# Aula 17
# Método de Inferência Conjuntivo e Continuidade de um Método de Inferência.

## MS580 - Introdução à Teoria *Fuzzy*

Marcos Eduardo Valle

Departamento de Matemática Aplicada
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Universidade Estadual de Campinas

Na aula anterior, apresentamos o método de inferência disjuntivo. Exemplos de métodos de inferência disjuntivo inclui o método de Mamdani e de Larsen.

Também apresentamos na aula anterior a regra composicional de inferência e demonstramos que um método de inferência disjuntivo é consistente se os conjuntos *fuzzy* dos antecedentes são ortonormais.

Na aula de hoje, usando a regra composicional de inferência, apresentaremos os chamados métodos de inferência disjuntivos.

Apresentaremos também o conceito de continuidade de um método de inferência.

Terminaremos a aula demonstrando que um método de inferência disjuntivo é consistente se e somente se ele é contínuo.

# Exemplo Simples

Considere a seguinte base de regras *fuzzy*:

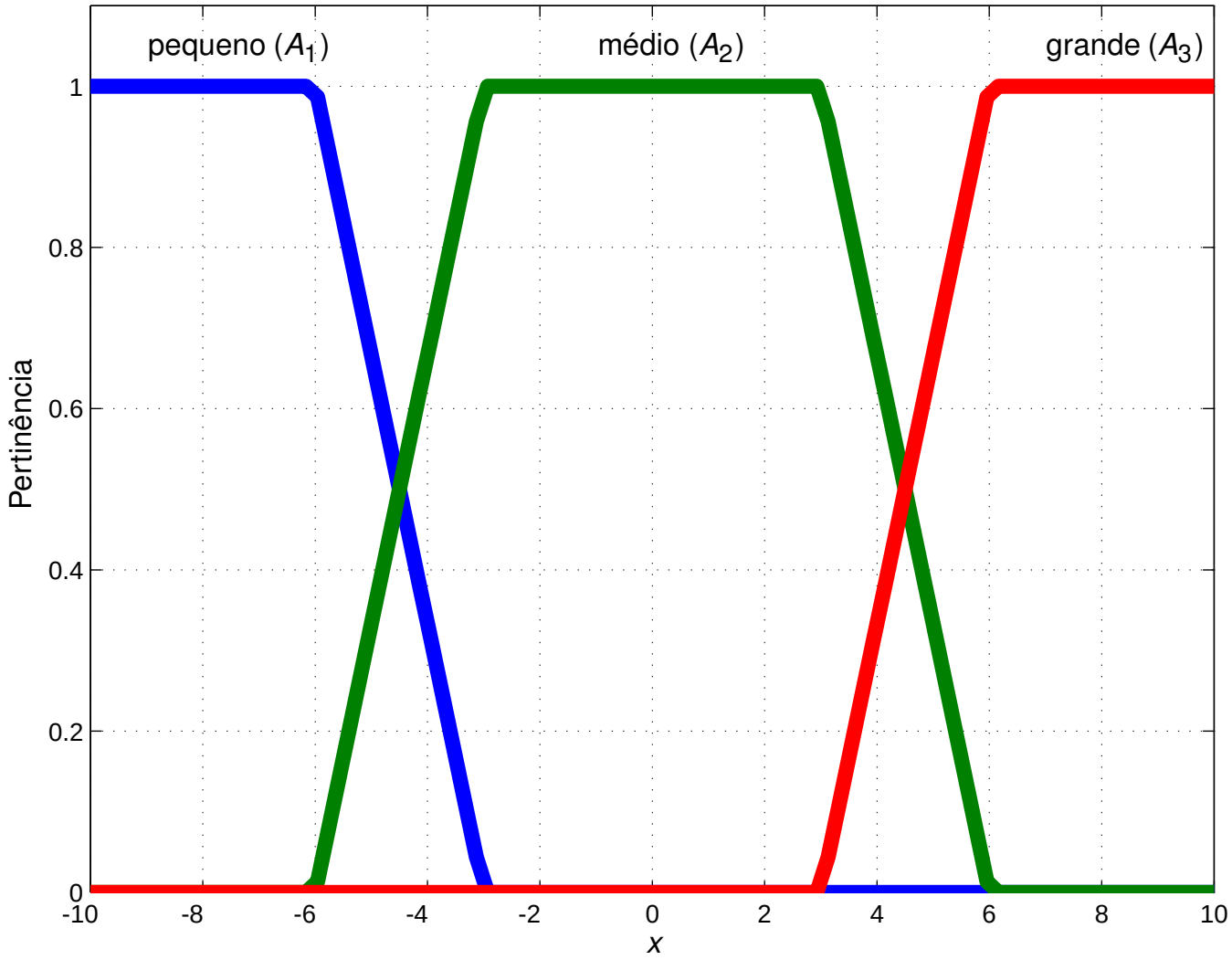
**SE** $x$ é pequeno **ENTÃO** $y$ é pequeno,

**SE** $x$ é médio **ENTÃO** $y$ é médio,

**SE** $x$ é grande **ENTÃO** $y$ é grande,

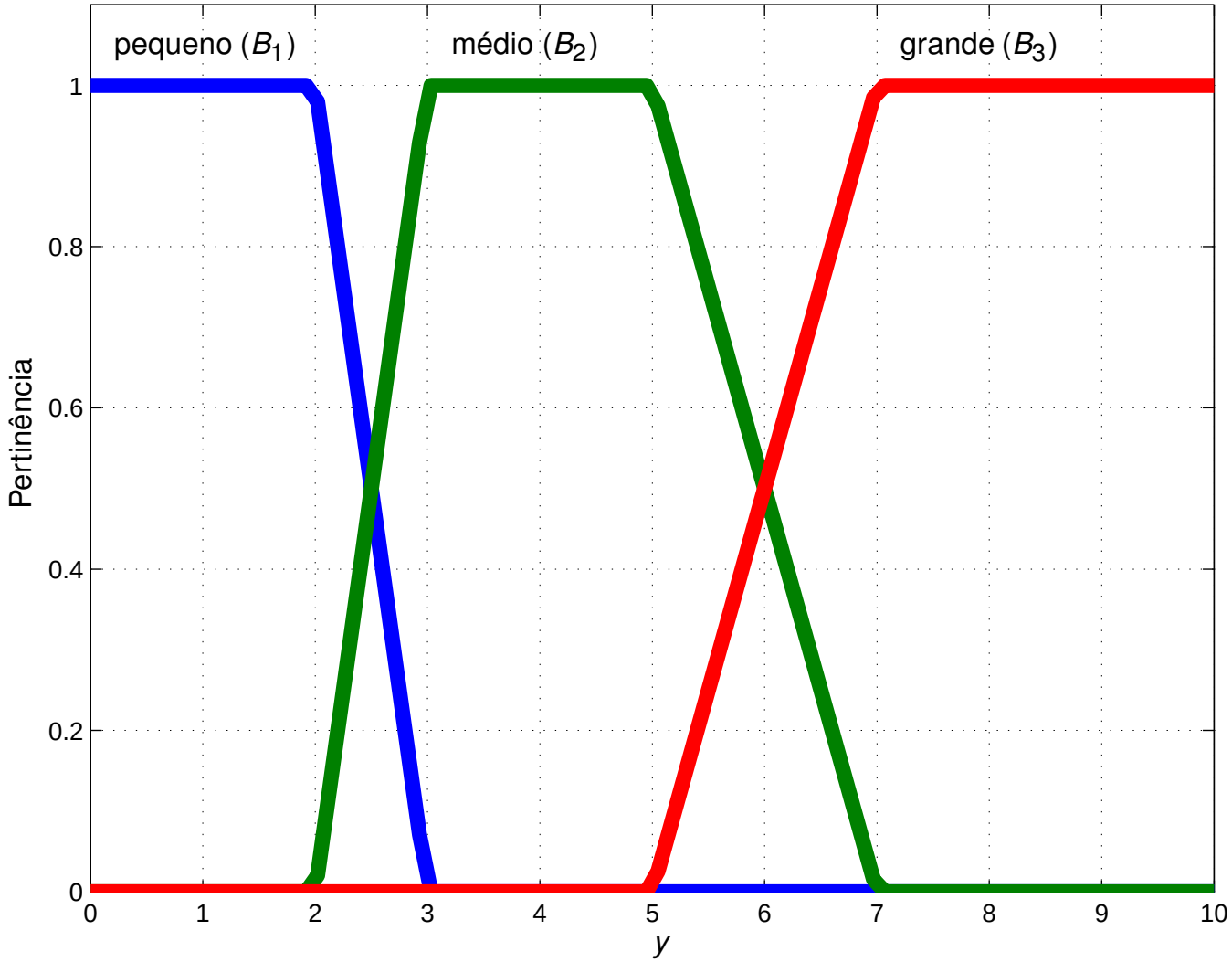
em que os conceitos “pequeno”, “médio” e “grande” são descritos pelos seguintes conjuntos *fuzzy* para cada uma das variáveis $x \in X = [-10, 10]$ e $y \in Y = [0, 10]$:

Funções de pertinência para a variável $x$:



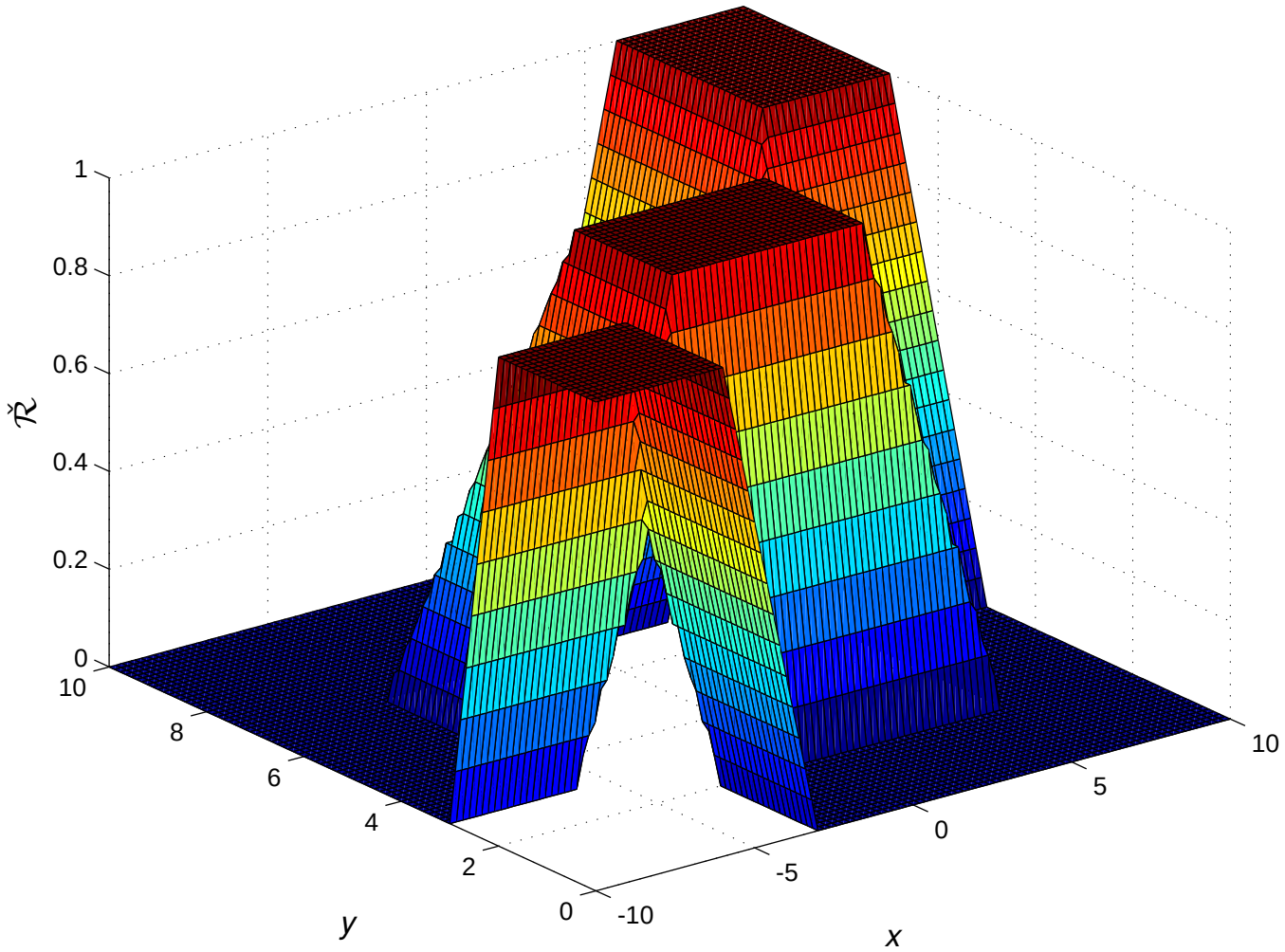

Os conjuntos *fuzzy* $A_1$, $A_2$ e $A_3$ não são sup-min ortonormais!

Funções de pertinência para a variável $y$:



No método de inferência de Mamdani, definimos a relação

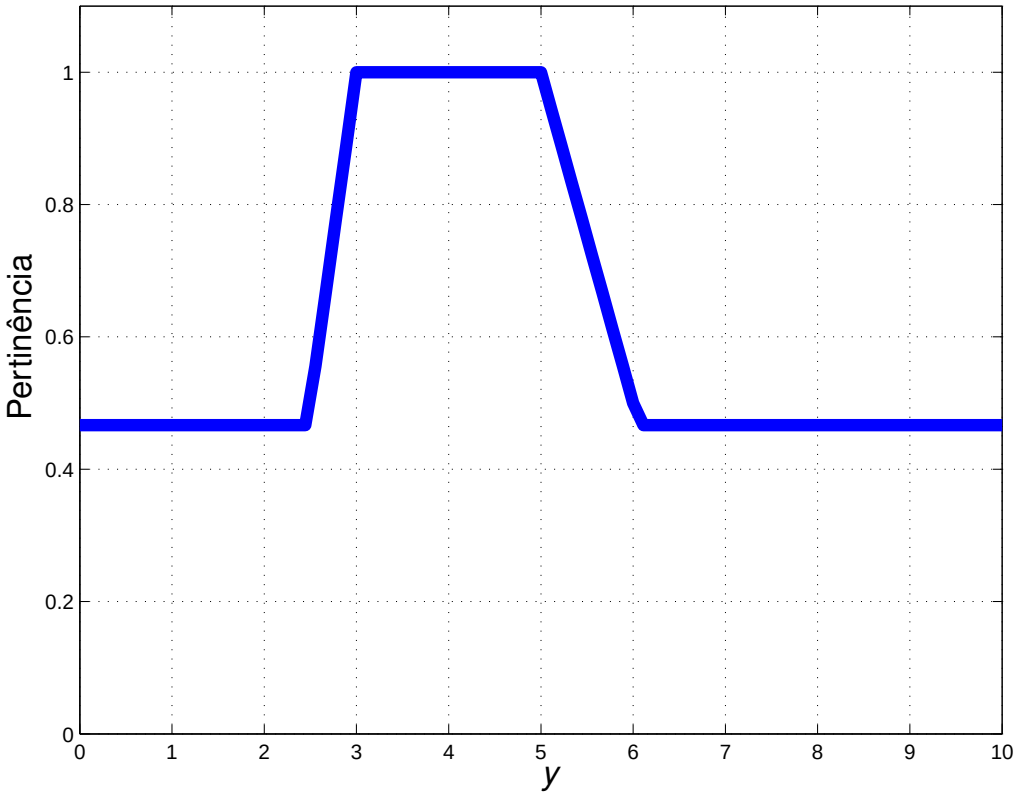
$$\check{\mathcal{R}}(x,y) = \bigvee_{i=1}^{3} A_i(x) \wedge B_i(y), \quad \forall (x,y) \in X \times Y.$$



Posteriormente, dado um conjunto *fuzzy* $A \in \mathcal{F}(X)$, obtemos o conjunto *fuzzy* $B \in \mathcal{F}(Y)$ da seguinte forma:

$$B = A \circ \check{\mathcal{R}}.$$

Por exemplo, ao apresentar $A = A_2$, encontramos $B = A_2 \circ \mathcal{R}$




O método de inferência não é consistente!

# Formulação do Problema

De um modo geral, dada uma base de regras

$$\textbf{SE x} \text{ é } A_i \textbf{ ENTÃO y} \text{ é } B_i, \quad \forall i = 1, \ldots, k.$$

na regra composicional de inferência (RCI) buscamos uma relação $\mathcal{R} \in \mathcal{F}(\mathbf{X} \times \mathbf{Y})$ que seja consistente, ou seja, queremos

$$B_i = A_i \circ \mathcal{R}, \quad \forall i = 1, \ldots, k.$$

Esse sistema de equações nem sempre admite uma solução.

Dessa forma, buscaremos a maior relação $\mathcal{R} \in \mathcal{F}(\mathbf{X} \times \mathbf{Y})$ que satisfaz

$$A_i \circ \mathcal{R} \subseteq B_i, \quad \forall i = 1, \ldots, k.$$

Esse problema é equivalente ao problema apresentado na resolução de equações relacionais *fuzzy*.

## Teorema 1

*Seja* $([0,1], \vee, \wedge, \triangle, \rightarrow)$ *um reticulado residuado e considere uma base de regras*

$$\textbf{\textit{SE}}\ \mathbf{x}\ \textit{é}\ A_i\ \textbf{\textit{ENTÃO}}\ \mathbf{y}\ \textit{é}\ B_i, \quad \forall i = 1, \ldots, k.$$

*A relação* $\hat{\mathcal{R}} \in \mathcal{F}(\mathbf{X} \times \mathbf{Y})$ *dada por*

$$\hat{\mathcal{R}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \bigwedge_{\xi=1}^{k} A_i(\mathbf{x}) \rightarrow B_i(\mathbf{y}),$$

*satisfaz*

$$\hat{\mathcal{R}} = \sup\{\mathcal{R} \in \mathcal{F}(\mathbf{X} \times \mathbf{Y}) : A_i \circ \mathcal{R} \subseteq B_i, \forall i = 1, \ldots, k\}.$$

Em outras palavras, $\hat{R}$ é a maior relação *fuzzy* tal que $A_i \circ \mathcal{R} \subseteq B_i$, $\forall i = 1, \ldots, k$.

# Método de Inferência Conjuntivo

Seja $([0,1], \vee, \wedge, \triangle, \rightarrow)$ um reticulado residuado e considere uma base de regras

$$\textbf{SE x} \text{ é } A_i \textbf{ ENTÃO y} \text{ é } B_i, \quad \forall i = 1, \ldots, k.$$

No **método de inferência conjuntivo**, define-se a relação *fuzzy*

$$\hat{\mathcal{R}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \bigwedge_{\xi=1}^{k} A_i(\mathbf{x}) \rightarrow B_i(\mathbf{y}).$$

O método é chamado conjuntivo porque a relação é obtida usando o mínimo, que é uma conjunção!

Posteriormente, dado um conjunto *fuzzy* $A \in \mathcal{F}(\mathbf{X})$, o conjunto *fuzzy* $B \in \mathcal{F}(\mathbf{Y})$ é determinado através da RCI, ou seja,

$$B = A \circ \hat{\mathcal{R}}.$$

# Exemplo Simples

Considere novamente a base de regras *fuzzy*:

**SE** $x$ é pequeno **ENTÃO** $y$ é pequeno,

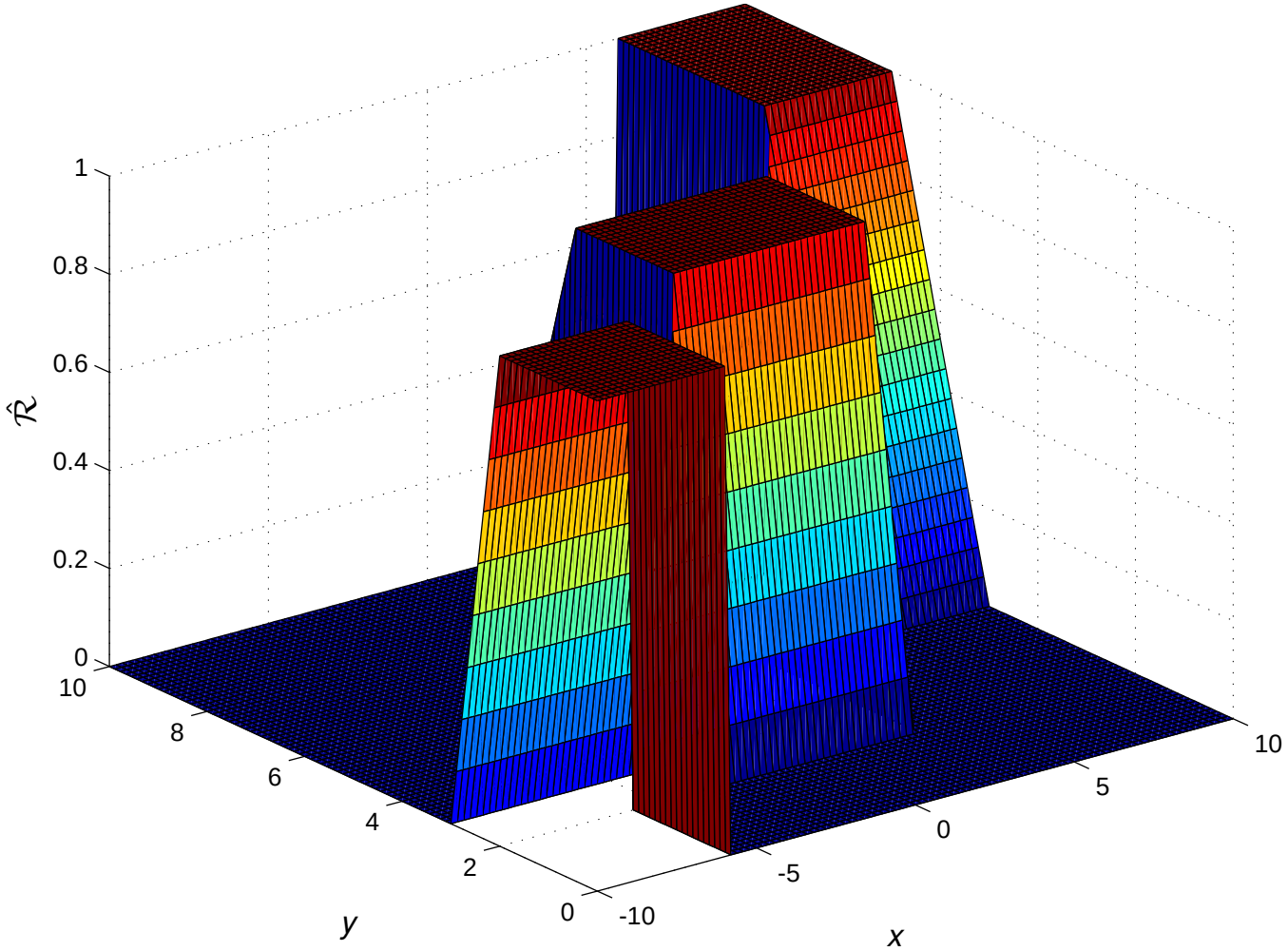
**SE** $x$ é médio **ENTÃO** $y$ é médio,

**SE** $x$ é grande **ENTÃO** $y$ é grande,

em que os conceitos “pequeno”, “médio” e “grande” são descritos pelos conjuntos *fuzzy* apresentados anteriormente.

Considerando o reticulado residuado $([0,1], \vee, \wedge, \triangle_M, \rightarrow_M)$, em que $\triangle_M = \wedge$ e $\rightarrow_M$ é a implicação de Gödel, encontramos

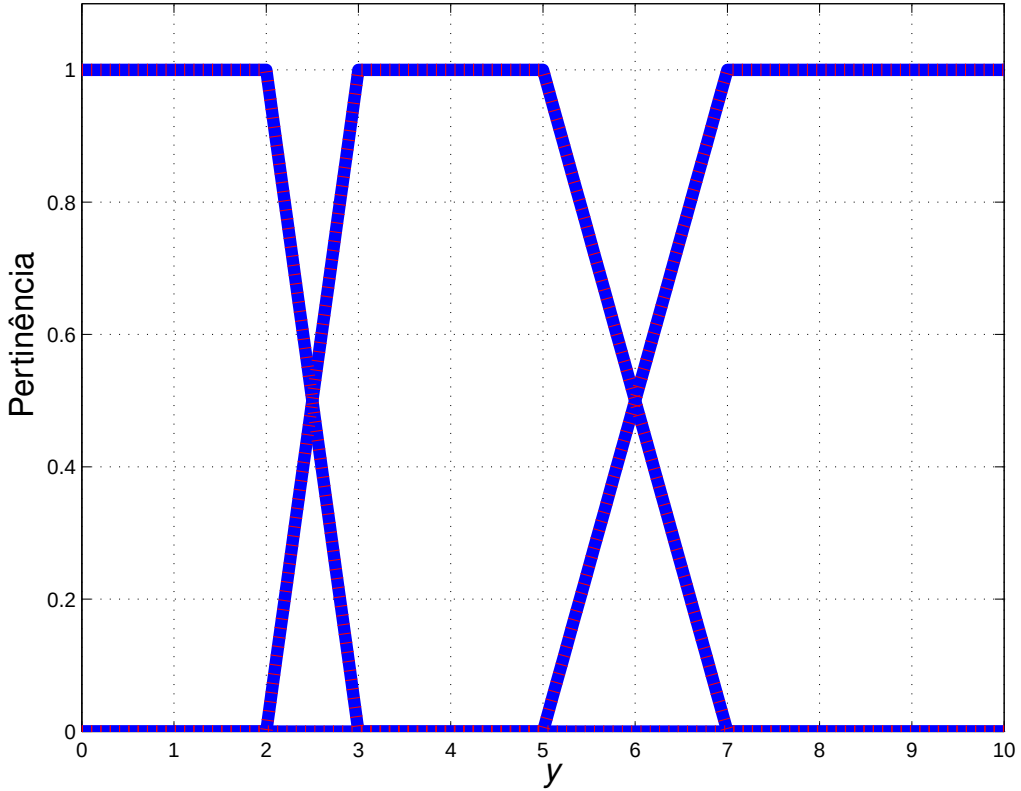
$$\hat{\mathcal{R}}(x,y) = \bigwedge_{i=1}^{3} A_i(x) \rightarrow_M B_i(y), \quad \forall (x,y) \in X \times Y.$$



Posteriormente, dado um conjunto *fuzzy* $A \in \mathcal{F}(X)$, obtemos o conjunto *fuzzy* $B \in \mathcal{F}(Y)$ da seguinte forma:

$$B = A \circ \hat{\mathcal{R}}.$$

Por exemplo, ao apresentar $A = A_\xi$, encontramos $\hat{B}_\xi = A_\xi \circ \mathcal{R}$




que são exatamente iguais a $B_\xi$. Logo, esse método de inferência é consistente!

# Continuidade de um Método de Inferência

De um modo geral, um método de inferência define uma função $\psi : \mathcal{F}(\mathbf{X}) \to \mathcal{F}(\mathbf{Y})$ que associa a cada $A \in \mathcal{F}(\mathbf{X})$ um conjunto *fuzzy* $B \in \mathcal{F}(\mathbf{Y})$.

Além da consistência, esperamos também que $\psi$ seja contínua no sentido de fornecer $B$ próximo de $B_i$ se $A$ é próximo de $A_i$. Simbolicamente,

$$A \approx A_i \quad \Longrightarrow \quad \psi(A) \approx B_i.$$

## Definição 2 (Continuidade de Método de Inferência)

Sejam $\mathcal{S}_{\mathbf{X}}$ e $\mathcal{S}_{\mathbf{Y}}$ medidas de similaridades para conjuntos *fuzzy* em **X** e **Y**, respectivamente. Dizemos que $\psi : \mathcal{F}(\mathbf{X}) \to \mathcal{F}(\mathbf{Y})$ é uma função contínua com respeito à uma base de regras *fuzzy*

$$\textbf{SE x} \text{ é } A_i \textbf{ ENTÃO y} \text{ é } B_i, \quad \forall i = 1, \ldots, k,$$

se

$$\mathcal{S}_{\mathbf{Y}}\big(\psi(A), B_i\big) \geq \mathcal{S}_{\mathbf{X}}(A, A_i), \quad \forall i = 1, \ldots, k.$$

# Continuidade Implica Consistência

A continuidade implica consistência se considerarmos uma medida de similaridade forte $\mathcal{S}_{\mathbf{Y}}$.

**Teorema 3**

*Sejam* $\mathcal{S}_{\mathbf{X}} : \mathcal{F}(\mathbf{X}) \times \mathcal{F}(\mathbf{X}) \to [0,1]$ *uma medida de similaridade e* $\mathcal{S}_{\mathbf{Y}} : \mathcal{F}(\mathbf{Y}) \times \mathcal{F}(\mathbf{Y}) \to [0,1]$ *uma medida de similaridade forte. Considere uma base de regras fuzzy*

$$\textbf{\textit{SE}}\ \mathbf{x}\ \textit{é}\ A_i\ \textbf{\textit{ENTÃO}}\ \mathbf{y}\ \textit{é}\ B_i, \quad \forall i = 1, \ldots, k,$$

*e uma função* $\psi : \mathcal{F}(\mathbf{X}) \to \mathcal{F}(\mathbf{Y})$*. Se* $\psi$ *é contínua com respeito a base de regras, então* $\psi$ *é consistente.*

# Medida de Similaridade Natural de um Reticulado Residuado

A noção de continuidade de um método de inferência foi introduzida em 2006 por Perfilieva e Lehmke considerando a RCI e a seguinte classe de medidas de similaridade.

**Definição 4 (Medida de Similaridade Natural)**

Seja $\mathcal{L} = ([0,1], \vee, \wedge, \triangle, \rightarrow)$ um reticulado residuado. A medida de similaridade natural de $\mathcal{L}$ é $\mathcal{S}_{\mathcal{L}} : \mathcal{F}(\mathbf{X}) \times \mathcal{F}(\mathbf{X}) \rightarrow [0,1]$ dada pela seguinte equação para conjuntos *fuzzy* $A, B \in \mathbf{X}$:

$$\mathcal{S}_{\mathcal{L}}(A,B) = \bigwedge_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}} \left[ A(\mathbf{x}) \leftrightarrow B(\mathbf{x}) \right],$$

em que $a \leftrightarrow b = (a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow a)$.

Nesta disciplina, generalizamos a noção de continuidade considerando medidas de similaridade arbitrárias.

## Teorema 5

*A medida de similaridade $\mathcal{S}_{\mathbb{L}}$ natural de um reticulado residuado $\mathcal{L} = ([0,1], \vee, \wedge, \triangle, \rightarrow)$ é uma medida de similaridade forte.*

## Teorema 6

*Seja* $\mathcal{L} = ([0,1], \vee, \wedge, \triangle, \rightarrow)$ *um reticulado residuado e defina* $\leftrightarrow : [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ *da seguinte forma:*

$$a \leftrightarrow b = (a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow a), \quad \forall a, b \in [0,1].$$

*Nesse caso, tem-se:*

(a) $\leftrightarrow$ *é uma relação de equivalência* $\triangle$*-fuzzy.*

(b) *Para todo* $a, b, c, d \in [0,1]$*, tem-se*

$$(a \leftrightarrow b) \triangle (c \leftrightarrow d) \leq (a \triangle c) \leftrightarrow (b \triangle d).$$

(c) *Dados* $a_i \in [0,1]$ *e* $b_i \in [0,1]$*, com* $i \in \mathcal{I}$*, tem-se*

$$\bigwedge_{i \in \mathcal{I}} (a_i \leftrightarrow b_i) \leq \left[ \left( \bigvee_{i \in \mathcal{I}} a_i \right) \leftrightarrow \left( \bigvee_{i \in \mathcal{I}} a_i \right) \right].$$

# Continuidade e Consistência

**Teorema 7 (Teorema da Equivalência de Perfilieva-Lehmke)**

*Seja* $\mathcal{L} = ([0,1], \vee, \wedge, \triangle, \rightarrow)$ *um reticulado residuado e* $\mathcal{S}_{\mathbb{L}}$ *a medida de similaridade natural de* $\mathcal{L}$*. Dada uma base de regras fuzzy*

$$\textbf{\textit{SE}}\ \mathbf{x}\ \textit{é}\ A_i\ \textbf{\textit{ENTÃO}}\ \mathbf{y}\ \textit{é}\ B_i, \quad \forall i = 1, \ldots, k,$$

*e uma relação fuzzy* $\mathcal{R} \in \mathcal{F}(\mathbf{X} \times \mathbf{Y})$*, a função* $\psi^{\circ}_{\mathcal{R}} : \mathcal{F}(\mathbf{X}) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbf{Y})$ *dada pela RCI, isto é,*

$$\psi^{\circ}_{\mathcal{R}}(A) = A \circ \mathcal{R},$$

*é contínua com se e somente se é consistente com a base de regras.*

# Exemplo Simples

Considere novamente a base de regras *fuzzy*:

**SE** $x$ é pequeno **ENTÃO** $y$ é pequeno,

**SE** $x$ é médio **ENTÃO** $y$ é médio,

**SE** $x$ é grande **ENTÃO** $y$ é grande,

em que os conceitos "pequeno", "médio" e "grande" são descritos pelos conjuntos *fuzzy* apresentados anteriormente.

---

Neste caso, a função $\psi^{\circ}_{\hat{\mathcal{R}}}(A) = A \circ \hat{\mathcal{R}}$ fornece um modelo contínuo enquanto que $\psi^{\circ}_{\check{\mathcal{R}}}(A) = A \circ \check{\mathcal{R}}$ não fornece um modelo contínuo!

# Considerações Finais

Tal como a consistência, a continuidade de um método de inferência não é necessária (e nem suficiente) para o bom desempenho do sistema baseado em regras *fuzzy* em uma aplicação prática.

---

Lembre-se que o sistema baseados em regras *fuzzy* com o método de inferência de Mamdani forneceu excelentes resultados no problema *backing-up a truck* embora a função $\psi^{\circ}_{\check{\mathcal{R}}}$ desse problema não seja contínua!