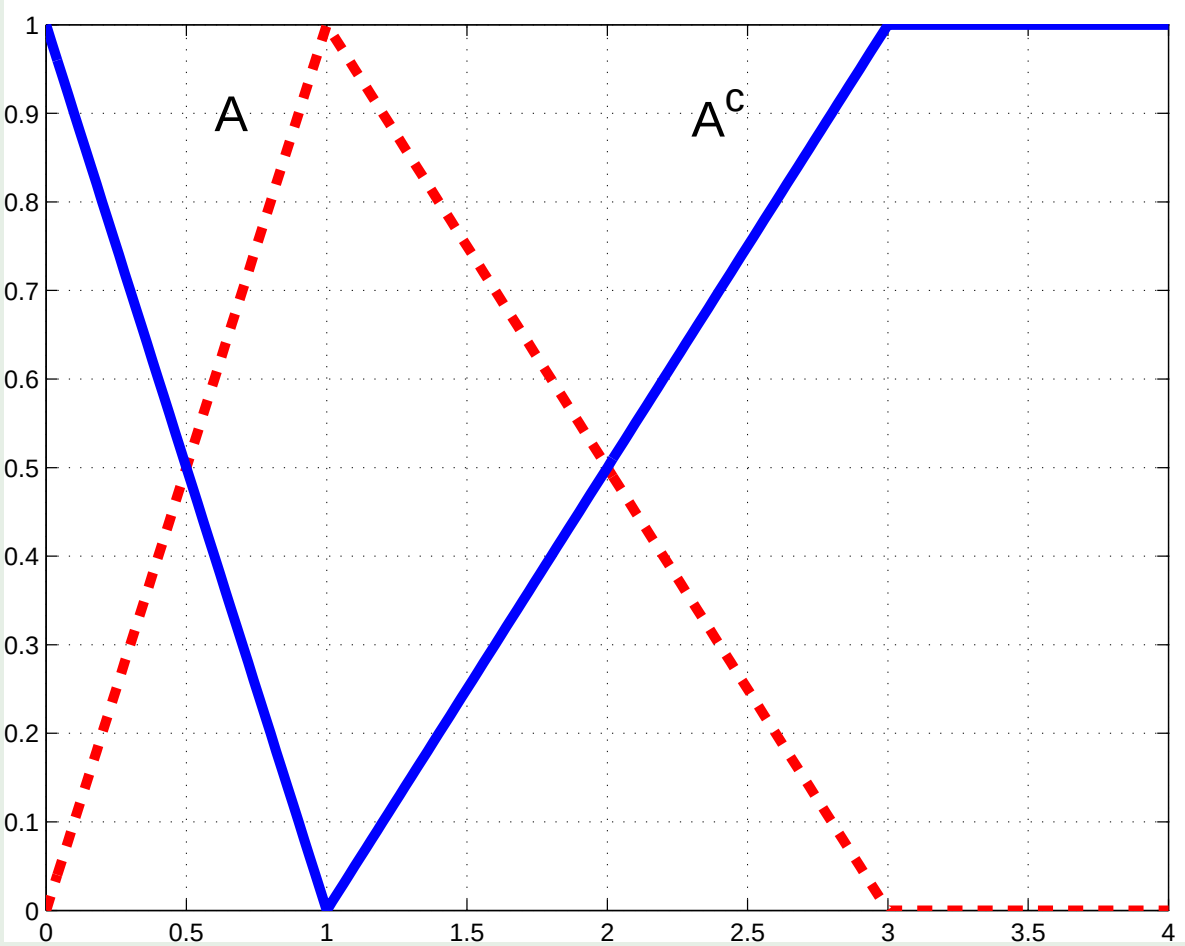
Definição 17 (Negação Fuzzy Forte)

Uma negação *fuzzy* é dita **forte** se é uma involução, ou seja,

$$\eta\big(\eta(a)\big) = a, \quad \forall a \in [0,1].$$

Exemplo 18 (Negação Usual (Standard))

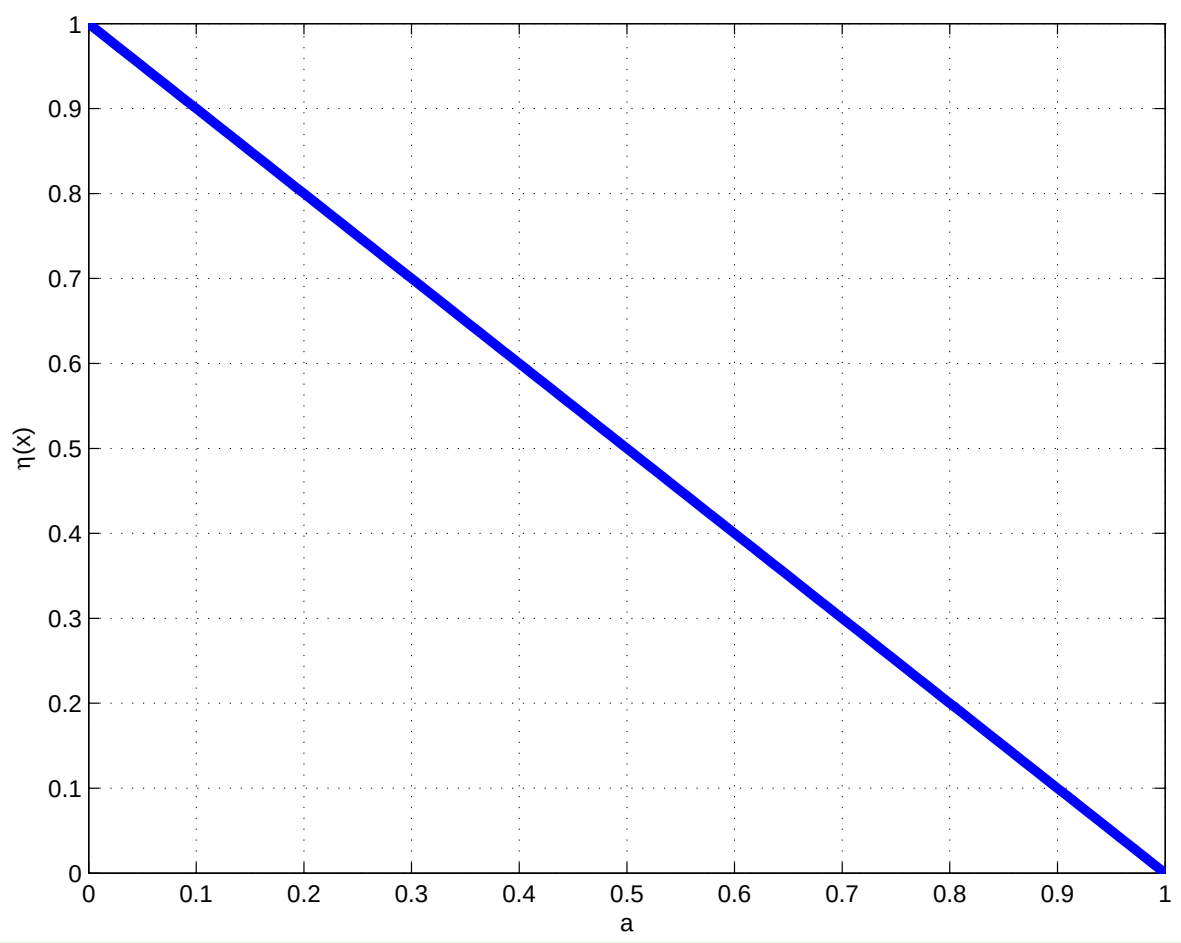
$$\eta_S(a) = 1 - a.$$



Esta é uma negação forte!

Exemplo 18 (Negação Usual (Standard))

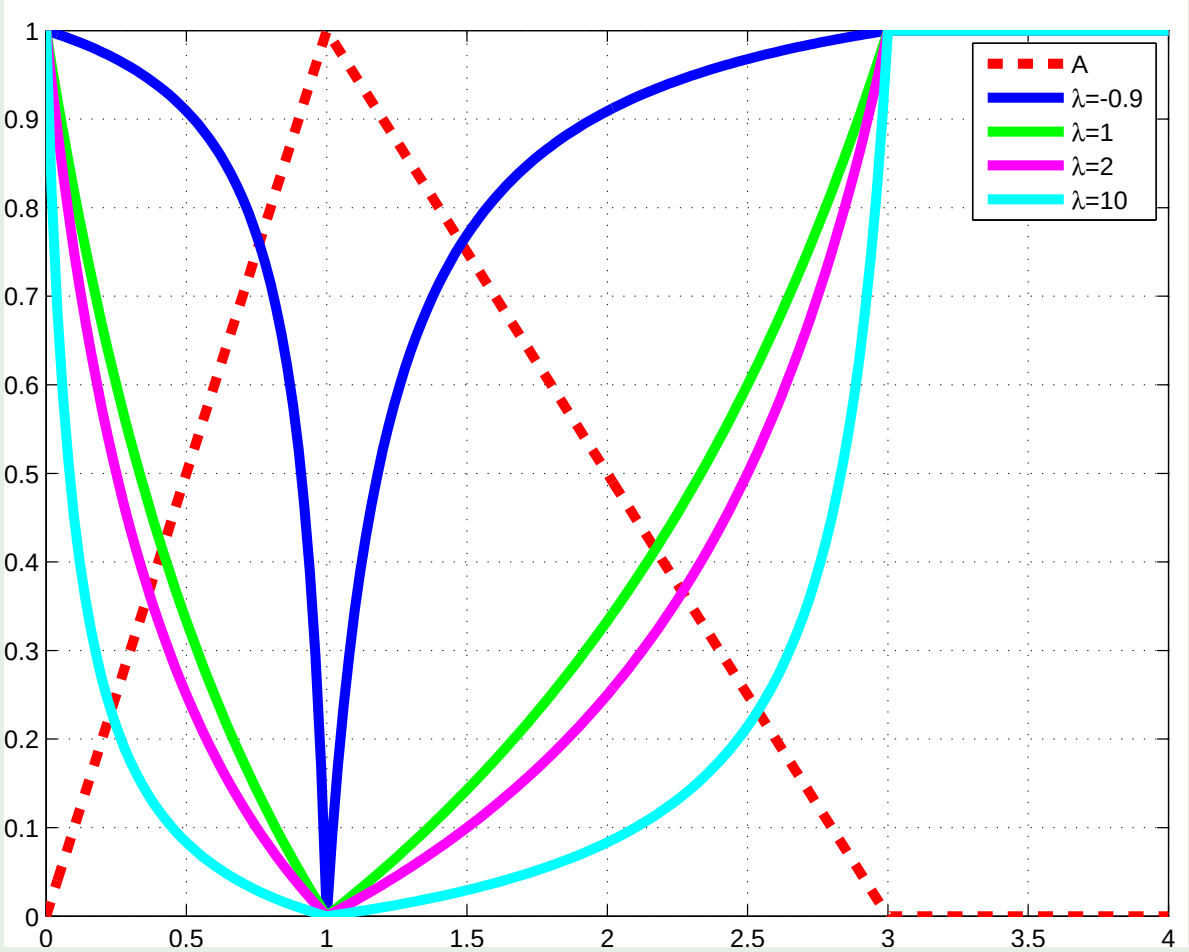
$$\eta_S(a) = 1 - a.$$



Esta é uma negação forte!

Exemplo 19 (Negação de Sugeno)

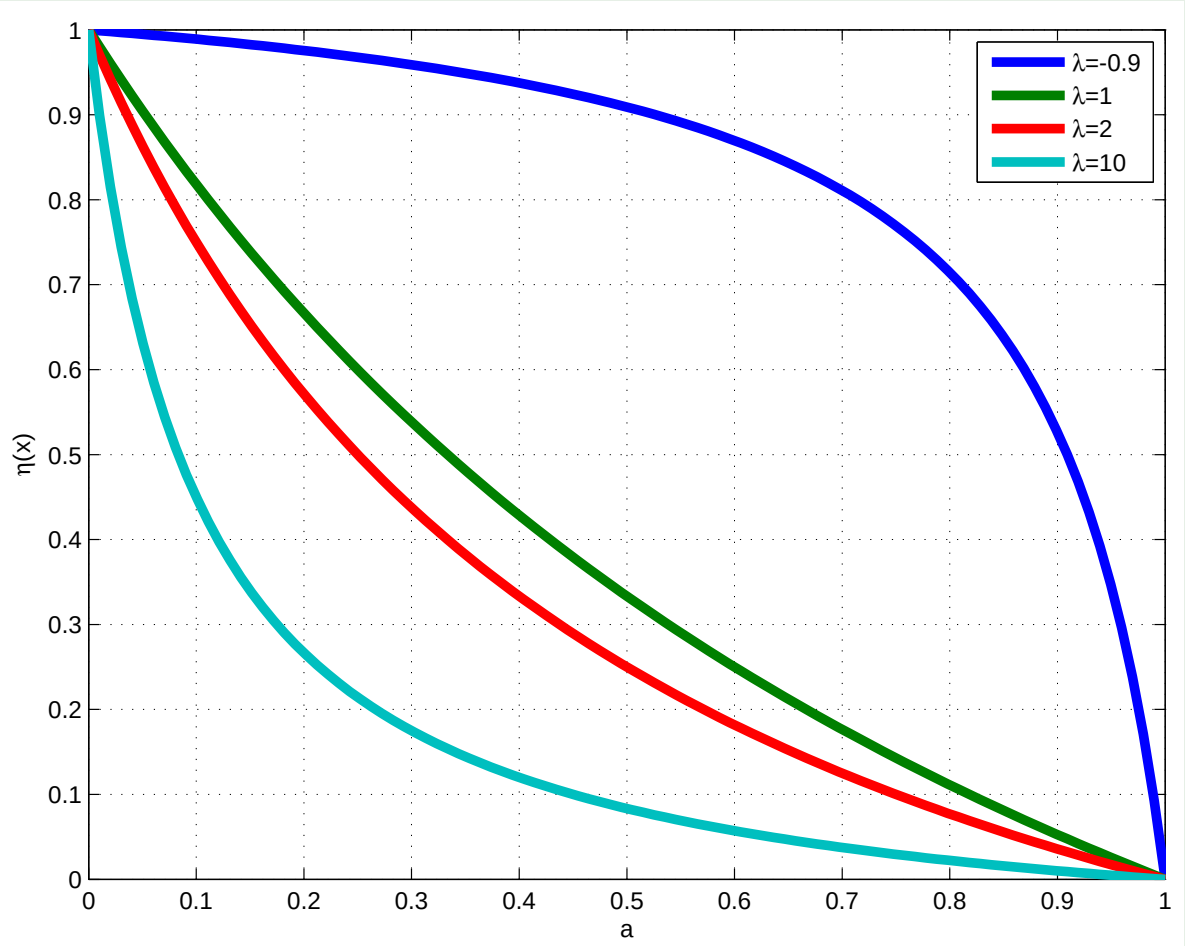
$$\eta_\lambda(a) = \frac{1-a}{1+\lambda a}, \quad \lambda \in (-1, +\infty).$$



A negação usual é obtida considerando $\lambda = 0$.

Exemplo 19 (Negação de Sugeno)

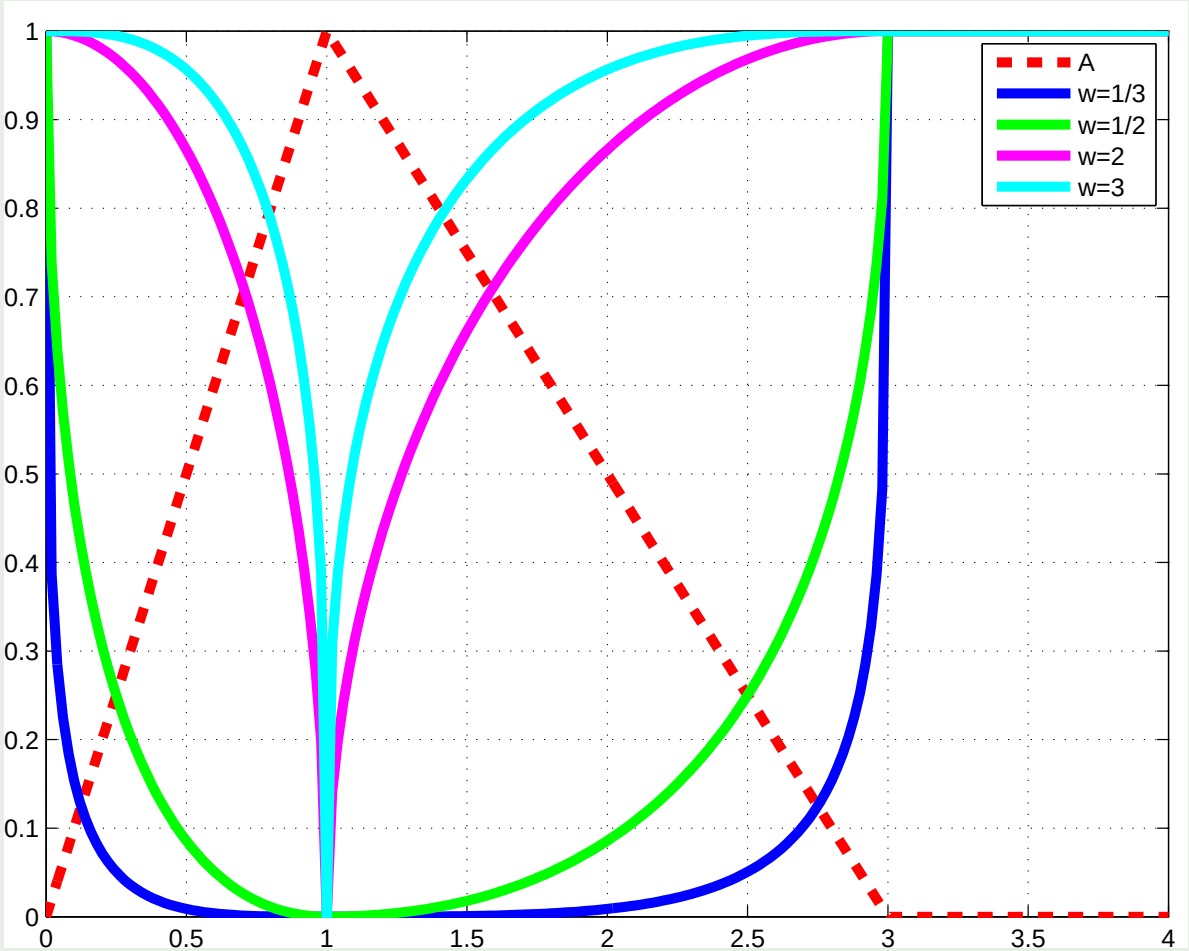
$$\eta_\lambda(a) = \frac{1-a}{1+\lambda a}, \quad \lambda \in (-1, +\infty).$$



A negação usual é obtida considerando $\lambda = 0$.

Exemplo 20 (Negação de Yager)

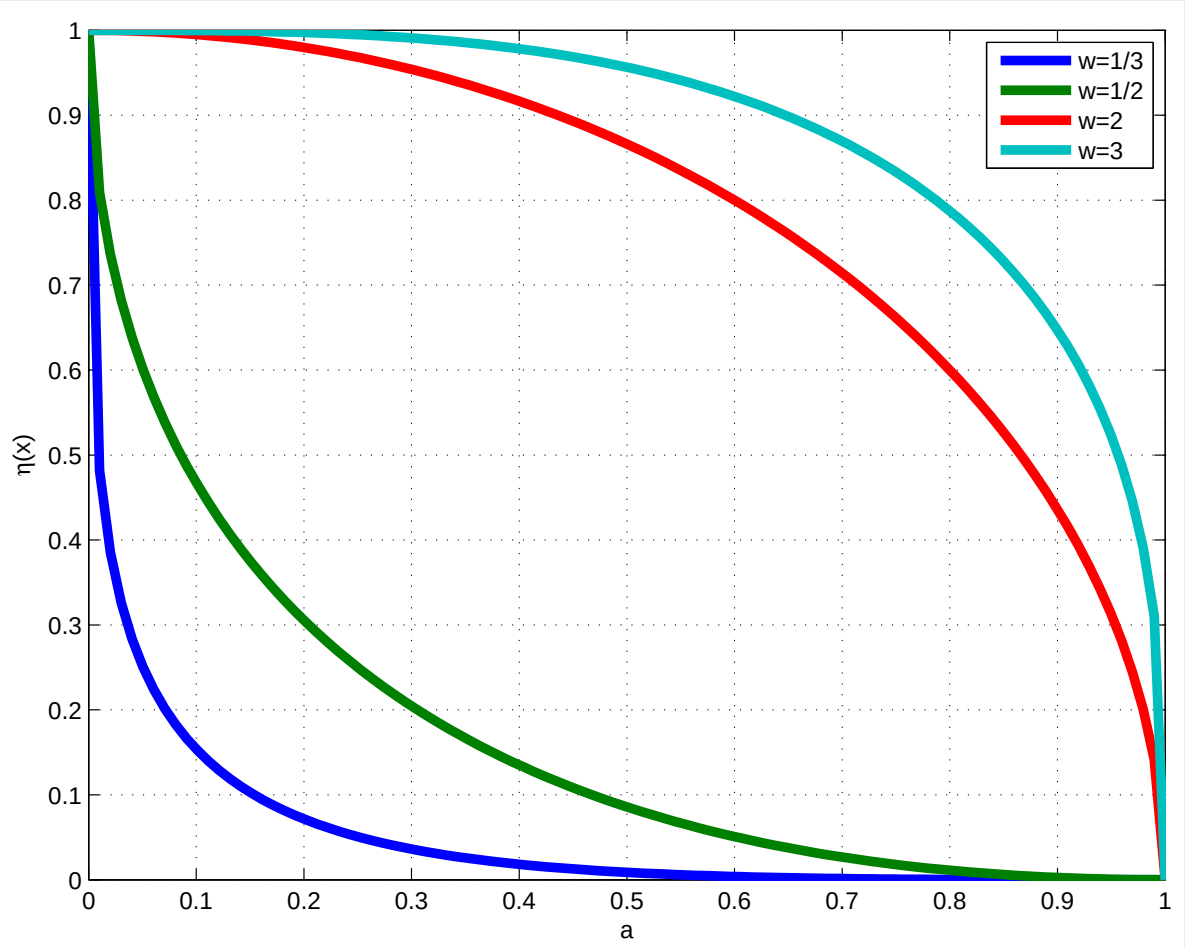
$$\eta_w(a) = \sqrt[w]{1 - a^w}, \quad w \in (0, +\infty).$$



A negação usual é obtida considerando $w = 1$.

Exemplo 20 (Negação de Yager)

$$\eta_w(a) = \sqrt[w]{1 - a^w}, \quad w \in (0, +\infty).$$



A negação usual é obtida considerando $w = 1$.

Leis de DeMorgan

Leis de DeMorgan

Na teoria clássica dos conjuntos, as operações de união, intersecção e complemento satisfazem

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c \quad \text{e} \quad (A \cup B)^c = A^c \cap B^c.$$

Tripla de DeMorgan: $(\triangle, \triangledown, \eta)$.

As leis de DeMorgan valem na teoria *fuzzy* se a união, intersecção e complemento são determinados usando uma t-norma, uma t-conorma e uma negação *fuzzy* forte tais que

$$\eta\big(a \triangle b\big) = \eta(a) \triangledown \eta(b) \quad \text{e} \quad \eta\big(a \triangledown b\big) = \eta(a) \triangle \eta(b),$$

para todo $a, b \in [0, 1]$.

Exemplo 21

São exemplos de tripla de DeMorgan:

- $(\triangle_M, \bigtriangledown_M, \eta_S)$ – Mínimo, máximo e negação usual.
- $(\triangle_P, \bigtriangledown_P, \eta_S)$ – Produto, soma probabilística e negação usual.
- $(\triangle_L, \bigtriangledown_L, \eta_S)$ – T-norma e t-conorma de Lukasiewicz e negação usual.

Lei do Terceiro Excluído

Lei do terceiro excluído

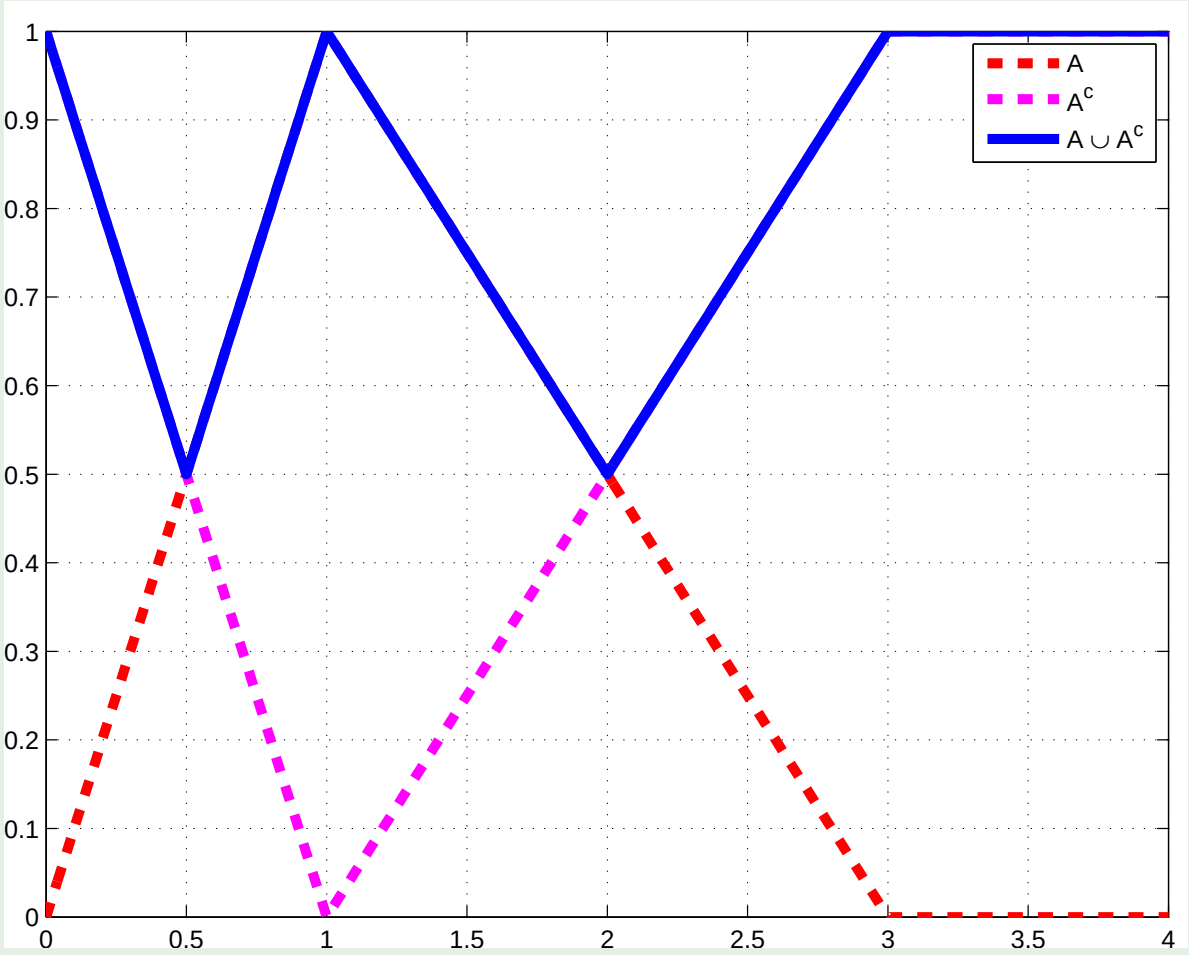
Na lógica clássica, uma proposição é verdadeira ou sua negação é verdadeira.
Em termos da linguagem de conjuntos, tem-se que:

$$A \cup A^c = U.$$

Na teoria *fuzzy*, não temos essa lei!

Exemplo 22

Considere a negação usual e a t-conorma do máximo.



Neste caso, $A \cup A^c \neq U$.

Lei da não-contradição

Lei da não-contradição

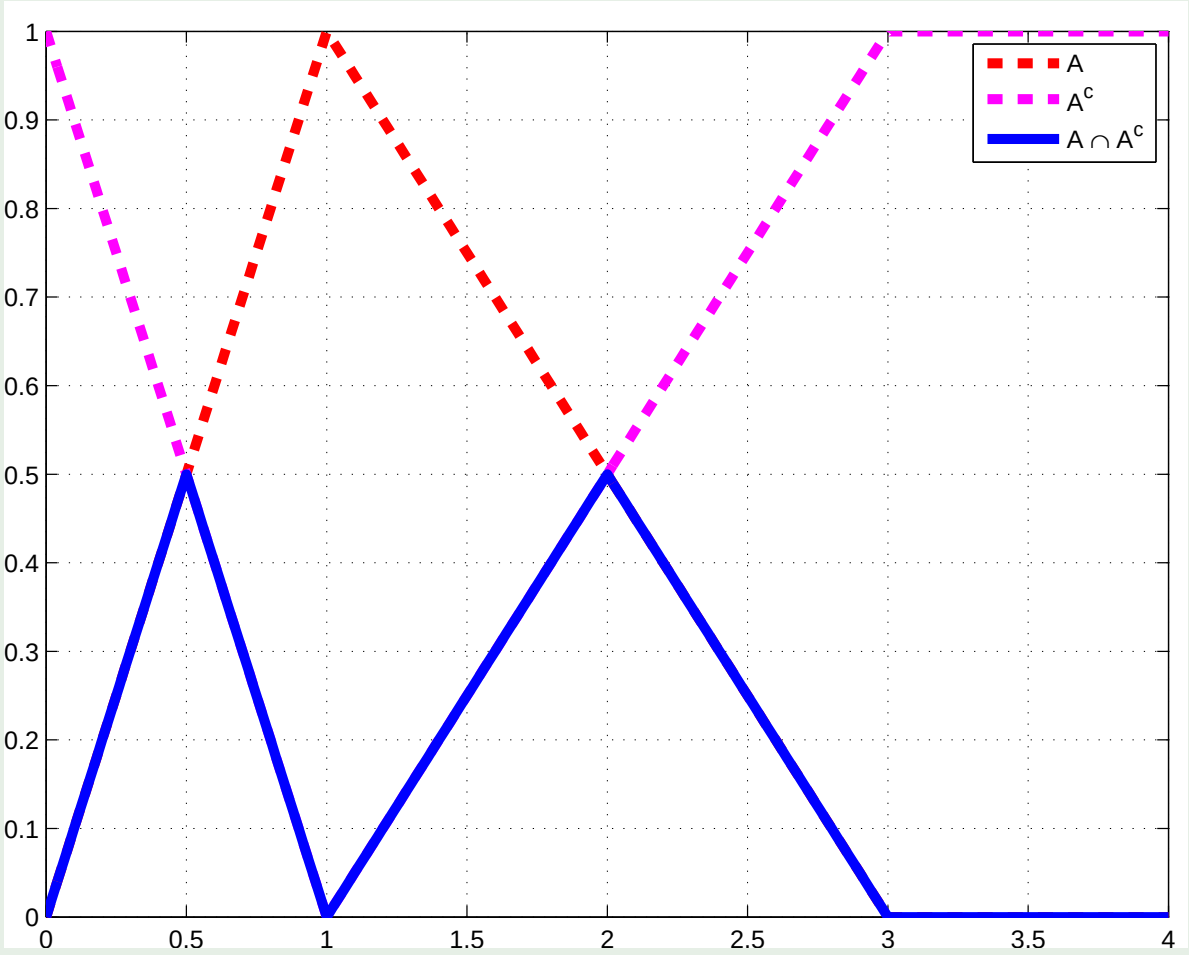
Na lógica clássica, duas afirmações contraditórias não podem ser verdadeiras ao mesmo tempo.
Em termos da linguagem de conjuntos, tem-se que:

$$A \cap A^c = \emptyset.$$

Na teoria *fuzzy*, não temos essa lei!

Exemplo 23

Considere a negação usual e a t-norma do mínimo.



Neste caso, $A \cap A^c \neq \emptyset$.

A violação da lei da não-contradição mostra que a teoria *fuzzy* permite a coexistência de uma classe e seu complemento!