Aula 18
Regra Composicional de Inferência Inf-$\rightarrow$.

MS580 - Introdução à Teoria *Fuzzy*

Marcos Eduardo Valle

Departamento de Matemática Aplicada
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Universidade Estadual de Campinas

Nas aulas anteriores, vimos duas classes de métodos de inferência baseados na **regra composicional de inferência**:

$$B = A \circ \mathcal{R},$$

em que $\mathcal{R}$ é a relação *fuzzy* dada por:

- **Método Disjuntivo:**

$$\check{\mathcal{R}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \bigvee_{i=1}^{k} A_i(\mathbf{x}) \triangle B_i(\mathbf{y}).$$

- **Método Conjuntivo:**

$$\hat{\mathcal{R}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \bigwedge_{i=1}^{k} A_i(\mathbf{x}) \rightarrow B_i(\mathbf{y}).$$

Na aula de hoje veremos um novo método de inferência baseado na composição inf-$\rightarrow$.

Uma Nova Regra Composicional de Inferência

Definição 1 (Inferência Inf-$\rightarrow$)

Sejam $([0,1], \vee, \wedge, \triangle, \rightarrow)$ um reticulado residuado e $\mathcal{R} \in \mathcal{F}(\mathbf{X} \times \mathbf{Y})$ uma relação *fuzzy*. Dado um conjunto *fuzzy* $A \in \mathcal{F}(\mathbf{X})$, a regra composicional de inferência (RCI) inf-$\rightarrow$ forne o conjunto *fuzzy* $B \in \mathcal{F}(\mathbf{Y})$ através da equação

$$B = A \triangleright \mathcal{R}.$$

Uma Característica da RCI Inf-$\rightarrow$

Teorema 2 (Propriedade Fundamental da RCI Inf-$\rightarrow$)

Sejam $([0,1], \vee, \wedge, \triangle, \rightarrow)$ *um reticulado residuado e* $\mathcal{R} \in \mathcal{F}(\mathbf{X} \times \mathbf{Y})$ *uma relação fuzzy. Para todo conjunto fuzzy* $A \in \mathcal{F}(\mathbf{X})$*, tem-se*

$$A \triangleright \mathcal{R} = \bigvee \{Y \in \mathcal{F}(\mathbf{Y}) : A(\mathbf{x}) \triangle Y(\mathbf{y}) \leq \mathcal{R}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \forall \mathbf{x} \in \mathbf{X}, \mathbf{y} \in \mathbf{Y}\}.$$

Em outras palavras, dado um conjunto *fuzzy* $A \in \mathcal{F}(\mathbf{X})$, a regra composicional de inferência (RCI) inf-$\rightarrow$ forne o maior conjunto *fuzzy* $Y \in \mathcal{F}(\mathbf{Y})$ tal que

$$A(\mathbf{x}) \triangle Y(\mathbf{y}) \leq R(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad \forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbf{X} \times \mathbf{Y}.$$

A Melhor Relação para a RCI Inf-$\rightarrow$

O seguinte teorema mostra como determinar a relação $\mathcal{R}$ a partir de uma base de regras *fuzzy*.

Teorema 3

Seja $([0,1], \vee, \wedge, \triangle, \rightarrow)$ *um reticulado residuado e considere uma base de regras*

$$\textbf{\textit{SE}}\ \mathbf{x}\ \textit{é}\ A_i\ \textbf{\textit{ENTÃO}}\ \mathbf{y}\ \textit{é}\ B_i, \quad \forall i = 1, \ldots, k.$$

A relação fuzzy $\check{\mathcal{R}} \in \mathcal{F}(\mathbf{X} \times \mathbf{Y})$ *dada por*

$$\check{\mathcal{R}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \bigvee_{i=1}^{k} A_i(\mathbf{x}) \triangle B_i(\mathbf{y}), \quad \forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbf{X} \times \mathbf{Y},$$

satisfaz

$$\check{\mathcal{R}} = \bigwedge \left\{ \mathcal{R} \in \mathcal{F}(\mathbf{X} \times \mathbf{Y}) : B_i \subseteq A_i \triangleright \mathcal{R}, \forall i = 1, \ldots, k \right\}.$$

Em outras palavras, o teorema anterior afirma que o método disjuntivo fornece a menor relação *fuzzy* $\mathcal{R}$ que satisfaz as inclusões $B_i \subseteq A_i \triangleright \mathcal{R}$, para todo $i = 1, \ldots, k$.

Exemplo Simples

Considere a seguinte base de regras *fuzzy*:

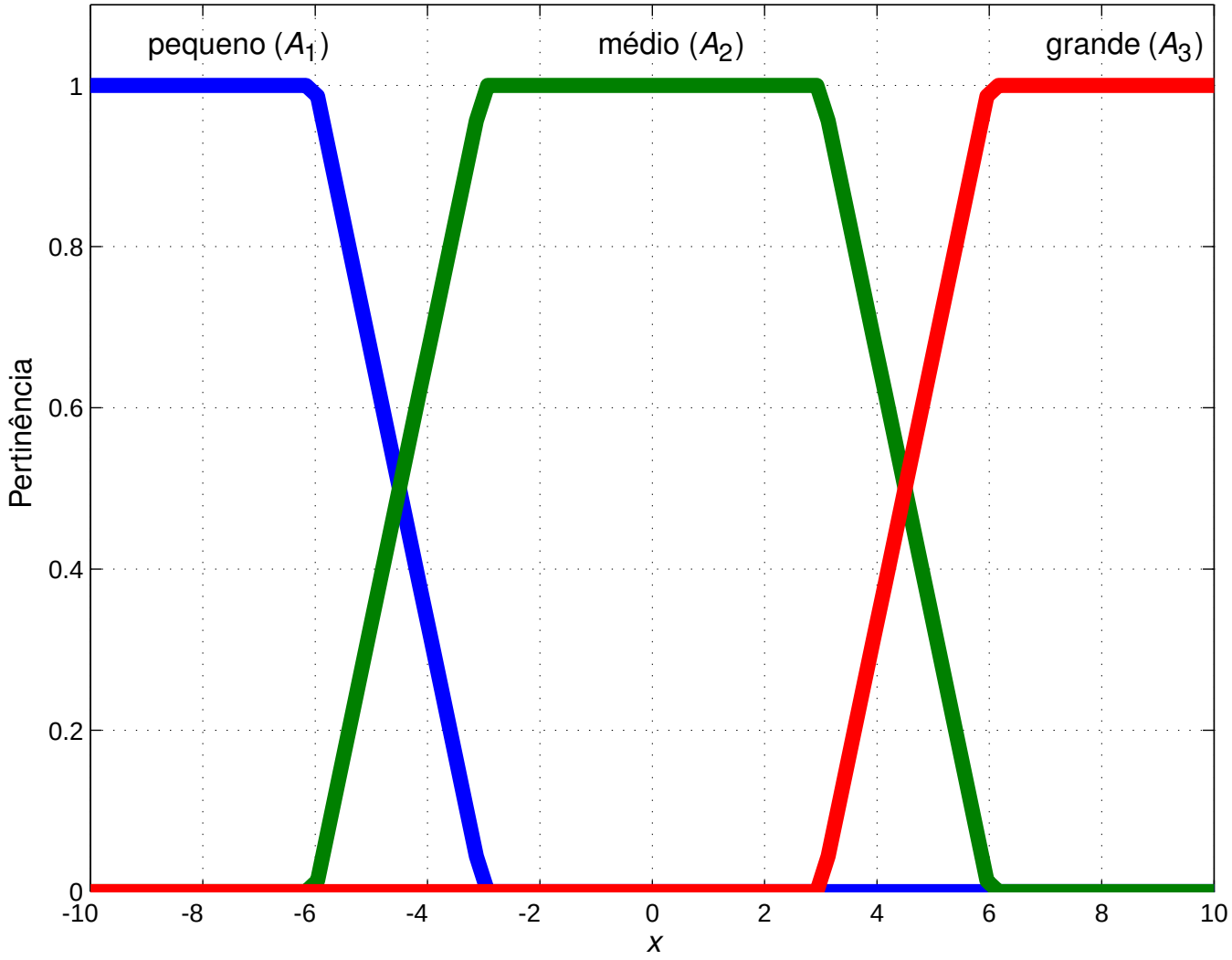
SE x é pequeno **ENTÃO** y é pequeno,

SE x é médio **ENTÃO** y é médio,

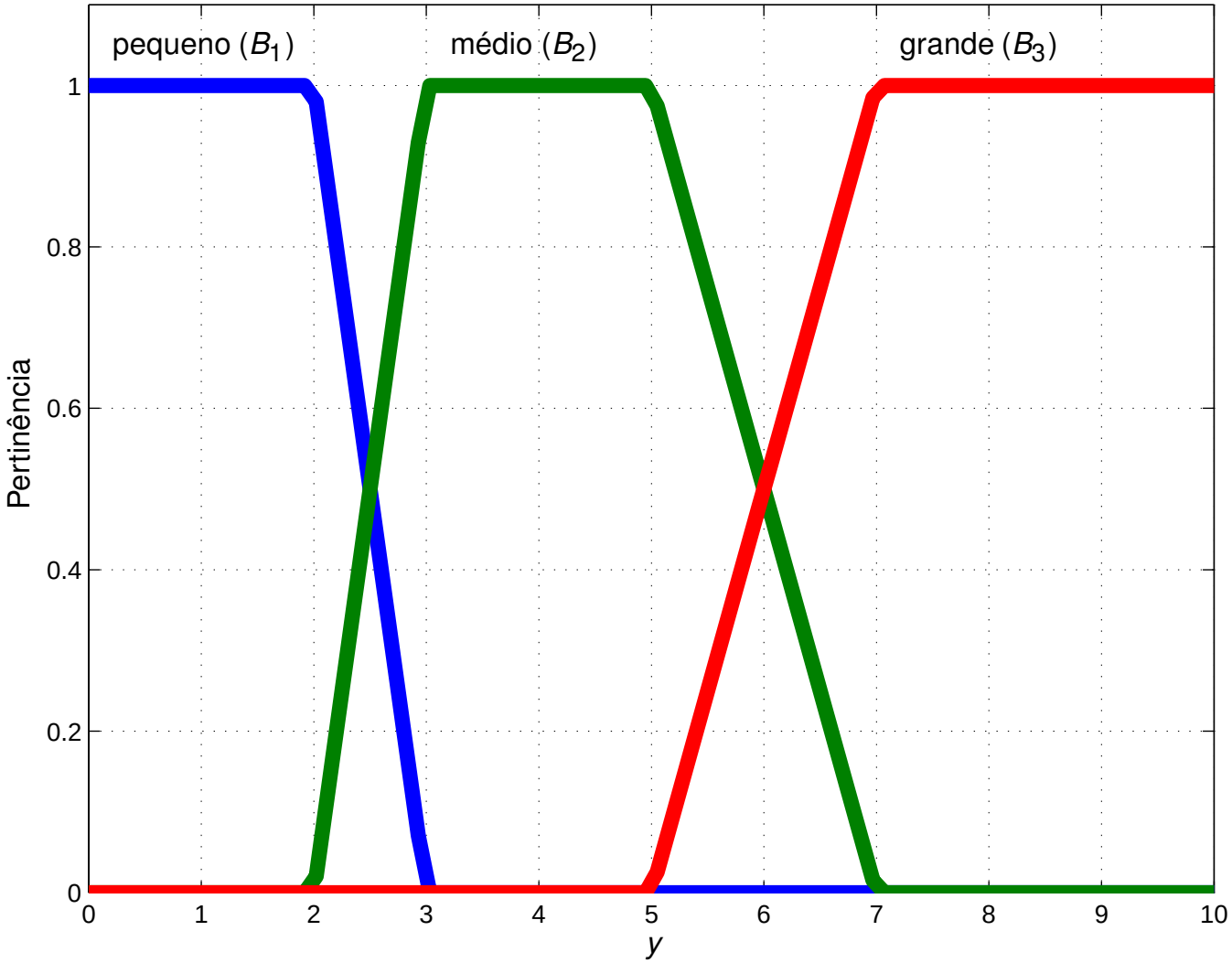
SE x é grande **ENTÃO** y é grande,

em que os conceitos “pequeno”, “médio” e “grande” são descritos pelos seguintes conjuntos *fuzzy* para cada uma das variáveis $x \in X = [-10, 10]$ e $y \in Y = [0, 10]$:

Funções de pertinência para a variável x:

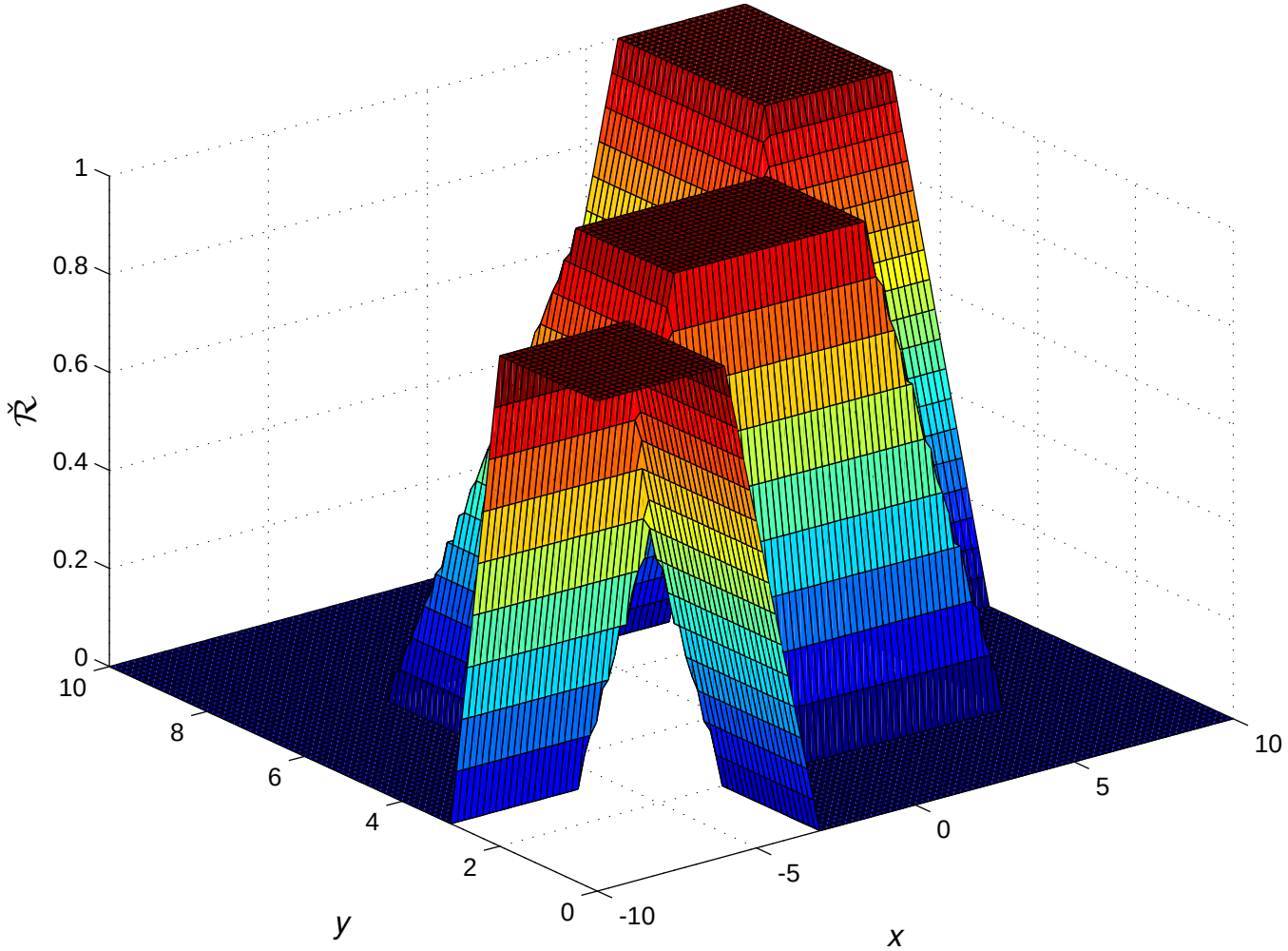


Funções de pertinência para a variável y:



Considere o reticulado residuado $([0,1], \vee, \wedge, \triangle_M, \rightarrow_M)$.
O método disjuntivo fornece a relação

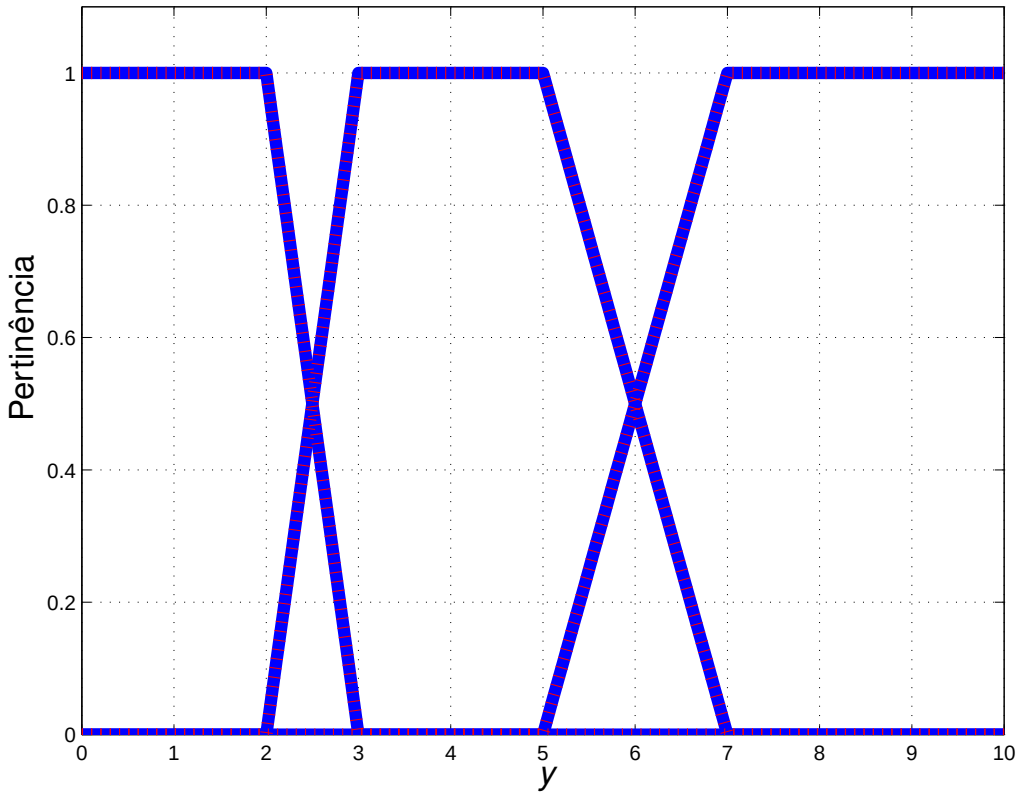
$$\check{\mathcal{R}}(x,y) = \bigvee_{i=1}^{3} A_i(x) \wedge B_i(y), \quad \forall (x,y) \in X \times Y.$$



Posteriormente, dado um conjunto *fuzzy* $A \in \mathcal{F}(X)$, obtemos o conjunto *fuzzy* $B \in \mathcal{F}(Y)$ da seguinte forma:

$$B = A \triangleright \check{\mathcal{R}}.$$

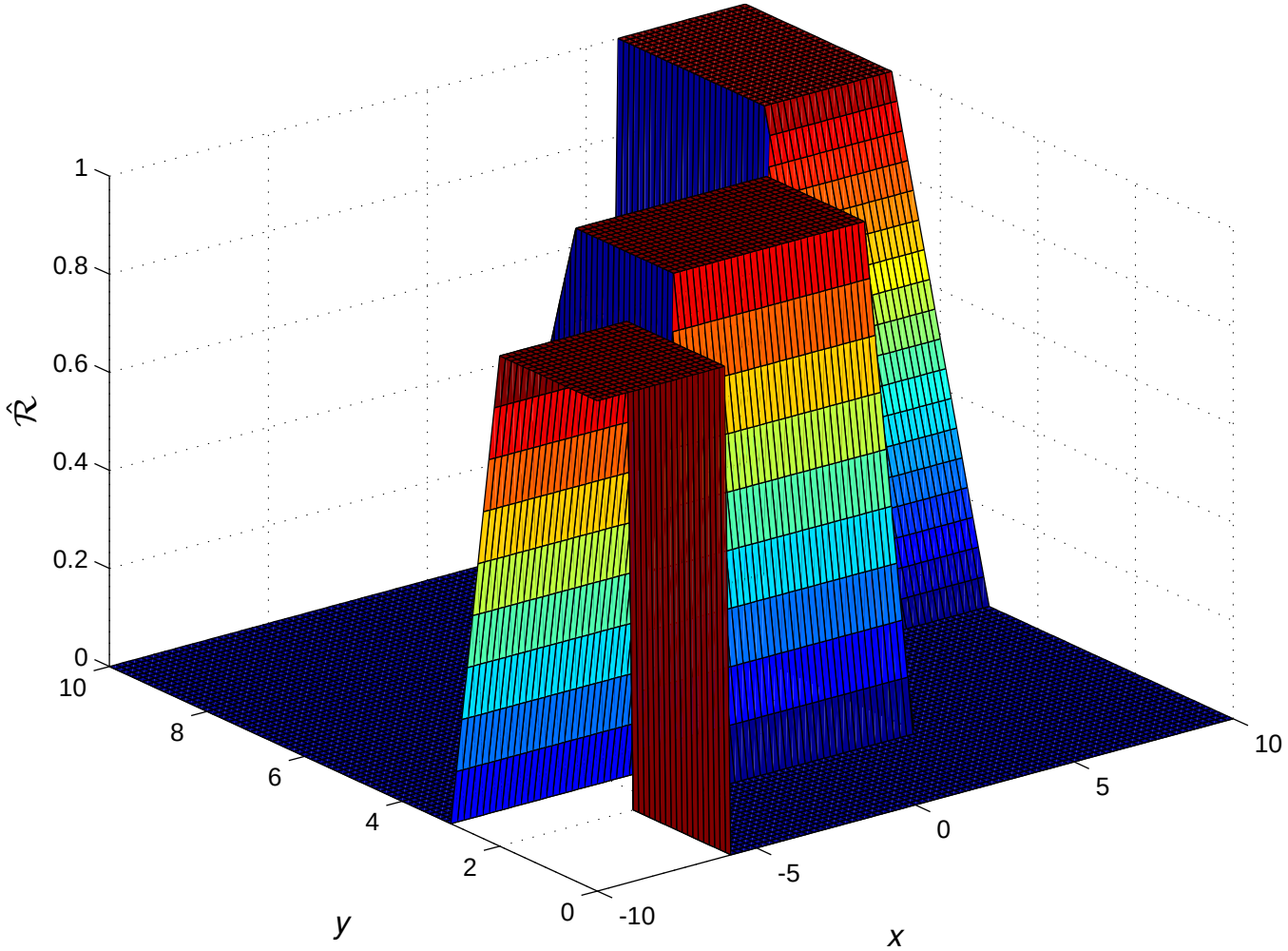
Podemos verificar que $B_i = A_i \triangleright \check{\mathcal{R}}$ para todo $i = 1, 2, 3$.



Portanto, método de inferência é consistente!

Apesar de $\check{\mathcal{R}}$ ser ótima num certo sentido, podemos também considerar a relação obtida usando o método conjuntivo:

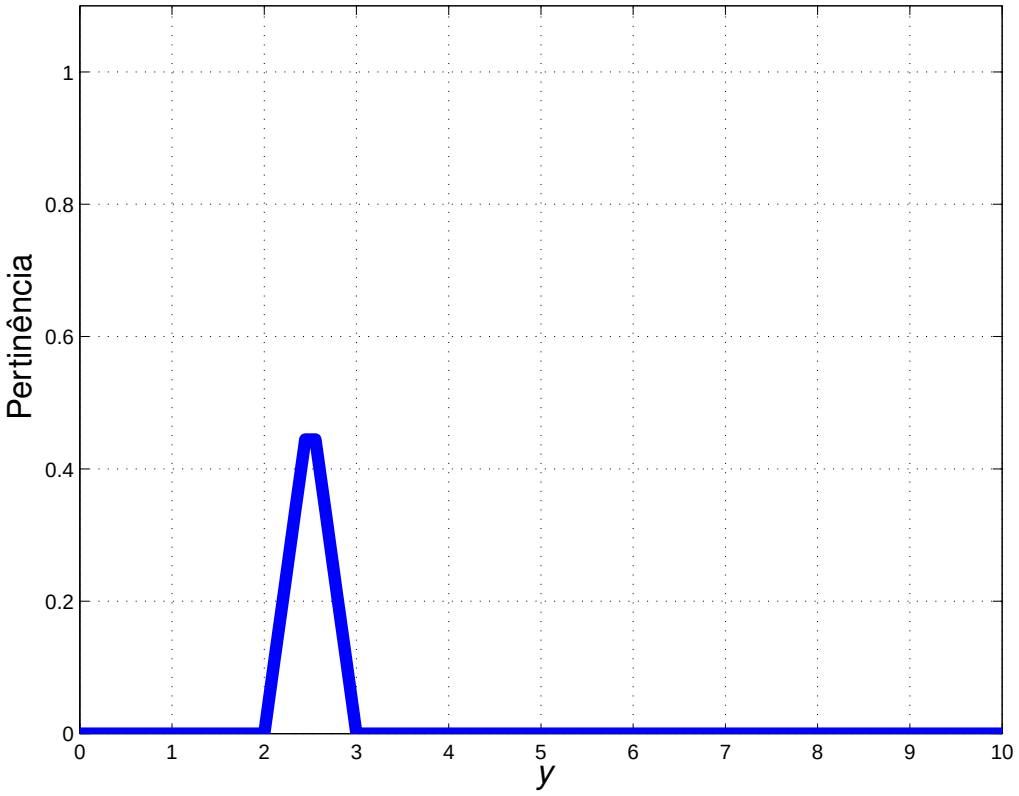
$$\hat{\mathcal{R}}(x,y) = \bigwedge_{i=1}^{3} A_i(x) \rightarrow_M B_i(y), \quad \forall (x,y) \in X \times Y.$$



Nesse caso, dado um conjunto *fuzzy* $A \in \mathcal{F}(X)$, obtemos o conjunto *fuzzy* $B \in \mathcal{F}(Y)$ da seguinte forma:

$$B = A \triangleright \hat{\mathcal{R}}.$$

Por exemplo, obtemos $\hat{B}_2 = A_2 \triangleright \hat{\mathcal{R}}$ abaixo:



Portanto, método de inferência não é consistente!

Continuidade e Consistência da RCI Inf-$\rightarrow$

Dada uma relação *fuzzy* $\mathcal{R}$, podemos definir uma função $\psi : \mathcal{F}(\mathbf{X}) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbf{Y})$ que associa a cada $A \in \mathcal{F}(\mathbf{X})$ um conjunto *fuzzy* $B \in \mathcal{F}(\mathbf{Y})$ da seguinte forma usando a RCI Inf-$\rightarrow$:

$$B = \psi^{\triangleright}_{\mathcal{R}}(A) = A \triangleright \mathcal{R}.$$

Tal como nas aulas anteriores, podemos avaliar a consistência e continuidade de $\psi^{\triangleright}_{\mathcal{R}}$.

Definição 4 (Consistência de Método de Inferência)

Dizemos que $\psi : \mathcal{F}(\mathbf{X}) \to \mathcal{F}(\mathbf{Y})$ é consistente com a base de regras *fuzzy*

$$\textbf{SE x é } A_i \textbf{ ENTÃO y é } B_i, \quad \forall i = 1, \ldots, k,$$

se $\psi(A_i) = B_i$ para todo $i = 1, \ldots, k$.

Definição 5 (Continuidade de Método de Inferência)

Sejam $\mathcal{S}_{\mathbf{X}}$ e $\mathcal{S}_{\mathbf{Y}}$ medidas de similaridades para conjuntos *fuzzy* em **X** e **Y**, respectivamente. Dizemos que $\psi : \mathcal{F}(\mathbf{X}) \to \mathcal{F}(\mathbf{Y})$ é uma função contínua com respeito à uma base de regras *fuzzy*

$$\textbf{SE x é } A_i \textbf{ ENTÃO y é } B_i, \quad \forall i = 1, \ldots, k,$$

se

$$\mathcal{S}_{\mathbf{Y}}\big(\psi(A), B_i\big) \geq \mathcal{S}_{\mathbf{X}}(A, A_i), \quad \forall i = 1, \ldots, k.$$

Continuidade Implica Consistência

A continuidade implica consistência se considerarmos uma medida de similaridade forte $\mathcal{S}_{\mathbf{Y}}$.

Teorema 6

Sejam $\mathcal{S}_{\mathbf{X}} : \mathcal{F}(\mathbf{X}) \times \mathcal{F}(\mathbf{X}) \to [0,1]$ *uma medida de similaridade e* $\mathcal{S}_{\mathbf{Y}} : \mathcal{F}(\mathbf{Y}) \times \mathcal{F}(\mathbf{Y}) \to [0,1]$ *uma medida de similaridade forte. Considere uma base de regras fuzzy*

$$\textbf{\textit{SE}}\ \mathbf{x}\ \textit{é}\ A_i\ \textbf{\textit{ENTÃO}}\ \mathbf{y}\ \textit{é}\ B_i, \quad \forall i = 1, \ldots, k,$$

e uma função $\psi : \mathcal{F}(\mathbf{X}) \to \mathcal{F}(\mathbf{Y})$*. Se* ψ *é contínua com respeito a base de regras, então* ψ *é consistente.*

Similaridade Natural de um Reticulado Residuado

Definição 7 (Medida de Similaridade Natural)

Seja $\mathcal{L} = ([0,1], \vee, \wedge, \triangle, \rightarrow)$ um reticulado residuado. A medida de similaridade natural de $\mathcal{L}$ é $\mathcal{S}_{\mathcal{L}} : \mathcal{F}(\mathbf{X}) \times \mathcal{F}(\mathbf{X}) \rightarrow [0,1]$ dada pela seguinte equação para conjuntos *fuzzy* $A, B \in \mathbf{X}$:

$$\mathcal{S}_{\mathcal{L}}(A, B) = \bigwedge_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}} \left[A(\mathbf{x}) \leftrightarrow B(\mathbf{x}) \right],$$

em que $a \leftrightarrow b = (a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow a)$.

A medida de similaridade $\mathcal{S}_{\mathcal{L}}$ natural de um reticulado residuado $\mathcal{L} = ([0,1], \vee, \wedge, \triangle, \rightarrow)$ é uma medida de similaridade forte!

Continuidade e Consistência

Teorema 8 (Equivalência de Štěpnička e Jayaram)

Sejam $\mathcal{L} = ([0,1], \vee, \wedge, \triangle, \rightarrow)$ *um reticulado residuado e* $\mathcal{S}_{\mathcal{L}}$ *a medida de similaridade natural de* $\mathcal{L}$*. Dada uma base de regras fuzzy*

$$\textbf{\textit{SE}}\ \mathbf{x}\ \textit{é}\ A_i\ \textbf{\textit{ENTÃO}}\ \mathbf{y}\ \textit{é}\ B_i, \quad \forall i = 1, \ldots, k,$$

e uma relação fuzzy $\mathcal{R} \in \mathcal{F}(\mathbf{X} \times \mathbf{Y})$*, a função* $\psi^{\triangleright}_{\mathcal{R}} : \mathcal{F}(\mathbf{X}) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbf{Y})$ *dada pela RCI inf-*$\rightarrow$*, isto é,*

$$\psi^{\triangleright}_{\mathcal{R}}(A) = A \triangleright \mathcal{R},$$

é contínua com se e somente se é consistente com a base de regras.

A demonstração desse teorema pode ser encontrada em: `http://dx.doi.org/10.1109/TFUZZ.2013.2260551`.

Exemplo Simples

Considere novamente a base de regras *fuzzy*:

SE x é pequeno **ENTÃO** y é pequeno,

SE x é médio **ENTÃO** y é médio,

SE x é grande **ENTÃO** y é grande,

em que os conceitos “pequeno”, “médio” e “grande” são descritos pelos conjuntos *fuzzy* apresentados anteriormente.

Neste caso, a função $\psi^{\triangleright}_{\hat{\mathcal{R}}}(A) = A \triangleright \hat{\mathcal{R}}$ não fornece um modelo contínuo enquanto que $\psi^{\triangleright}_{\check{\mathcal{R}}}(A) = A \triangleright \check{\mathcal{R}}$ fornece um modelo contínuo!

Considerações Finais

Tal como a consistência, a continuidade de um método de inferência não é necessária (e nem suficiente) para o bom desempenho do sistema baseado em regras *fuzzy* em uma aplicação prática.

Štěpnička e Jayaram argumentam que a RCI inf-$\rightarrow$ pode ser tão efetiva em aplicações práticas como a RCI sup-$\triangle$ (incluindo o método de inferência de Mamdani!)