Aula 20 Determinando o Consequente de um Modelo de Takagi-Sugeno de Primeira Ordem.

MS580 - Introdução à Teoria *Fuzzy*

Marcos Eduardo Valle

Departamento de Matemática Aplicada
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Universidade Estadual de Campinas

Na aula anterior, apresentamos o método de inferência de Takagi-Sugeno para sistemas baseados em regras *fuzzy* em que os antecedentes são conjuntos *fuzzy* mas os consequentes são funções das variáveis independentes.

Na aula de hoje, veremos como podemos determinar as funções do consequente de um modelo de Takagi-Sugeno de primeira ordem com base num conjunto de dados numéricos.

Modelo de Takagi-Sugeno

Regras Fuzzy de Takagi-Sugeno

No modelo de Takagi-Sugeno, as regras são da forma:

$$\text{SE } x_1 \text{ é } A_{1i} \textbf{ e } \ldots \textbf{ e } x_n \text{ é } A_{ni}, \text{ ENTÃO } y = f_i(x_1, \ldots, x_n),$$

em que $A_{1i}, A_{2i}, \ldots, A_{ni}$ são conjuntos *fuzzy* dos antecedentes enquanto que o consequente é uma função $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Equivalentemente, podemos escrever a base de regras como

$$\text{SE } \mathbf{x} \text{ é } A_i \text{ ENTÃO } y = f_i(\mathbf{x}), \quad \forall i = 1, \ldots, k,$$

em que $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ e $A_i \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ para $i = 1, \ldots, k$.

Inferência de Takagi-Sugeno

Dada uma entrada $\mathbf{x}$, a saída do modelo de Takagi-Sugeno é

$$y = \frac{\sum_{i=1}^{k} w_i f_i(\mathbf{x})}{\sum_{i=1}^{k} w_i},$$

em que

$$w_i = A_i(\mathbf{x}) = \varphi_{A_{1i}}(x_1) \triangle \varphi_{A_{2i}}(x_2) \triangle \ldots \triangle \varphi_{A_{ni}}(x_n), \quad \forall i = 1, \ldots, k,$$

representam as ativações de cada regra *fuzzy*.

Equivalentemente, podemos escrever

$$y = \sum_{i=1}^{k} \bar{w}_i f_i(\mathbf{x}), \quad \text{em que} \quad \bar{w}_i = \frac{w_i}{\sum_{l=1}^{k} w_l},$$

são as ativações normalizadas.

Takagi-Sugeno de Primeira Ordem

Considere um modelo de Takagi-Sugeno de primeira ordem, ou seja, as funções $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ são polinômios de primeira ordem:

$$f_i(x_1, \ldots, x_n) = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n + b_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + b_i,$$

para todo $i = 1, \ldots, k$.

Os parâmetros a_{ij} e b_i das funções f_i's dos consequentes podem ser determinados com base num conjunto de dados

$$\mathcal{T} = \{(\mathbf{x}^\xi, d_\xi) : \xi = 1, \ldots, m\}$$

chamado **conjunto de treinamento**, em que d_ξ representa a resposta desejada após a observação de $\mathbf{x}_\xi$, para $\xi = 1, \ldots, m$.

Suponha que conhecemos os conjuntos *fuzzy* $A_i \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$, $i = 1, \ldots, k$, dos antecedentes e temos um conjunto de treinamento $\mathcal{T} = \{(\mathbf{x}^\xi, d_\xi) : \xi = 1, \ldots, m\}$.

Podemos determinar os parâmetros a_{ij} e b_i que minimiza a soma dos erros quadráticos

$$E = \sum_{\xi=1}^{m} (y_\xi - d_\xi)^2,$$

em que y_ξ é a saída do modelo de Takagi-Sugeno após a apresentação de $\mathbf{x}^\xi$.

A solução é obtida resolvendo o problema de quadrados mínimos

$$M\boldsymbol{\alpha} \approx \mathbf{d},$$

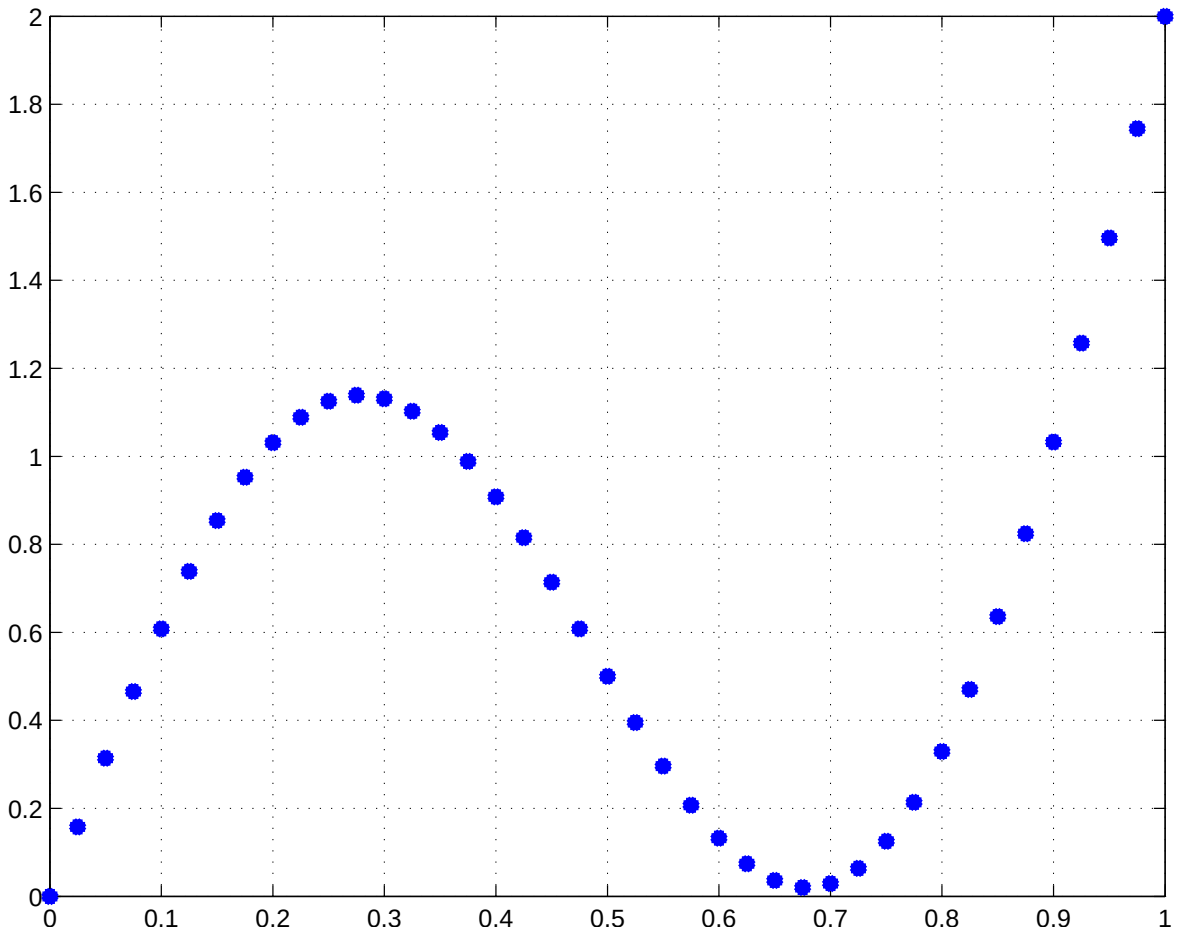
em que:

$$M = \begin{bmatrix} \bar{w}_1^1 x_1^1 & \bar{w}_1^1 x_2^1 & \dots & \bar{w}_1^1 x_n^1 & \bar{w}_1^1 & \dots & \bar{w}_k^1 x_1^1 & \dots & \bar{w}_k^1 x_n^1 & \bar{w}_k^1 \\ \bar{w}_1^2 x_1^2 & \bar{w}_1^2 x_2^2 & \dots & \bar{w}_1^2 x_n^2 & \bar{w}_1^2 & \dots & \bar{w}_k^2 x_1^2 & \dots & \bar{w}_k^2 x_n^1 & \bar{w}_k^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \bar{w}_1^m x_1^m & \bar{w}_1^m x_2^m & \dots & \bar{w}_1^m x_n^m & \bar{w}_1^m & \dots & \bar{w}_k^m x_1^m & \dots & \bar{w}_k^m x_n^m & \bar{w}_k^m \end{bmatrix}_{m \times (n+1)k}$$

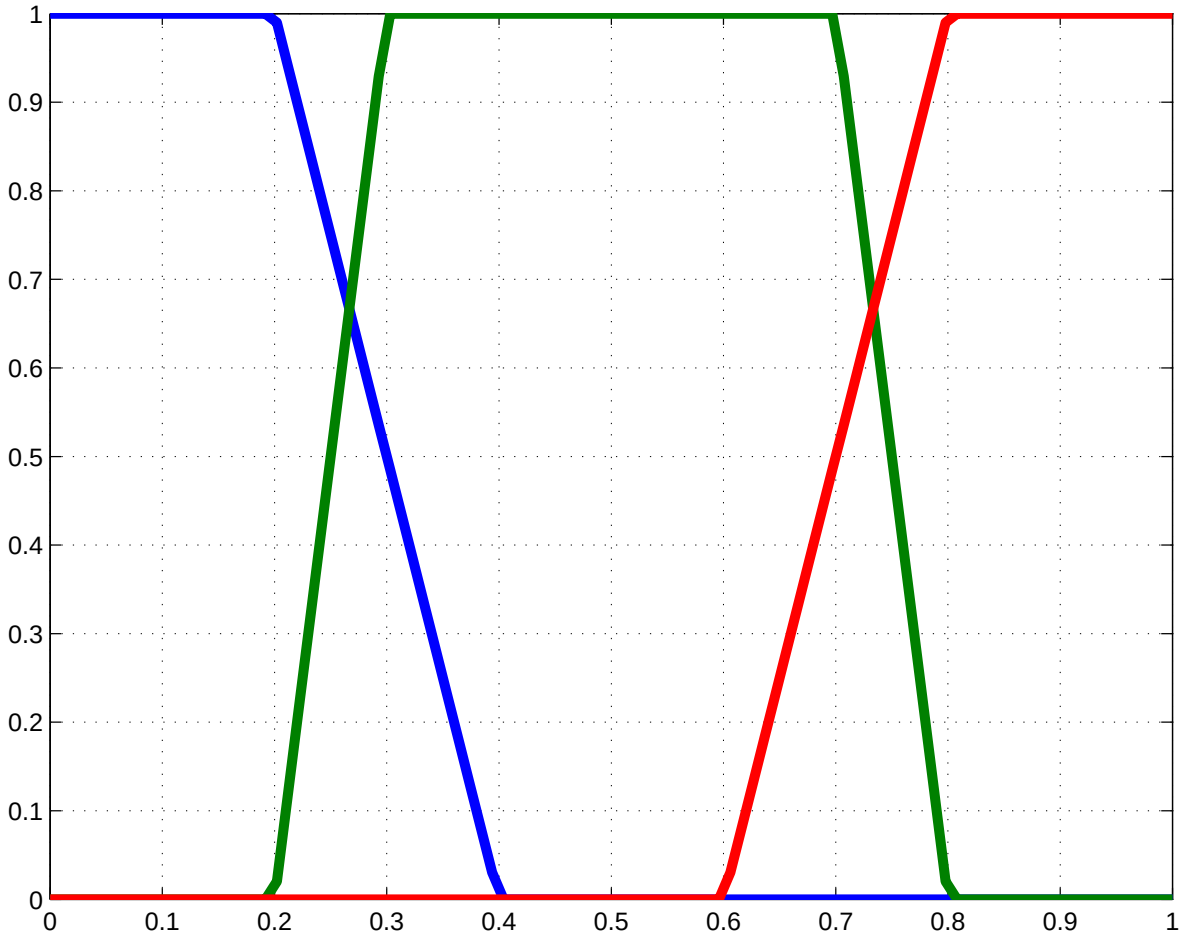
$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \vdots \\ a_{1n} \\ b_1 \\ \vdots \\ a_{k1} \\ \vdots \\ a_{kn} \\ b_k \end{bmatrix}_{(n+1)k \times 1}^T \quad \text{e} \quad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_m \end{bmatrix}_{m \times 1}^T .$$

Exemplo – 1

Considere o conjunto de treinamento mostrado abaixo:



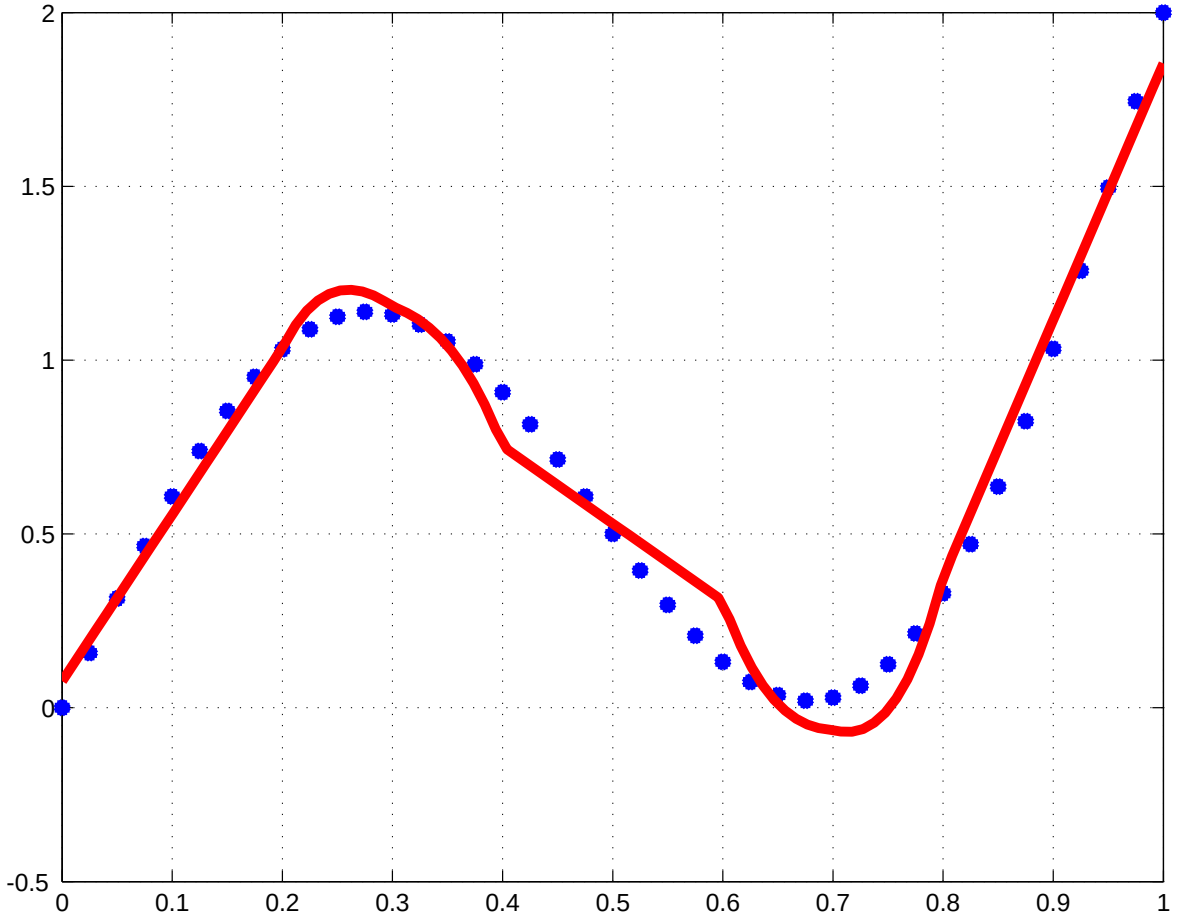
Definimos as funções de pertinência:



Usando a metodologia descrita anteriormente, encontramos o modelo de Takagi-Sugeno:

$$\text{SE } x \text{ é } A_1 \text{ ENTÃO } y = 4.79x + 0.08,$$
$$\text{SE } x \text{ é } A_2 \text{ ENTÃO } y = -2.22x + 1.64,$$
$$\text{SE } x \text{ é } A_3 \text{ ENTÃO } y = 7.38x - 5.53.$$

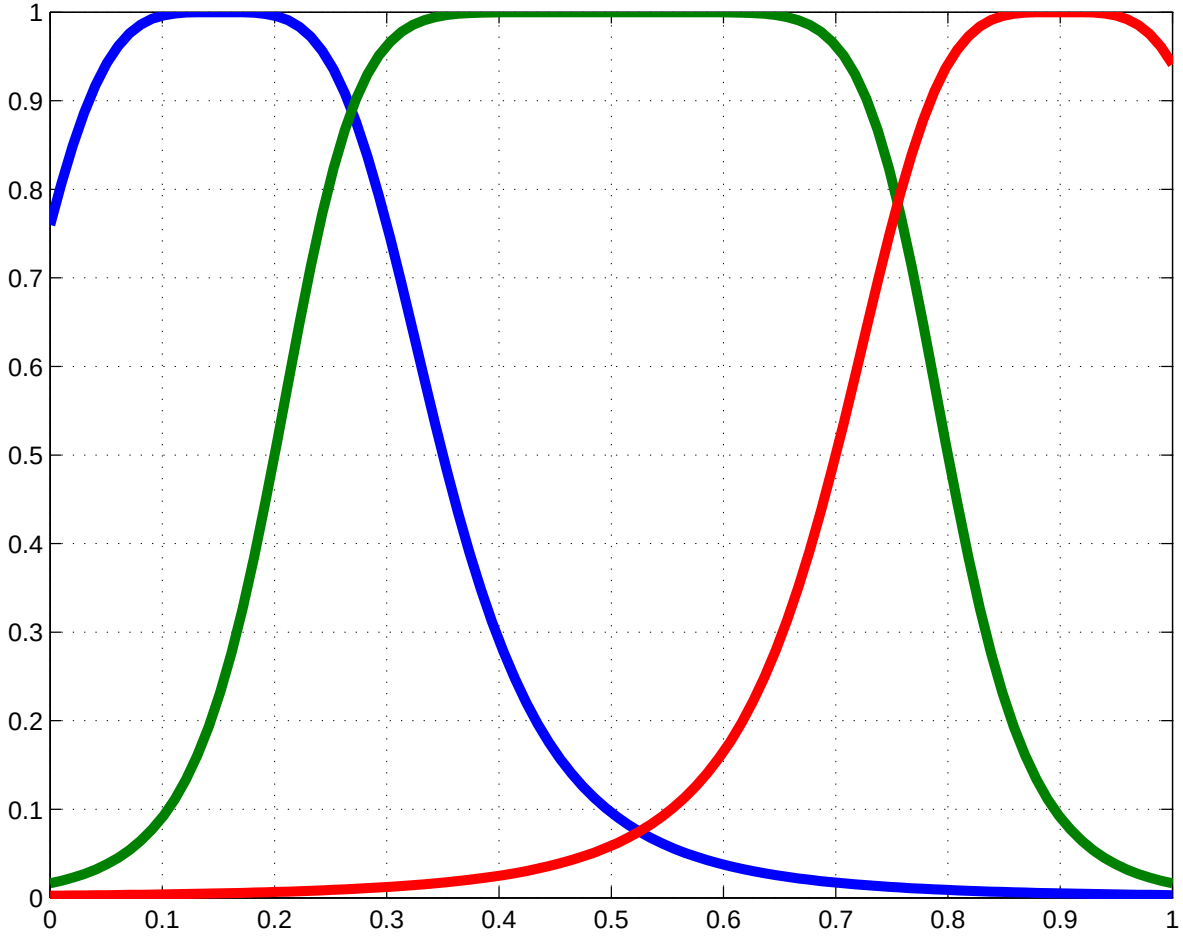
A figura abaixo mostra o modelo de Takagi-Sugeno com o conjunto de treinamento:



Pode-se observar as retas definidas por cada regra *fuzzy*.

Exemplo – 2

Considere o mesmo conjunto de treinamento mas as funções de pertinência



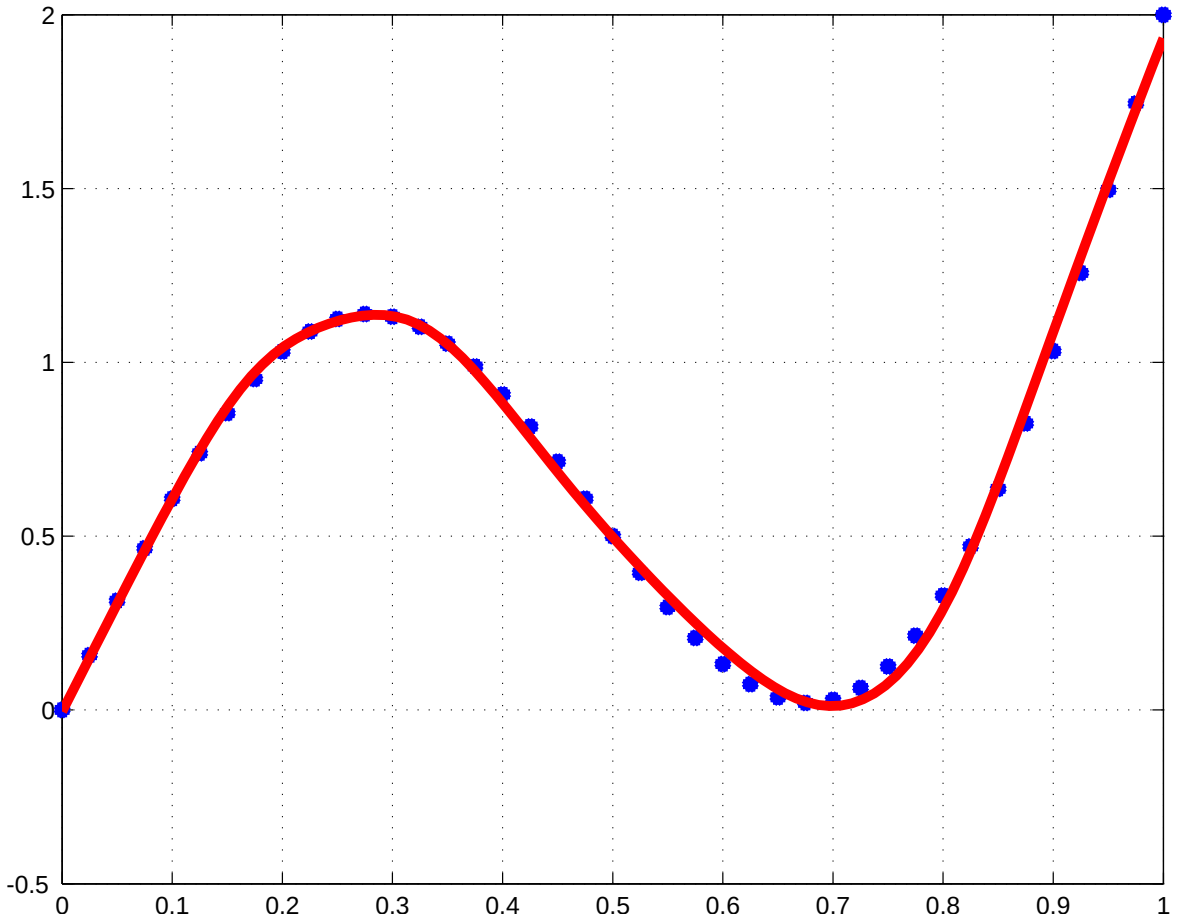
Neste caso, a metodologia descrita anteriormente fornece o modelo Takagi-Sugeno:

$$\text{SE } x \text{ é } A_1(\cdot, 0.2, 2, 0.15) \text{ ENTÃO } y = 6.11x - 0.01,$$
$$\text{SE } x \text{ é } A_2(\cdot, 0.3, 4, 0.5) \text{ ENTÃO } y = -1.25x + 1.02,$$
$$\text{SE } x \text{ é } A_3(\cdot, 0.2, 2, 0.9) \text{ ENTÃO } y = 7.84x - 5.89.$$

em que

$$A_i(x; a, b, c) = \frac{1}{1 + \left|\frac{x - c_i}{a_i}\right|^{2b_i}}.$$

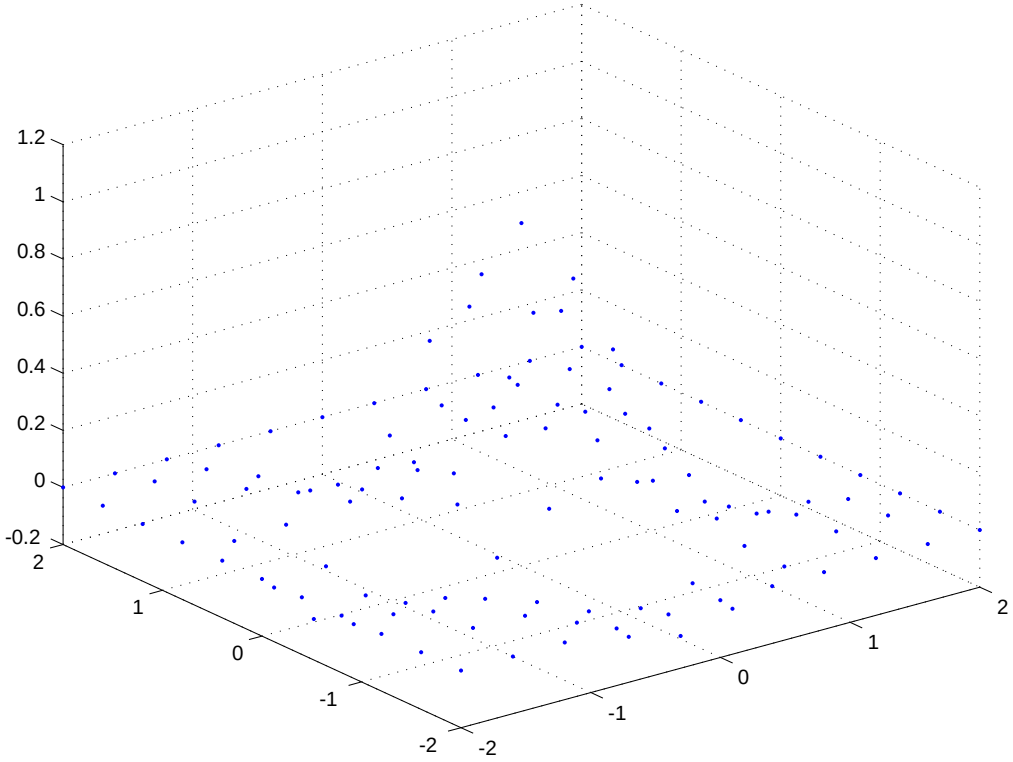
A figura abaixo mostra o modelo de Takagi-Sugeno com o conjunto de treinamento:



Observe que nesse caso encontramos uma função mais suave que ajusta-se melhor ao conjunto de dados.

Exemplo – 3

Considere o conjunto de treinamento

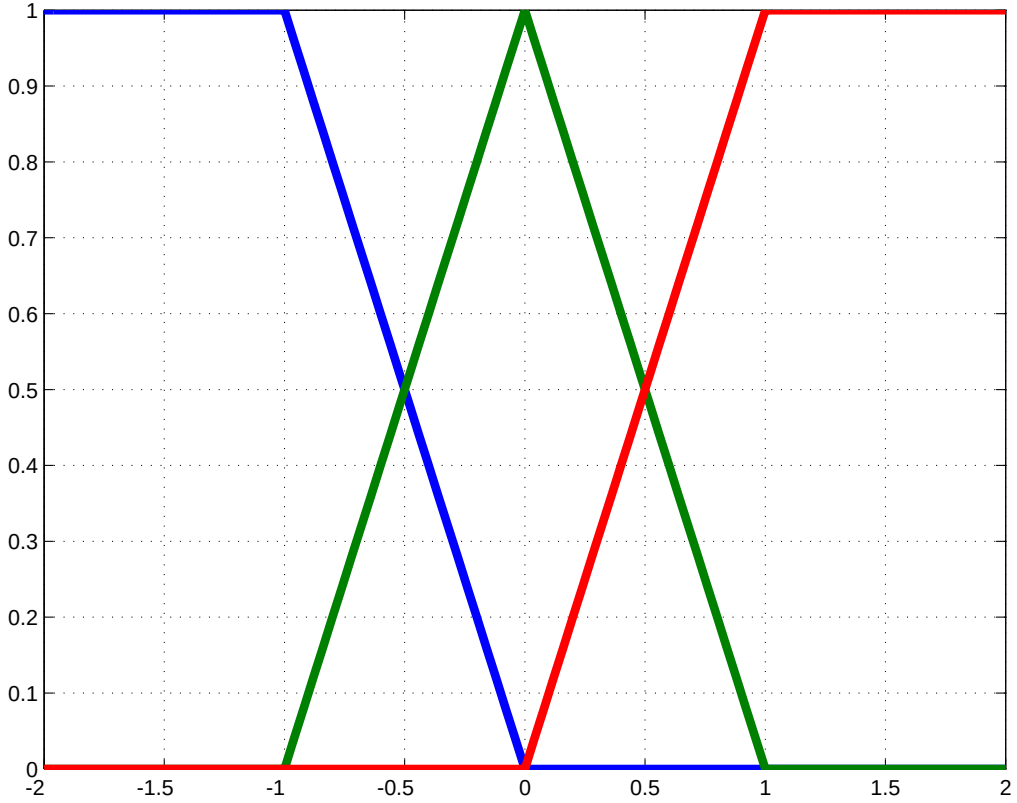


que foi extraídos da função

$$s(x, y) = \frac{sen(x)}{x} \frac{\text{sen}(y)}{y},$$

para (x, y) distribuídos numa malha com 11×11 pontos.

Considere os conjuntos *fuzzy* abaixo para ambas variáveis x e y:

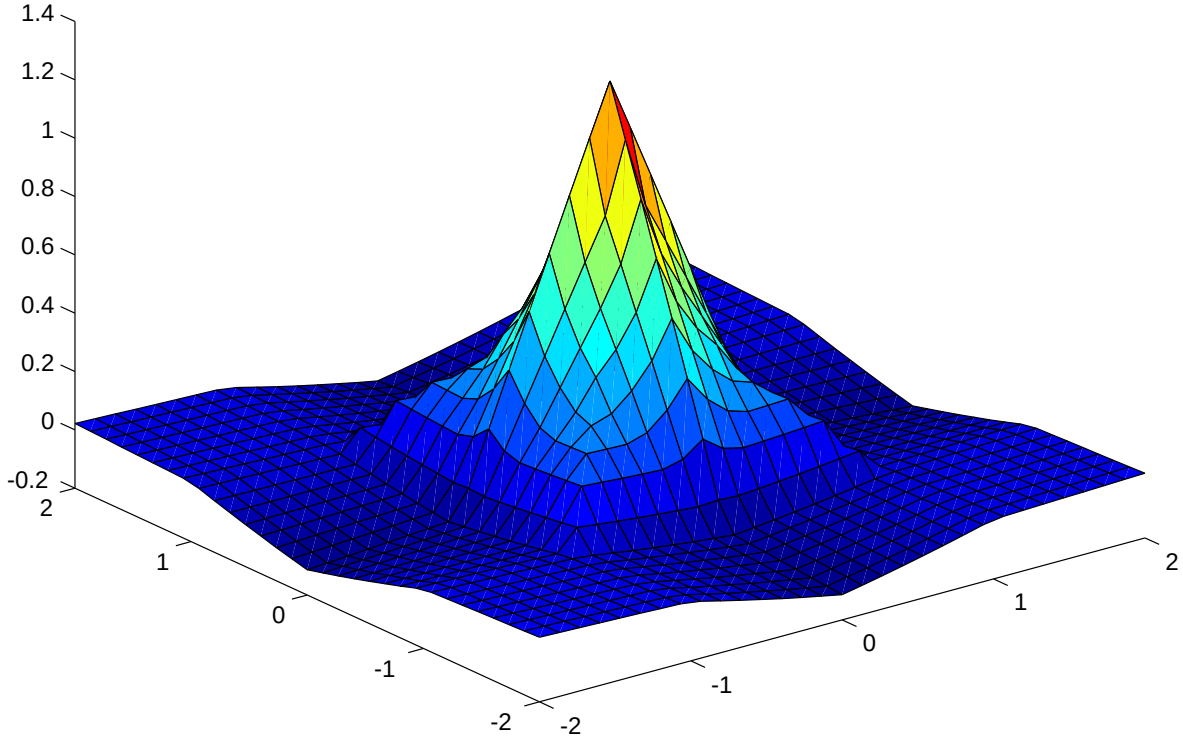


Usando a metodologia apresentada anteriormente, construímos um modelo de Takagi-Sugeno da forma:

$$
\begin{aligned}
&\text{SE } x \text{ é } A_1 \ \ \textbf{e} \ \ y \text{ é } A_1 \text{ ENTÃO } y = -0.02x - 0.02y - 0.05,\\
&\text{SE } x \text{ é } A_1 \ \ \textbf{e} \ \ y \text{ é } A_2 \text{ ENTÃO } y = 0.04x - 0.04,\\
&\vdots\\
&\text{SE } x \text{ é } A_3 \ \ \textbf{e} \ \ y \text{ é } A_3 \text{ ENTÃO } y = 0.02x + 0.02y - 0.05,
\end{aligned}
$$

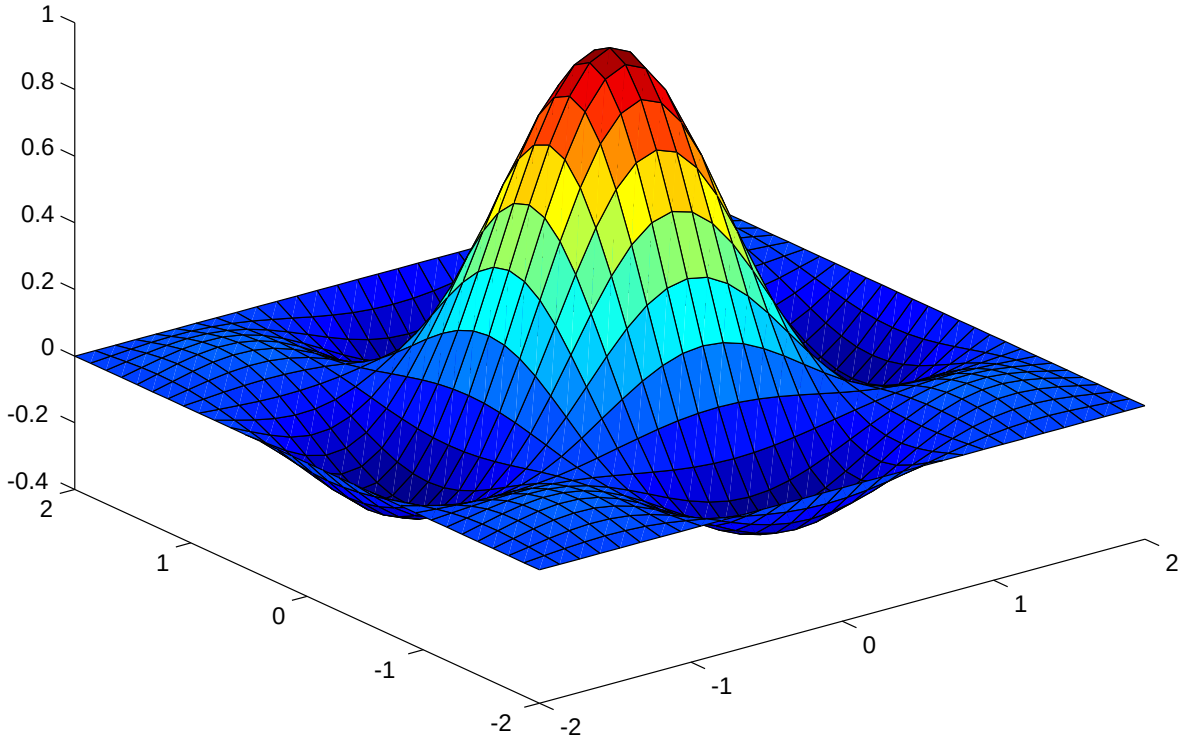
em que o conectivo "**e**" foi modelado usando o *mínimo*.

A figura abaixo mostra a superfície obtida usando o modelo de Takagi-Sugeno



Observe que o modelo de Takagi-Sugeno apresenta um pico em $(0, 0)$ e diversas regiões planas.

A figura abaixo mostra a superfície da função s cujos dados foram amostrados:



Considere o mesmo conjunto de dados mas os conjuntos abaixo para ambas variáveis x e y:

Esses conjuntos *fuzzy* foram obtidas considerando as seguintes funções de pertinência em forma de sino:

$$A_1(x; 1, 2, -1.5), \quad A_2(x, 1, 2, 0) \quad \text{e} \quad A_3(x; 1, 2, 1.5).$$

Usando a mesma metodologia, construímos o seguinte modelo de Takagi-Sugeno:

$$\text{SE } x \text{ é } A_1 \ \ \textbf{e} \ \ y \text{ é } A_1 \text{ ENTÃO } y = -0.28x + 0.28y + 1.08,$$

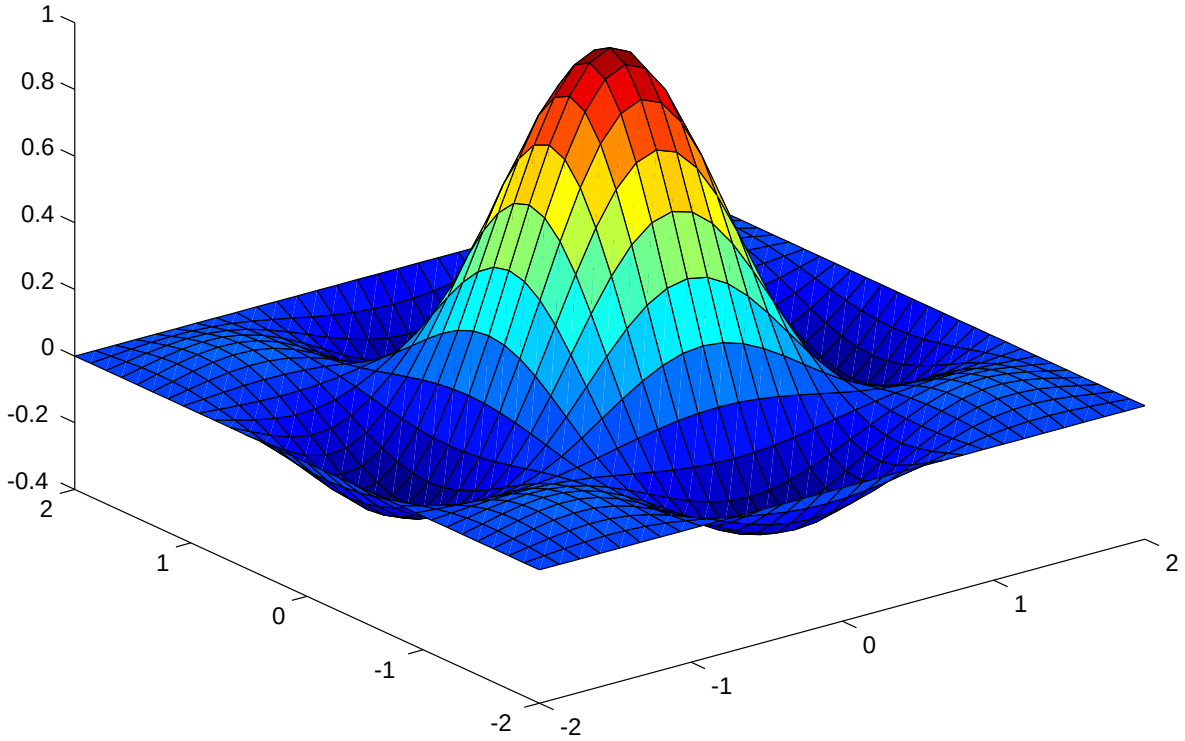
$$\text{SE } x \text{ é } A_1 \ \ \textbf{e} \ \ y \text{ é } A_2 \text{ ENTÃO } y = -1.04x - 2.42,$$

$$\vdots$$

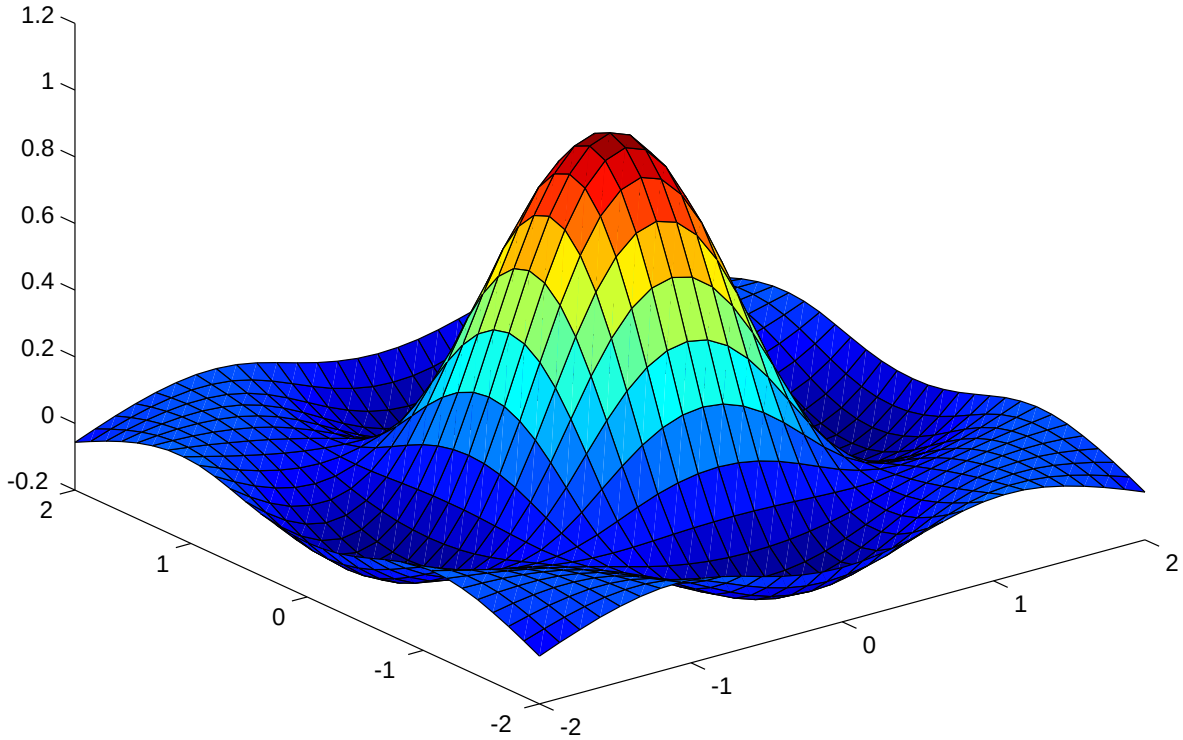
$$\text{SE } x \text{ é } A_3 \ \ \textbf{e} \ \ y \text{ é } A_3 \text{ ENTÃO } y = -0.28x - 0.28y - 1.08,$$

em que o conectivo "**e**" foi modelado usando o *produto*.

A figura abaixo mostra a superfície da função s cujos dados foram amostrados:



A figura abaixo mostra a superfície obtida usando o modelo de Takagi-Sugeno



Observe que esse modelo de Takagi-Sugeno apresentou um resultado melhor que o modelo anterior usando funções trapezoidais e o mínimo com t-norma.

A tabela abaixo compara os dois modelos de Takagi-Sugeno considerando diferentes medidas de erro:

	REQM	EAM	EM
Trapézio + Mínimo	6.5082e-02	4.6444e-02	2.9241e-04
Sino + Produto	2.1660e-02	1.7719e-02	5.9285e-05

Aqui,

$$REQM = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{n}(\phi(x_j, y_j) - s(x_j, y_j))^2},$$

$$EAM = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{n}|\phi(x_j, y_j) - s(x_j, y_j)|,$$

$$EM = \max_{j=1:N}\{|\phi(x_j, y_j) - s(x_j, y_j)|\},$$

em que s e ϕ representa a função original e o modelo de Takagi-Sugeno. Os modos (x_j, y_j), para $j = 1, \ldots, N$, foram os mesmos usados para a construção das superfícies mostradas anteriormente.

Na aula de hoje vimos que o método dos quadrados mínimos pode ser usado para determinar o consequente de um modelo de Takagi-Sugeno de primeira ordem com base num conjunto de dados.

A mesma metodologia pode ser usada para determinar os parâmetros do consequente de um modelo de Takagi-Sugeno de ordem superior (mas baseado em polinômios).

Vimos também que as funções de pertinência na forma de sino apresentam resultados mais suaves que as funções trapezoidais ou triangulares.