Aula 13
Conjuntos *Fuzzy* como Pontos no Hipercubo.

MS580 - Introdução à Teoria *Fuzzy*

Marcos Eduardo Valle

Departamento de Matemática Aplicada
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Universidade Estadual de Campinas

Pontos no Hipercubo

Se $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ é um universo de discurso finito, então um conjunto *fuzzy* $A \in \mathcal{F}(U)$ pode ser identificado com um vetor $[a_1, a_2, \ldots, a_n]^T$, em que $a_j = A(u_j)$ para todo $j = 1, \ldots, n$.

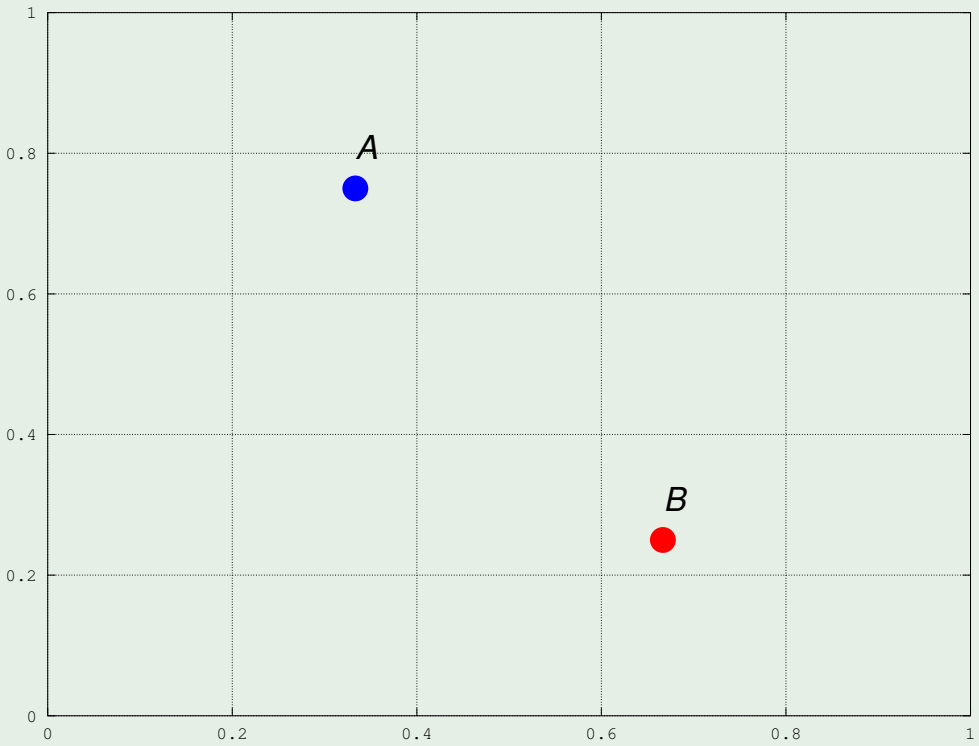
Em outras palavras, a família de todos os conjuntos *fuzzy* $\mathcal{F}(U)$ corresponde ao hipercubo $[0, 1]^n$.

Um conjunto *fuzzy* pode ser visto como um ponto no hipercubo.

Um conjunto clássico de U pode ser identificado com um vértice do hipercubo.

Exemplo 1

Se $U = \{u_1, u_2\}$, então $\mathcal{F}(U)$ pode ser identificado com o quadrado unitário $[0,1] \times [0,1]$.

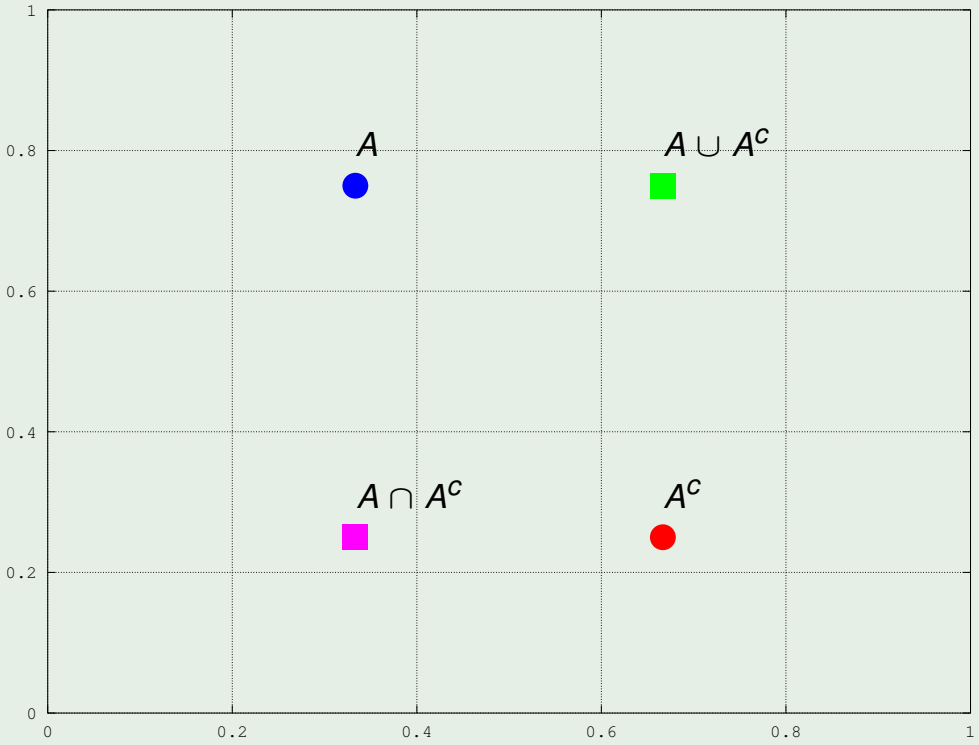


Os conjuntos *fuzzy* $A, B \in \mathcal{F}(U)$ tais que
$A(u_1) = 1/3, \quad A(u_2) = 3/4, \quad B(u_1) = 2/3 \quad \text{e} \quad B(u_2) = 1/4,$
correspondem aos pontos $A = [1/3, 3/4]$ e $B = [2/3, 1/4]$.

As operações de união, intersecção e negação dos conjuntos *fuzzy* do exemplo anterior podem ser visualizadas como segue:

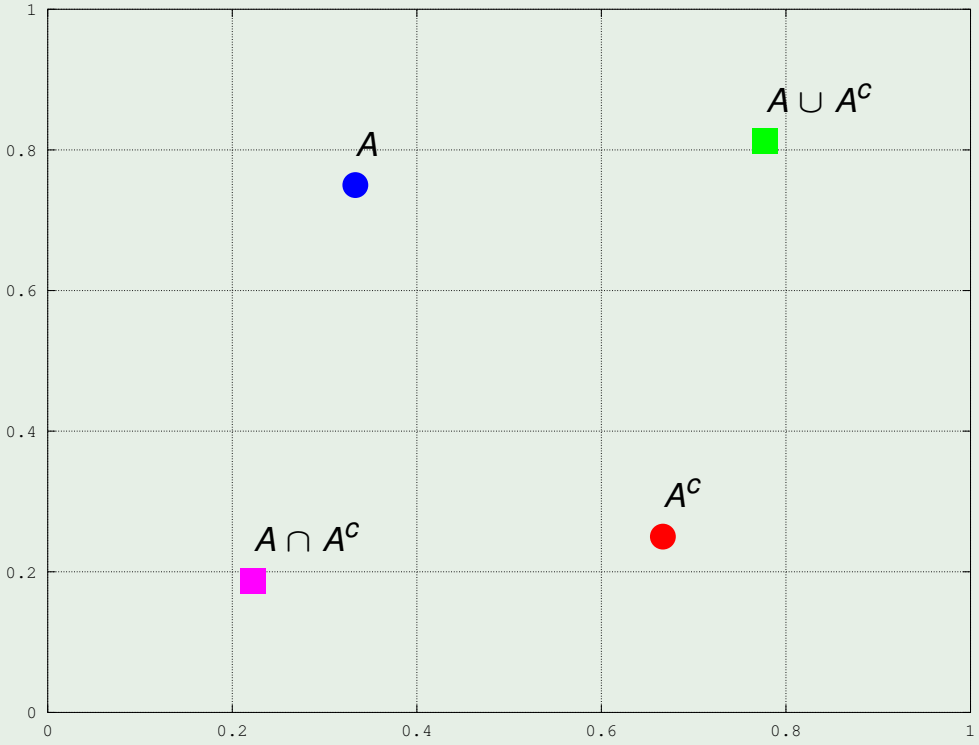
Exemplo 2 (Máximo, mínimo e negação usual)

União, intersecção e complemento usando máximo, mínimo e a negação usual.



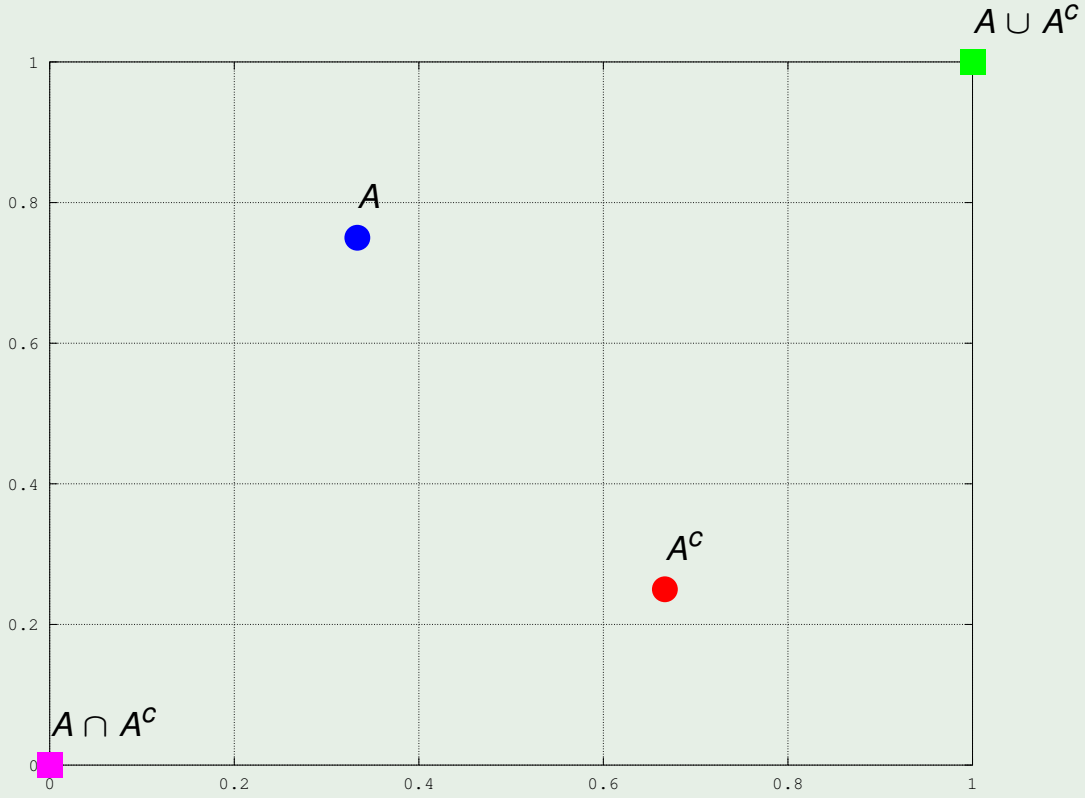
Exemplo 3 (Produto, soma probabilística e negação usual)

União, intersecção e complemento usando produto, soma probabilística e a negação usual.



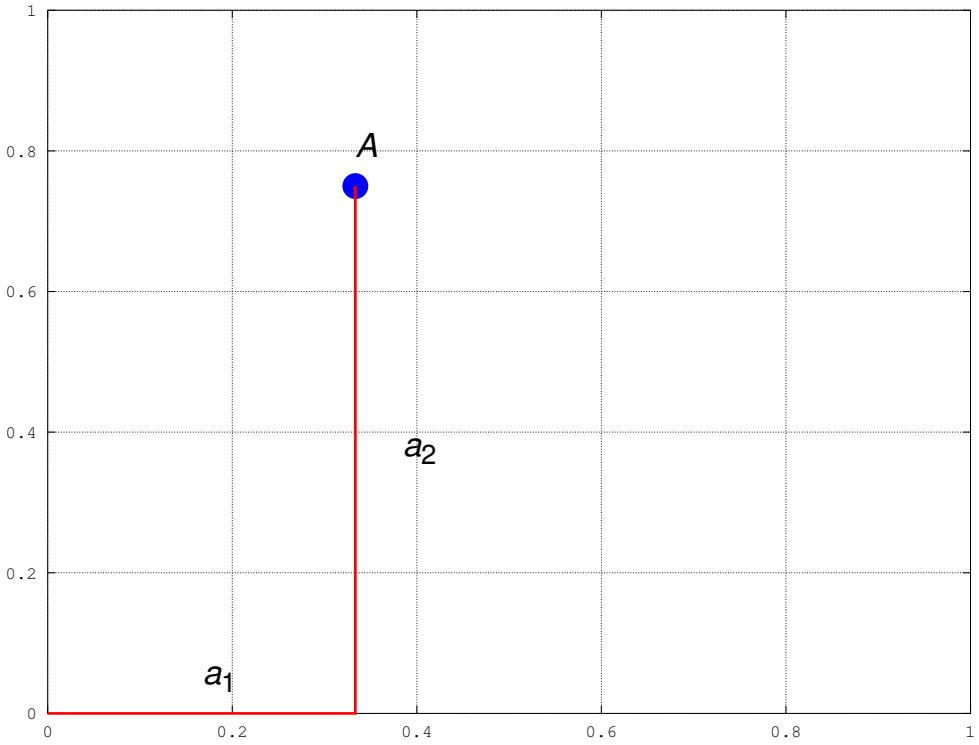
Exemplo 4 (Lukasiewicz)

União, intersecção e complemento usando a t-norma, t-conorma de Lukasiewicz e a negação usual.



Cardinalidade

A cardinalidade de um conjunto *fuzzy* $A = [a_1, \ldots, a_n] \in [0,1]^n$, dada pelo somatório $Card(A) = \sum_{i=1}^{n} a_i$,



corresponde à distância de $\emptyset$ a A usando a soma dos valores absolutos (norma-1).

O Ponto Médio do Hipercubo

O ponto médio $[1/2, 1/2, \ldots, 1/2]$ do hipercubo $[0, 1]^n$ corresponde ao único conjunto *fuzzy* que é igual aos seu complemento usando a negação usual.

O ponto médio é também o único ponto equidistante de cada um dos 2^n vértices do hipercubo.

O ponto médio pode ser visto como o conjunto “mais” *fuzzy* do hipercubo!

Entropia

A entropia mede o quão *fuzzy* é um conjunto A.

Formalmente, a entropia é uma aplicação $E : \mathcal{F}(U) \to [0, 1]$ em que $E(A) = 0$ se, e somente se, A é um conjunto clássico. Além disso, $E(A) = 1$ se $A(u) = 1/2$ para todo $u \in U$.

Exemplo 5 (Entropia de Kosko)

A seguinte função, definida usando o máximo, o mínimo e a negação usual, é uma entropia:

$$E_K(A) = \frac{Card(A \cap A^c)}{Card(A \cup A^c)}.$$

Determine a entropia do conjunto *fuzzy* $A = [1/3, 3/4]$.

Entropia

A entropia mede o quão *fuzzy* é um conjunto A.

Formalmente, a entropia é uma aplicação $E : \mathcal{F}(U) \to [0, 1]$ em que $E(A) = 0$ se, e somente se, A é um conjunto clássico. Além disso, $E(A) = 1$ se $A(u) = 1/2$ para todo $u \in U$.

Exemplo 5 (Entropia de Kosko)

A seguinte função, definida usando o máximo, o mínimo e a negação usual, é uma entropia:

$$E_K(A) = \frac{Card(A \cap A^c)}{Card(A \cup A^c)}.$$

Determine a entropia do conjunto *fuzzy* $A = [1/3, 3/4]$.

Resposta:

$$E(A) = \frac{7}{17} \approx 0.41.$$

Exemplo 6

Seja $Sim : \mathcal{F}(U) \times \mathcal{F}(U) \to [0,1]$ uma medida de similaridade forte. A entropia de um conjunto *fuzzy* $A \in [0,1]^n$ pode ser definida da seguinte forma:

$$E_{Sim}(A) = Sim(A \cup A^c, A \cap A^c).$$

Dada a similaridade de Gregson

$$Sim_G(A,B) = \begin{cases} 1, & A \cup B = 0, \\ \dfrac{\sum_{i=1}^{n} a_i \wedge b_i}{\sum_{i=1}^{n} a_i \vee b_i}, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

e a negação usual, determine a entropia de $A = [1/3, 3/4]$.

Exemplo 6

Seja $Sim : \mathcal{F}(U) \times \mathcal{F}(U) \to [0,1]$ uma medida de similaridade forte. A entropia de um conjunto *fuzzy* $A \in [0,1]^n$ pode ser definida da seguinte forma:

$$E_{Sim}(A) = Sim(A \cup A^c, A \cap A^c).$$

Dada a similaridade de Gregson

$$Sim_G(A,B) = \begin{cases} 1, & A \cup B = 0, \\ \dfrac{\sum_{i=1}^{n} a_i \wedge b_i}{\sum_{i=1}^{n} a_i \vee b_i}, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

e a negação usual, determine a entropia de $A = [1/3, 3/4]$.

Resposta:

$$E_{Sim}(A) = \frac{7}{17} \approx 0.41.$$

Exemplo 7

Seja $h : [0,1] \to [0,1]$ uma função tal que:

- $h(0) = h(1) = 0$ e $h(1/2) = 1$.
- h é estritamente crescente em $[0, 1/2)$ e estritamente decrescente em $(1/2, 1]$.

A entropia de um conjunto *fuzzy* $A \in [0,1]^n$ pode ser definida da seguinte forma:

$$H_h(A) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} h(a_i).$$

Dada a função $h(x) = 4(1-x)x$, determine a entropia de $A = [1/3, 3/4]$.

Exemplo 7

Seja $h : [0,1] \to [0,1]$ uma função tal que:

- $h(0) = h(1) = 0$ e $h(1/2) = 1$.
- h é estritamente crescente em $[0, 1/2)$ e estritamente decrescente em $(1/2, 1]$.

A entropia de um conjunto *fuzzy* $A \in [0,1]^n$ pode ser definida da seguinte forma:

$$H_h(A) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} h(a_i).$$

Dada a função $h(x) = 4(1-x)x$, determine a entropia de $A = [1/3, 3/4]$.

Resposta:

$$E_h(A) = \frac{59}{72} \approx 0.81.$$

Composição Relação-Conjunto

Considere $U = \{u_1, \ldots, u_n\}$ e $V = \{v_1, \ldots, v_m\}$ e seja $\mathcal{R} \in \mathcal{F}(U \times V)$ uma relação *fuzzy*.

A composição sup-$\triangle$ define uma aplicação $r : [0,1]^n \to [0,1]^m$ dada por

$$r(A) = A \circ \mathcal{R} \quad \Longleftrightarrow \quad r(A)_j = \bigvee_{i=1}^{n} \left(a_i \triangle r_{ij}\right), \quad \forall j = 1, \ldots, m,$$

em que $A = [a_1, \ldots, a_n] \in [0,1]^n$ e $\mathcal{R} = (r_{ij}) \in [0,1]^{n \times m}$.

Observe que r leva um ponto no hipercubo $[0,1]^n$ a um ponto no hipercubo $[0,1]^m$.

Exemplo 8

Considere a composição max-min e a relação *fuzzy*

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.9 \\ 0.6 & 0.5 \end{bmatrix}.$$

Determine a composição $A \circ \mathcal{R}$ em que $A = [1/3, 3/4]$.

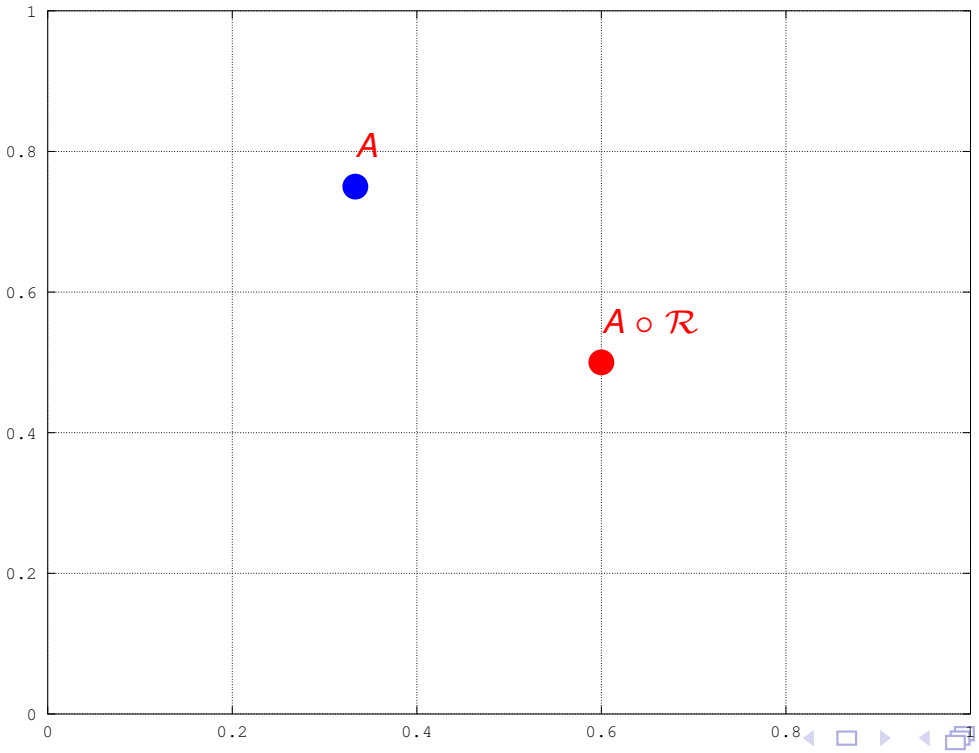
Exemplo 8

Considere a composição max-min e a relação *fuzzy*

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.9 \\ 0.6 & 0.5 \end{bmatrix}.$$

Determine a composição $A \circ \mathcal{R}$ em que $A = [1/3, 3/4]$.

Resposta: $A \circ \mathcal{R} = [0.6, 0.5]$



Conclusão

A interpretação de um conjunto *fuzzy* como um ponto do hipercubo pode facilitar o entendimento de muitos conceitos na teoria dos conjuntos *fuzzy*.

Na aula de hoje, vimos como interpretar geometricamente a união, a intersecção, a negação, a cardinalidade e a composição sup-$\triangle$.

A interpretação geométrica pode também ser aplicada para as composições inf-$\bigtriangledown$ e inf-$\rightarrow$.

Ela também pode ser usada para entender algumas medidas de inclusão, *subsethood* e similaridade *fuzzy*.