Aula 12
Composição
Relação-Conjunto *Fuzzy*.

MS580 - Introdução à Teoria *Fuzzy*

Marcos Eduardo Valle

Departamento de Matemática Aplicada
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Universidade Estadual de Campinas

Na aula de hoje veremos como combinar uma relação com um conjunto, uma situação muito comum nas aplicações da teoria *fuzzy*.
Como motivação para o estudo da composição relação-conjunto, considere o seguinte exemplo abstrato:

Exemplo 1

Suponha que $\mathcal{R}$ descreva (de forma muito simplifica) a associação entre febre alta (medida entre 36^oC e 40^oC) e a dor de cabeça (medida em uma escala de 0 a 10).

Sabendo que a temperatura é em torno de 38^oC, qual será o nível de dor de cabeça?

Em outras palavras, sabendo que a temperatura é um conjunto A, qual será o conjunto da dor de cabeça?

Composição Relação-Conjunto Clássica

Supunha que temos uma relação clássica $\mathcal{R} \subseteq U \times V$ e observamos um conjunto clássico $A \subseteq U$.

Podemos definir o conjunto clássico $B \subseteq V$ de todos os elementos de V que estão relacionados (por meio de $\mathcal{R}$) com algum elemento de A.

Formalmente, definimos o conjunto B da seguinte forma:

$$B = \{v \in V : \exists u \in U, u \in A, (u, v) \in \mathcal{R}\}.$$

Do clássico para o *Fuzzy*

Em termos da função de pertinência, temos

$$\begin{aligned}
\chi_B(v) = 1 \quad &\Longleftrightarrow \quad \exists u \in U : \chi_A(u) = 1 \quad \text{e} \quad \chi_{\mathcal{R}}(u,v) = 1 \\
&\Longleftrightarrow \quad \exists u \in U : \chi_A(u) \triangle \chi_{\mathcal{R}}(u,v) = 1 \\
&\Longleftrightarrow \quad \sup_{u \in U} \left[\chi_A(u) \triangle \chi_{\mathcal{R}}(u,v) \right] = 1,
\end{aligned}$$

em que $a \triangle b = 1$ se, e somente se, $a = 1$ e $b = 1$.

Dessa forma, podemos escrever

$$\chi_B(v) = \sup_{u \in U} \left[\chi_A(u) \triangle \chi_{\mathcal{R}}(u,v) \right].$$

No caso *fuzzy*, substituímos a função característica pela função de pertinência, ou seja,

$$B(v) = \sup_{u \in U} \left[A(u) \triangle \mathcal{R}(u,v) \right],$$

em que $\triangle$ denota uma t-norma.

Composições Sup-$\triangle$ Relação-Conjunto *Fuzzy*

Definição 2 (Composição sup-$\triangle$ Relação-Conjunto)

Seja $\triangle$ uma t-norma e $\mathcal{R} \in \mathcal{F}(U \times V)$ uma relação *fuzzy*.

- Dado um conjunto *fuzzy* $A \in \mathcal{F}(U)$, definimos o conjunto *fuzzy* $B = A \circ \mathcal{R} \in \mathcal{F}(V)$ através da seguinte equação:

$$B(v) = \sup_{u \in U} \left[A(u) \triangle R(u, v) \right], \quad \forall v \in V.$$

- Dado um conjunto *fuzzy* $X \in \mathcal{F}(V)$, definimos o conjunto *fuzzy* $Y = \mathcal{R} \circ X \in \mathcal{F}(U)$ através da equação

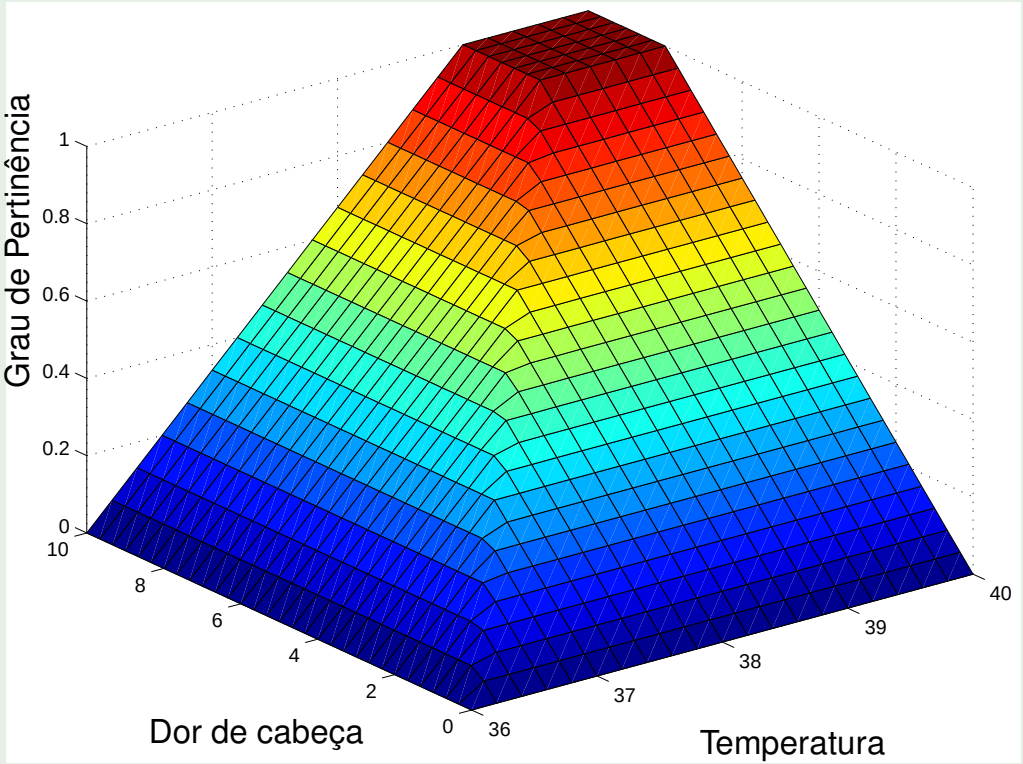
$$Y(u) = \sup_{v \in U} \left[R(u, v) \triangle X(v) \right], \quad \forall u \in U.$$

Exemplo 3

Considere a relação *fuzzy* $\mathcal{R} \in \mathcal{F}([36, 40] \times [0, 10]$, dada por

$$\mathcal{R}(x, y) = \min\left\{1, \frac{(x-36)}{3}, \frac{y}{8}\right\},$$

que descreve a associação entre febre alta e a dor de cabeça.

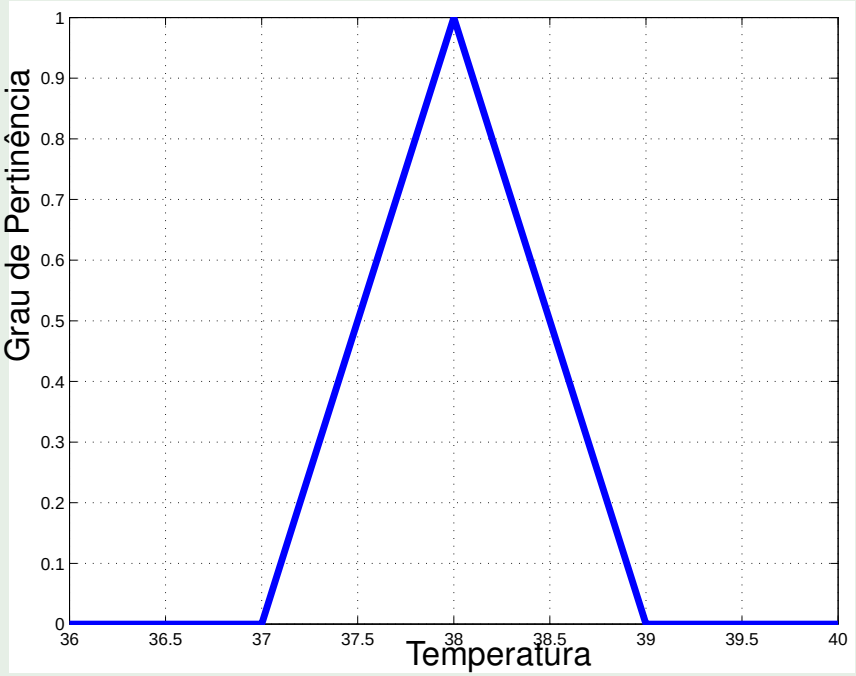


Exemplo 3

Dado o conjunto *fuzzy* $A \in \mathcal{F}([36, 40])$, dado por

$$A(x) = 0 \vee \big((x - 37) \wedge (39 - x)\big),$$

que descreve a temperatura em "torno de $38^o C$".

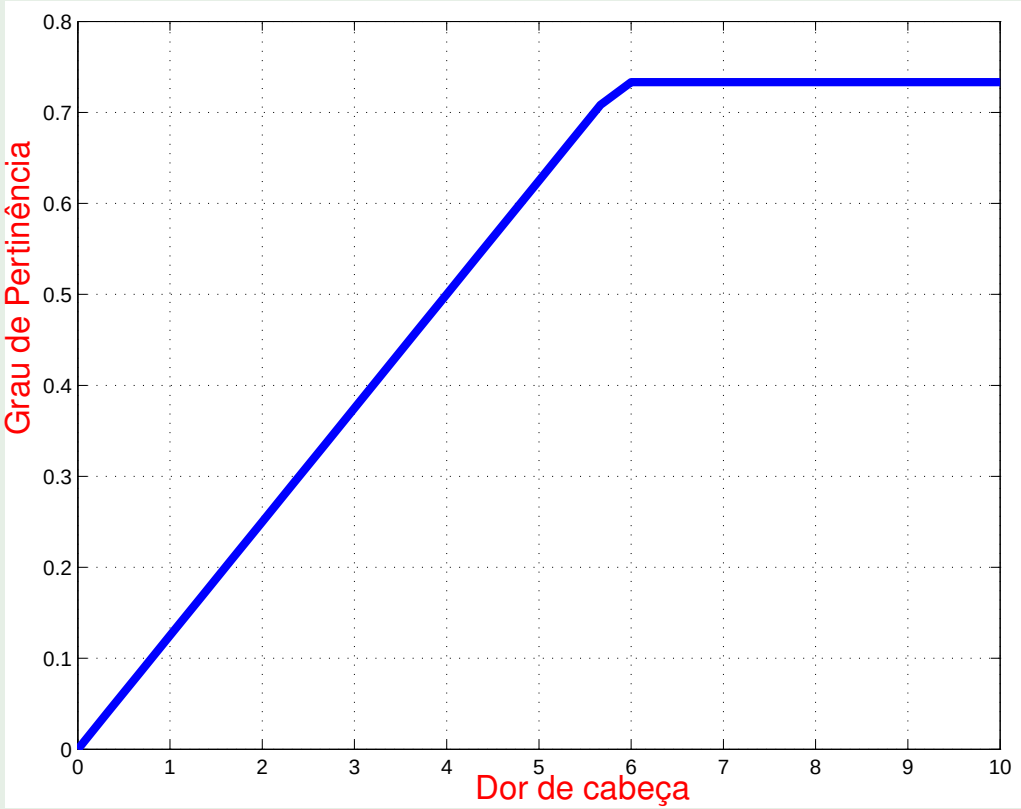


Determine a composição sup-min $B = A \circ \mathcal{R}$

Exemplo 3

Resposta: Neste caso, a composição sup-min $A \circ \mathcal{R}$ fornece

$$(A \circ \mathcal{R})(y) = 0.75 \wedge \left(\frac{y}{8}\right).$$

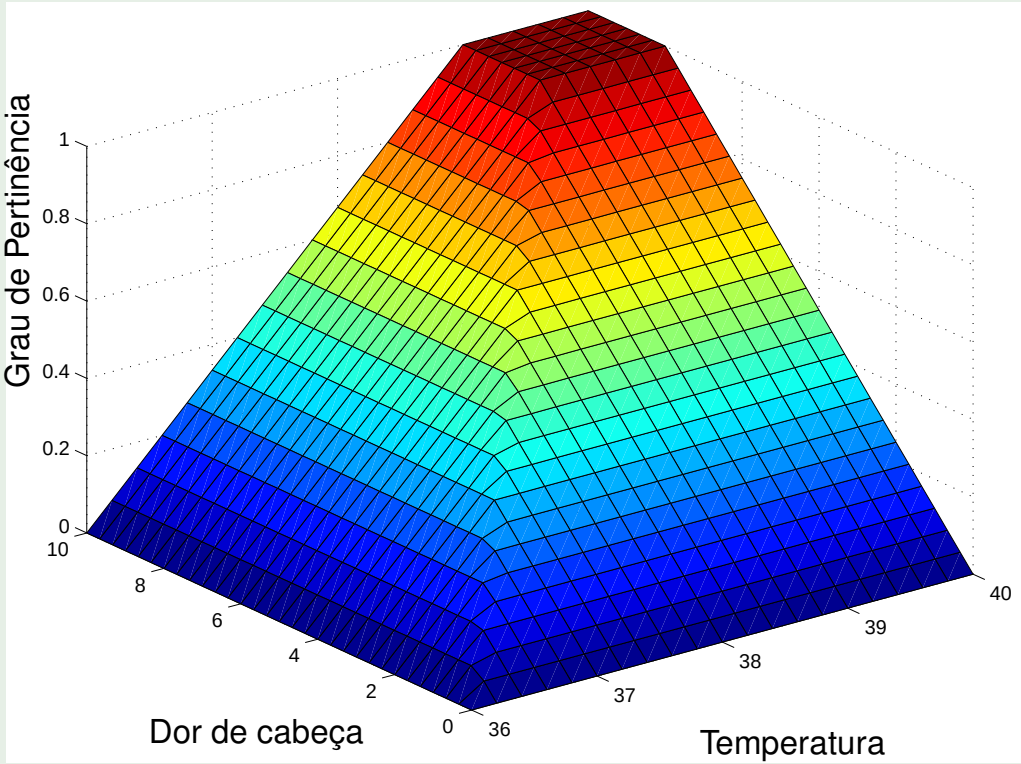


Exemplo 4

Considere a relação *fuzzy* $\mathcal{R} \in \mathcal{F}([36, 40] \times [0, 10]$, dada por

$$\mathcal{R}(x, y) = \min\left\{1, \frac{(x-36)}{3}, \frac{y}{8}\right\},$$

que descreve a associação entre febre alta e a dor de cabeça.

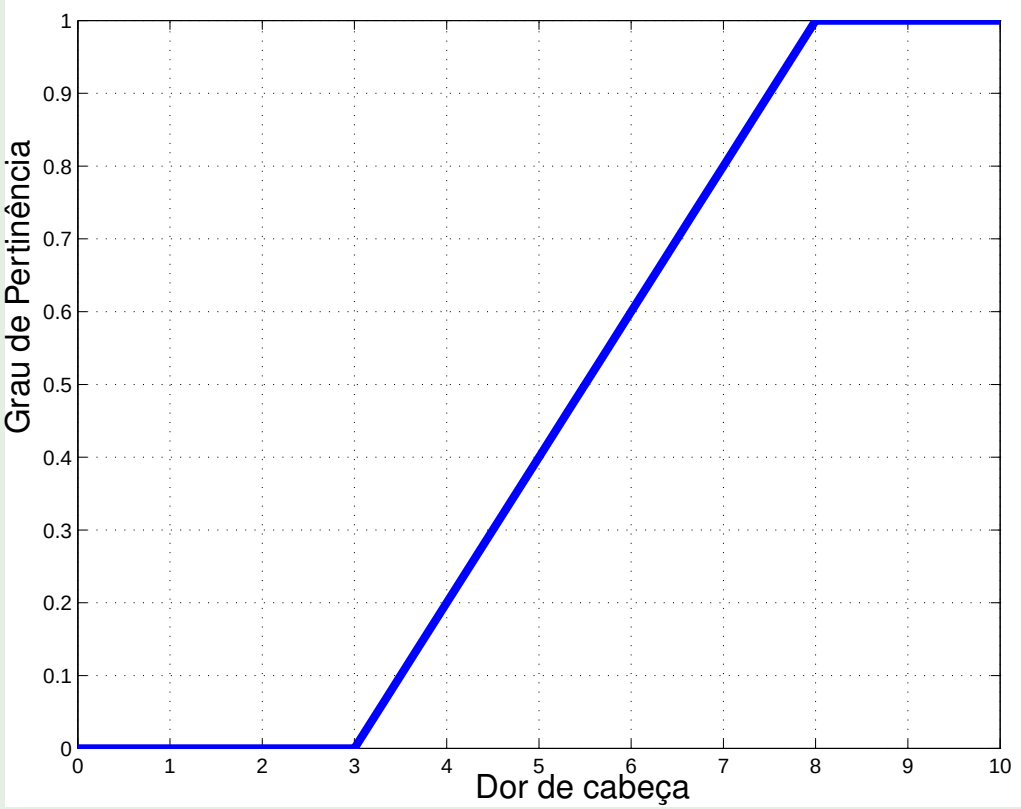


Exemplo 4

Suponha que observamos o conjunto *fuzzy* $B \in \mathcal{F}([0,1])$

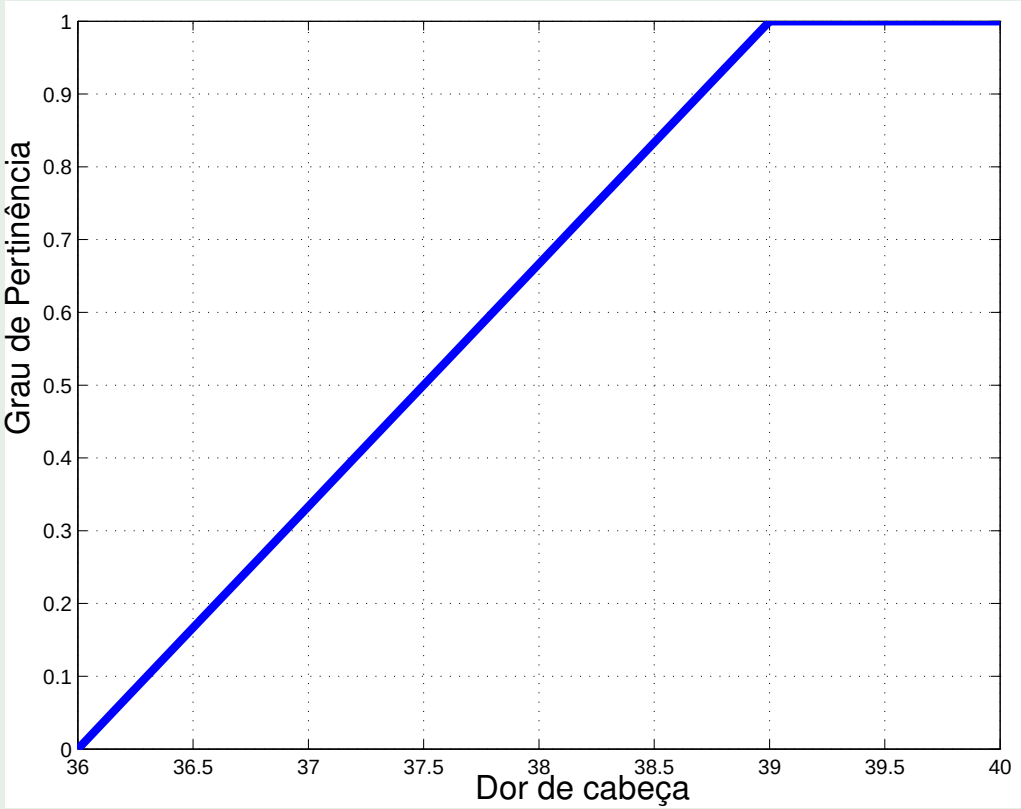
$$B(y) = 0 \vee \left[1 \wedge \left(\frac{y-3}{5}\right)\right].$$

que descreve o conceito “forte dor de cabeça”.



Exemplo 4

O maior conjunto *fuzzy* $A \in \mathcal{F}([36, 40])$ tal que $A = B \circ \mathcal{R}^{-1}$, em que "$\circ$" denota a composição sup-min, é



Em palavras, A é o conjunto *fuzzy* de "febres" que provoca "forte dor de cabeça".

Exemplo 5

Considere universos finitos $U = \{u_1, u_2\}$ e $V = \{v_1, v_2, v_3\}$. Dada a relação *fuzzy* $\mathcal{R} \in \mathcal{F}(U \times V)$ e o conjunto *fuzzy* $A \in \mathcal{F}(U)$, representados por

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.5 & 0.8 \\ 0.1 & 0.4 & 0.9 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{bmatrix} 0.8 & 1.0 \end{bmatrix}$$

determine o conjunto *fuzzy* $A \circ \mathcal{R}$ obtido considerando a composição max-$\triangle_L$, em que $\triangle_L$ denota a t-norma de Lukasiewicz.

Exemplo 5

Considere universos finitos $U = \{u_1, u_2\}$ e $V = \{v_1, v_2, v_3\}$. Dada a relação *fuzzy* $\mathcal{R} \in \mathcal{F}(U \times V)$ e o conjunto *fuzzy* $A \in \mathcal{F}(U)$, representados por

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.5 & 0.8 \\ 0.1 & 0.4 & 0.9 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{bmatrix} 0.8 & 1.0 \end{bmatrix}$$

determine o conjunto *fuzzy* $A \circ \mathcal{R}$ obtido considerando a composição max-$\triangle_L$, em que $\triangle_L$ denota a t-norma de Lukasiewicz.

Resposta: O conjunto *fuzzy* $A \circ \mathcal{R}$ corresponde ao vetor

$$A \circ \mathcal{R} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.4 & 0.9 \end{bmatrix}$$

Extensão Cilíndrica e Extensão

A composição sup-$\triangle$ relação-conjunto também pode ser deduzida usando o conceitos de extensão cilíndrica e projeção.

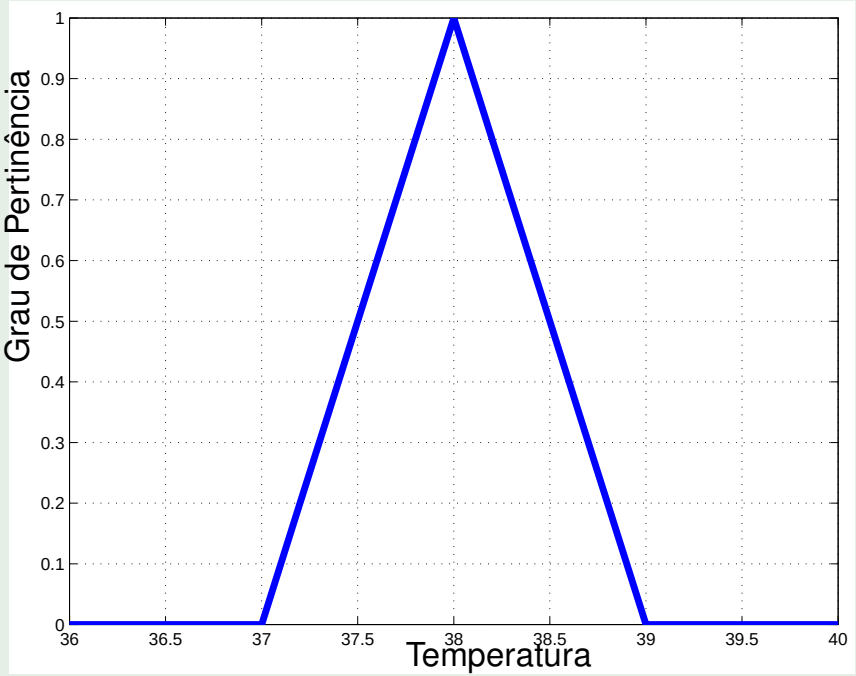
Definição 6 (Extensão Cilíndrica)

A extensão cilíndrica em $U \times V$ de um conjunto *fuzzy* $A \in \mathcal{F}(U)$ é a relação *fuzzy* $cil(A) \in \mathcal{F}(U \times V)$ dada por

$$cil(A)(u, v) = A(u), \quad \forall u \in U, v \in V.$$

Exemplo 7

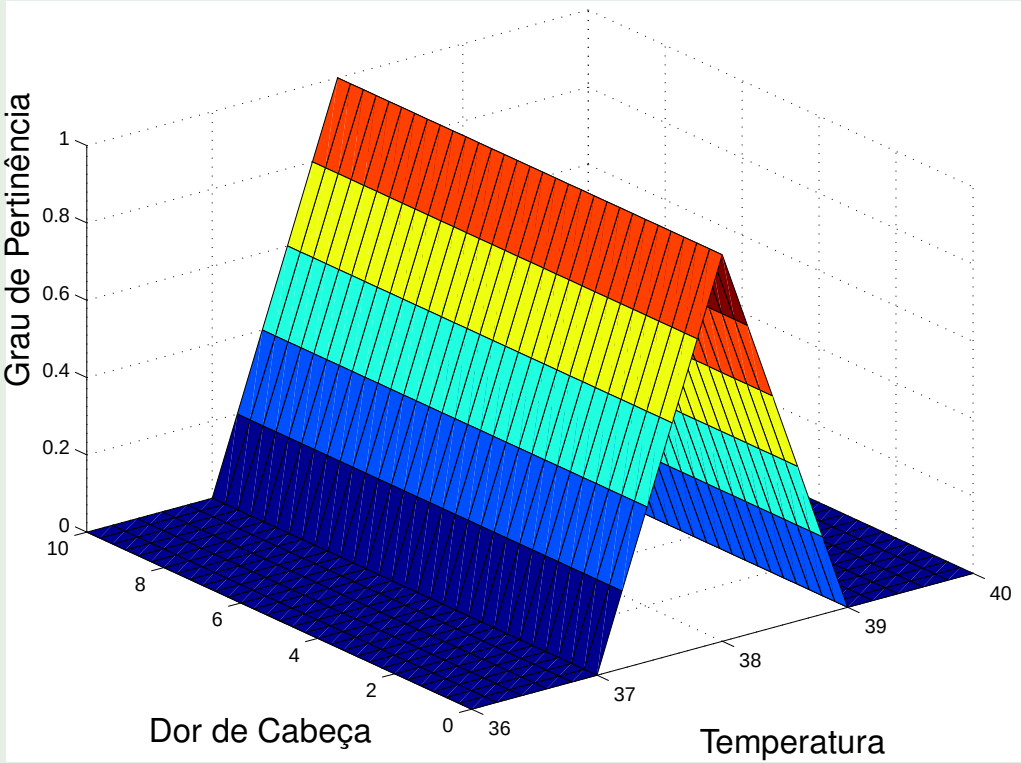
A extensão cilíndrica em $[36, 40] \times [0, 10]$ do conjunto *fuzzy* $A \in \mathcal{F}([36, 40])$, dado por $A(x) = 0 \vee \big((x - 37) \wedge (39 - x)\big)$,



Exemplo 7

A extensão cilíndrica em $[36, 40] \times [0, 10]$ do conjunto *fuzzy* $A \in \mathcal{F}([36, 40])$, dado por $A(x) = 0 \vee \big((x - 37) \wedge (39 - x)\big)$, é

$$cil(A)(x, y) = 0 \vee \big((x - 37) \wedge (39 - x)\big), \forall x \in [36, 40], y \in [0, 10].$$



Definição 8 (Projeção)

Considere uma relação *fuzzy* $\mathcal{R} \in \mathcal{F}(U \times V)$.

- A projeção de $\mathcal{R}$ em U é o conjunto *fuzzy* $proj_U(\mathcal{R}) \in \mathcal{F}(U)$ dado por

$$proj_U(R)(u) = \sup_{y \in V} \mathcal{R}(u, v), \quad \forall u \in U.$$

- A projeção de $\mathcal{R}$ em V é o conjunto *fuzzy* $proj_V(\mathcal{R}) \in \mathcal{F}(V)$ dado por

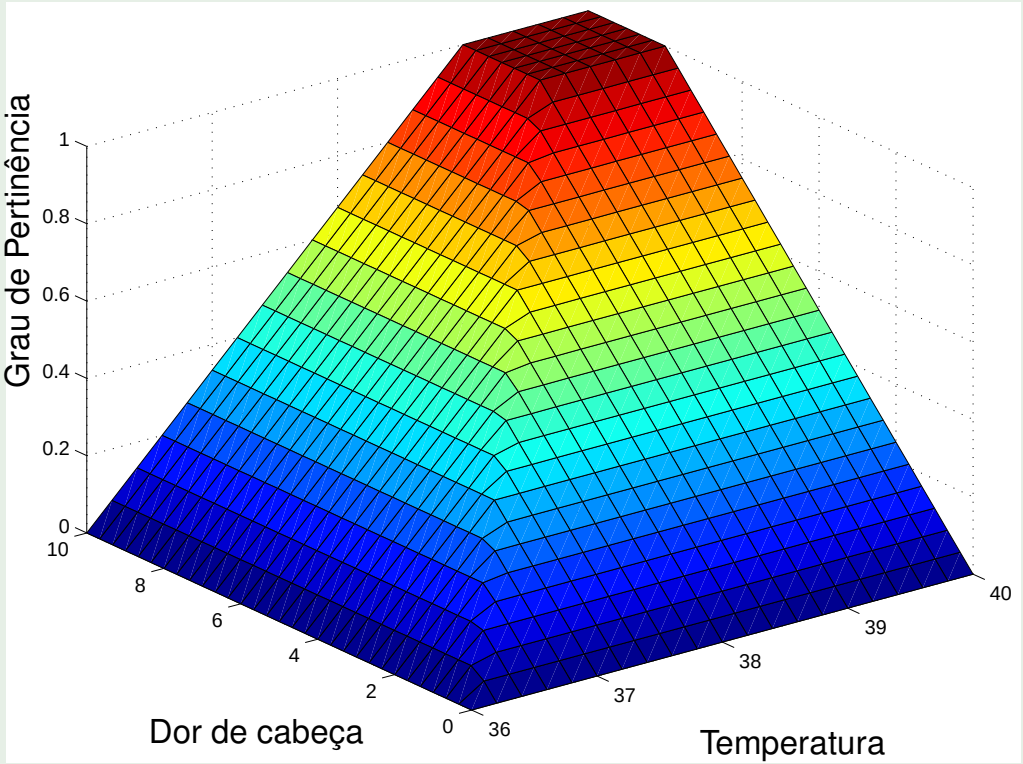
$$proj_V(R)(v) = \sup_{u \in U} \mathcal{R}(u, v), \quad \forall v \in V.$$

Exemplo 9

Considere a relação *fuzzy* $\mathcal{R} \in \mathcal{F}([36, 40] \times [0, 10]$, dada por

$$\mathcal{R}(x, y) = \min\left\{1, \frac{(x-36)}{3}, \frac{y}{8}\right\},$$

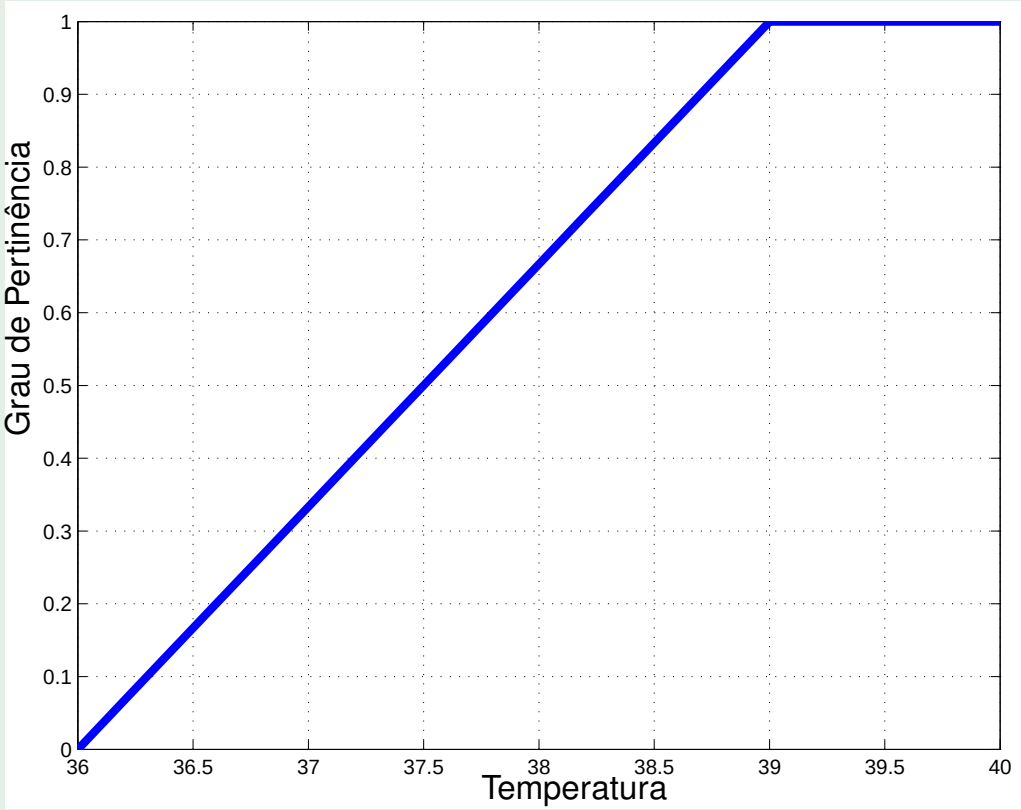
que descreve a associação entre febre alta e a dor de cabeça.



Exemplo 9

A projeção de $\mathcal{R}$ em $U = [36, 40]$ é o conjunto *fuzzy* $proj_U(\mathcal{R}) \in \mathcal{F}(U)$ dado por

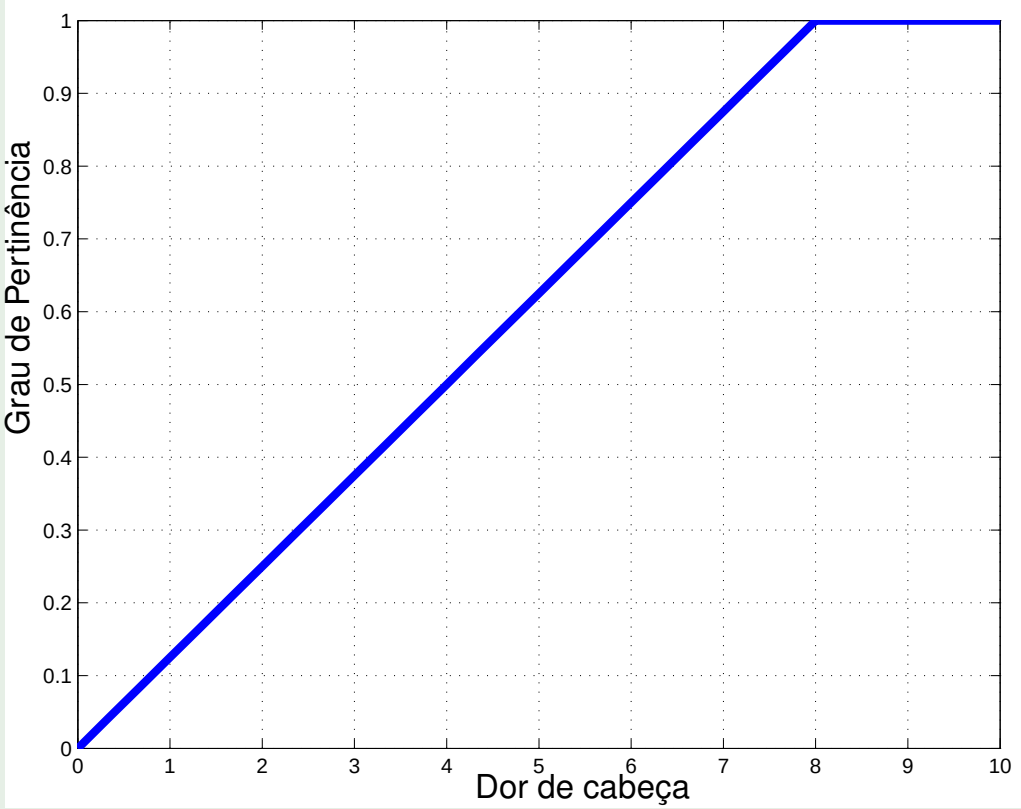
$$proj_U(\mathcal{R}) = \min\left\{1, \frac{(x-36)}{3}\right\} :$$



Exemplo 9

A projeção de $\mathcal{R}$ em $V = [0, 10]$ é o conjunto *fuzzy* $proj_V(\mathcal{R}) \in \mathcal{F}(V)$ dado por

$$proj_V(\mathcal{R}) = \min\left\{1, \frac{y}{8}\right\} :$$



Teorema 10

Seja $\triangle$ uma t-norma e $\mathcal{R} \in \mathcal{F}(U \times V)$ uma relação fuzzy.

- *Dado um conjunto fuzzy $A \in \mathcal{F}(U)$, a composição sup-$\triangle$ $B = A \circ \mathcal{R} \in \mathcal{F}(V)$ satisfaz*

$$B = proj_V\big(cil(A) \cap \mathcal{R}\big).$$

- *Dado um conjunto fuzzy $X \in \mathcal{F}(V)$, a composição sutp-$\triangle$ $Y = \mathcal{R} \circ X \in \mathcal{F}(U)$ satisfaz*

$$Y = proj_U\big(\mathcal{R} \cap cil(X)\big).$$

Aqui, a intersecção é calculada usando $\triangle$.

Demonstração.

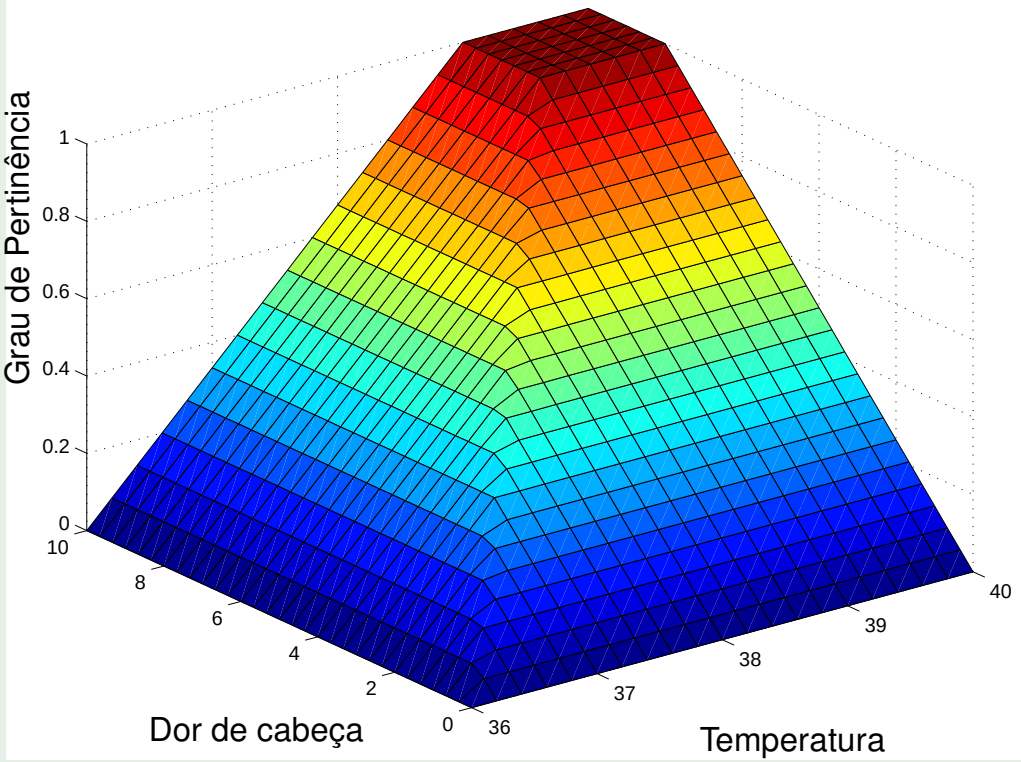
Demonstraremos apenas o primeiro item. Note que

$$\begin{aligned} proj_V\big(cil(A) \cap \mathcal{R}\big)(v) &= \sup_{u \in U} \big[cil(A)(u,v) \triangle \mathcal{R}(u,v)\big] \\ &= \sup_{u \in U} \big[A(u) \triangle \mathcal{R}(u,v)\big] = (A \circ \mathcal{R})(v), \end{aligned}$$

para todo $v \in V$. $\square$

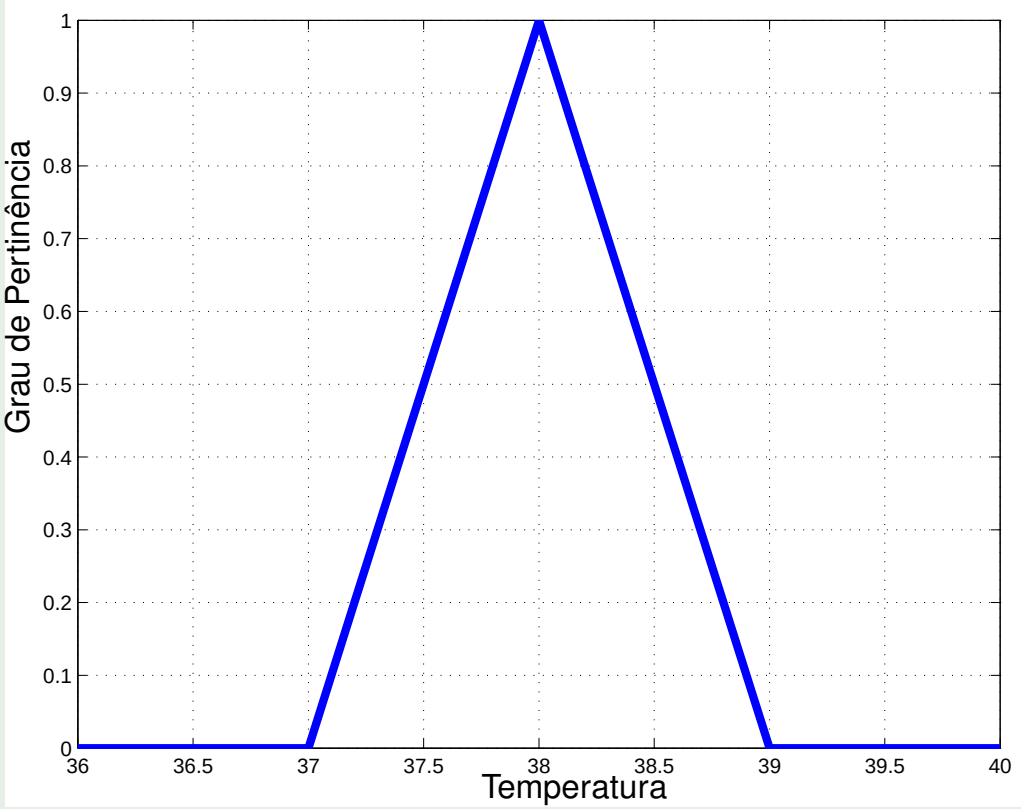
Exemplo 11

Considere a relação $\mathcal{R}$



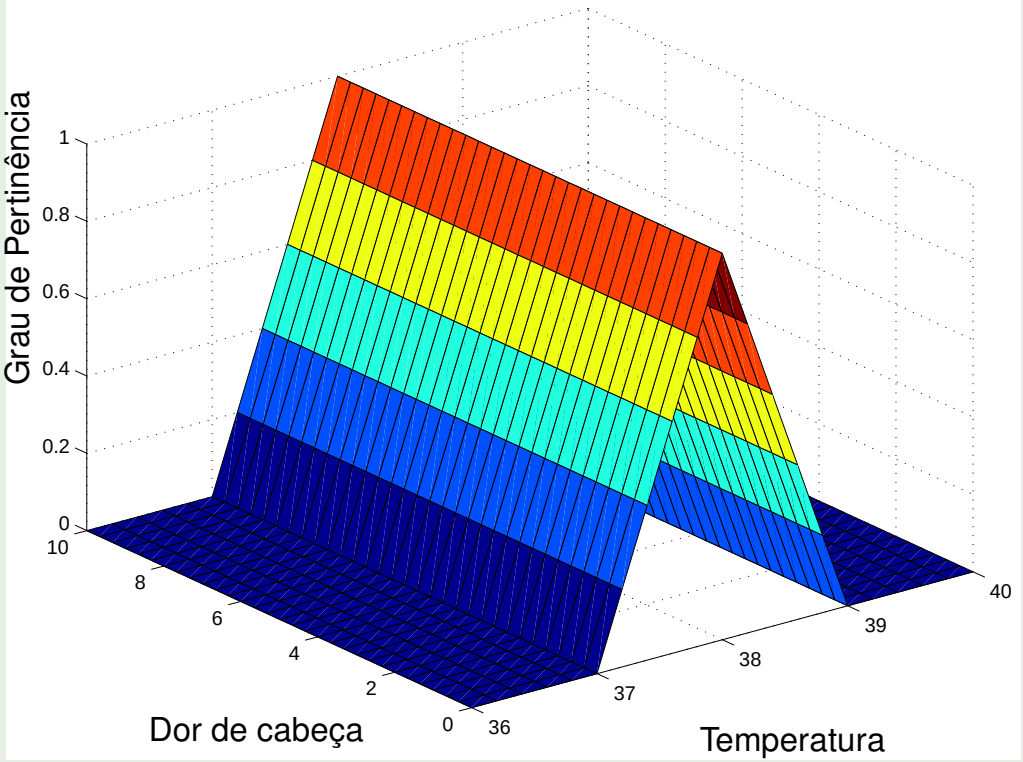
Exemplo 11

E o conjunto *fuzzy A*.



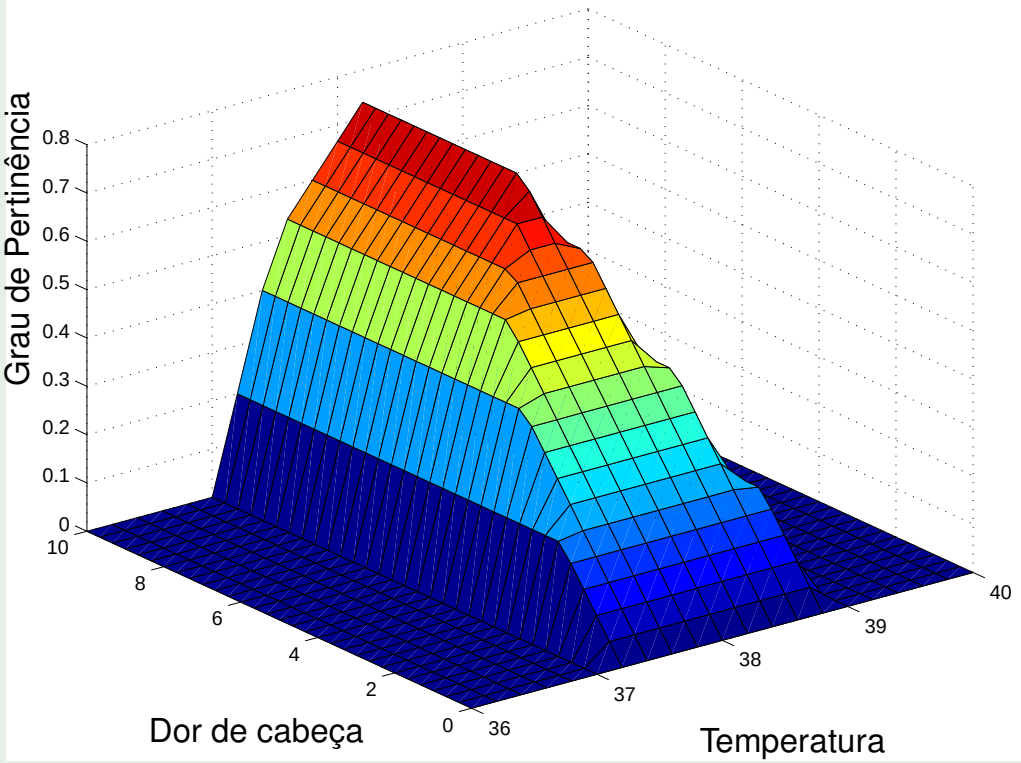
Exemplo 11

A extensão cilíndrica de A é a relação



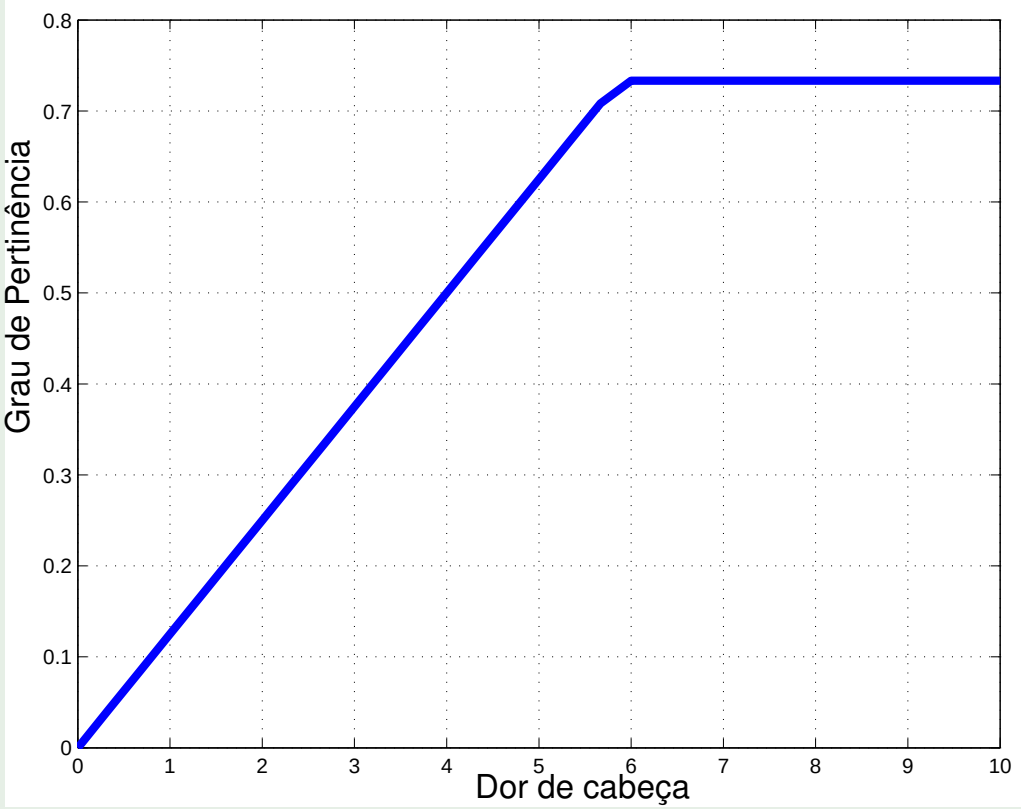
Exemplo 11

A intersecção $cil(A) \cap \mathcal{R}$, calculada usando o mínimo, é



Exemplo 11

A projeção em $V = [0, 10]$ de $cil(A) \cap \mathcal{R}$ é



que é exatamente $A \circ \mathcal{R}$.

Outras composições Relação-Conjunto

De forma semelhante a composição sup-$\triangle$ aplicada em uma relação e um conjunto, tem-se:

Definição 12 (Composição inf-$\triangledown$ Relação-Conjunto)

Seja $\triangledown$ uma t-conorma e $\mathcal{R} \in \mathcal{F}(U \times V)$ uma relação *fuzzy*.

- Dado um conjunto *fuzzy* $A \in \mathcal{F}(U)$, definimos o conjunto *fuzzy* $B = A \bullet \mathcal{R} \in \mathcal{F}(V)$ através da seguinte equação:

$$B(v) = \inf_{u \in U} \left[A(u) \triangledown R(u, v) \right], \quad \forall v \in V.$$

- Dado um conjunto *fuzzy* $X \in \mathcal{F}(V)$, definimos o conjunto *fuzzy* $Y = \mathcal{R} \bullet X \in \mathcal{F}(U)$ através da equação

$$Y(u) = \inf_{v \in U} \left[R(u, v) \triangledown X(v) \right], \quad \forall u \in U.$$

Exemplo 13

Considere universos finitos $U = \{u_1, u_2\}$ e $V = \{v_1, v_2, v_3\}$. Dada a relação *fuzzy* $\mathcal{R} \in \mathcal{F}(U \times V)$ e o conjunto *fuzzy* $A \in \mathcal{F}(U)$, representados por

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.5 & 0.8 \\ 0.1 & 0.4 & 0.9 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{bmatrix} 0.8 & 1.0 \end{bmatrix}$$

determine o conjunto *fuzzy* $A \bullet \mathcal{R}$ obtido considerando a composição min-$\bigtriangledown_L$, em que $\bigtriangledown_L$ denota a t-conorma de Lukasiewicz.

Exemplo 13

Considere universos finitos $U = \{u_1, u_2\}$ e $V = \{v_1, v_2, v_3\}$. Dada a relação *fuzzy* $\mathcal{R} \in \mathcal{F}(U \times V)$ e o conjunto *fuzzy* $A \in \mathcal{F}(U)$, representados por

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.5 & 0.8 \\ 0.1 & 0.4 & 0.9 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{bmatrix} 0.8 & 1.0 \end{bmatrix}$$

determine o conjunto *fuzzy* $A \bullet \mathcal{R}$ obtido considerando a composição min-$\bigtriangledown_L$, em que $\bigtriangledown_L$ denota a t-conorma de Lukasiewicz.

Resposta: O conjunto *fuzzy* $A \bullet \mathcal{R}$ corresponde ao vetor

$$A \bullet \mathcal{R} = \begin{bmatrix} 1.0 & 1.0 & 1.0 \end{bmatrix}.$$

Lembre-se que

$$A \circ \mathcal{R} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.4 & 0.9 \end{bmatrix}.$$

Definição 14 (Composição inf-$\rightarrow$ Relação-Conjunto)

Seja $\rightarrow$ uma implicação *fuzzy* e $\mathcal{R} \in \mathcal{F}(U \times V)$ uma relação *fuzzy*.

- Dado um conjunto *fuzzy* $A \in \mathcal{F}(U)$, definimos o conjunto *fuzzy* $B = A \triangleright \mathcal{R} \in \mathcal{F}(V)$ através da seguinte equação:

$$B(v) = \inf_{u \in U} \big[A(u) \rightarrow R(u, v)\big], \quad \forall v \in V.$$

- Dado um conjunto *fuzzy* $X \in \mathcal{F}(V)$, definimos o conjunto *fuzzy* $Y = \mathcal{R} \triangleright X \in \mathcal{F}(U)$ através da equação

$$Y(u) = \inf_{v \in U} \big[R(u, v) \rightarrow X(v)\big], \quad \forall u \in U.$$

Exemplo 15

Considere universos finitos $U = \{u_1, u_2\}$ e $V = \{v_1, v_2, v_3\}$. Dada a relação *fuzzy* $\mathcal{R} \in \mathcal{F}(U \times V)$ e o conjunto *fuzzy* $A \in \mathcal{F}(U)$, representados por

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.5 & 0.8 \\ 0.1 & 0.4 & 0.9 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{bmatrix} 0.8 & 1.0 \end{bmatrix}$$

determine o conjunto *fuzzy* $A \triangleright \mathcal{R}$ obtido considerando a composição min-$\rightarrow_L$, em que $\rightarrow_L$ denota a implicação *fuzzy* de Lukasiewicz.

Exemplo 15

Considere universos finitos $U = \{u_1, u_2\}$ e $V = \{v_1, v_2, v_3\}$. Dada a relação *fuzzy* $\mathcal{R} \in \mathcal{F}(U \times V)$ e o conjunto *fuzzy* $A \in \mathcal{F}(U)$, representados por

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.5 & 0.8 \\ 0.1 & 0.4 & 0.9 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{bmatrix} 0.8 & 1.0 \end{bmatrix}$$

determine o conjunto *fuzzy* $A \triangleright \mathcal{R}$ obtido considerando a composição min-$\rightarrow_L$, em que $\rightarrow_L$ denota a implicação *fuzzy* de Lukasiewicz.

Resposta: O conjunto *fuzzy* $A \triangleright \mathcal{R}$ corresponde ao vetor

$$A \triangleright \mathcal{R} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.4 & 0.9 \end{bmatrix}.$$

Lembre-se que

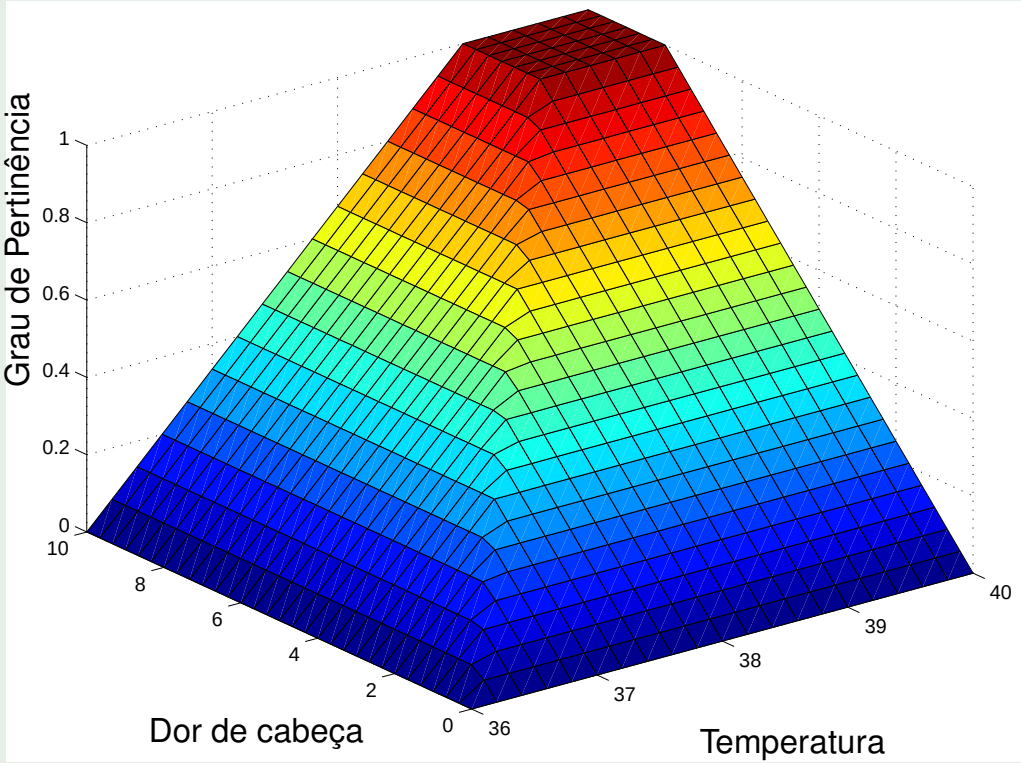
$$A \circ \mathcal{R} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.4 & 0.9 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A \bullet \mathcal{R} = \begin{bmatrix} 1.0 & 1.0 & 1.0 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 16

Considere a relação *fuzzy* $\mathcal{R} \in \mathcal{F}([36, 40] \times [0, 10]$, dada por

$$\mathcal{R}(x, y) = \min\left\{1, \frac{(x-36)}{3}, \frac{y}{8}\right\},$$

que descreve a associação entre febre alta e a dor de cabeça.

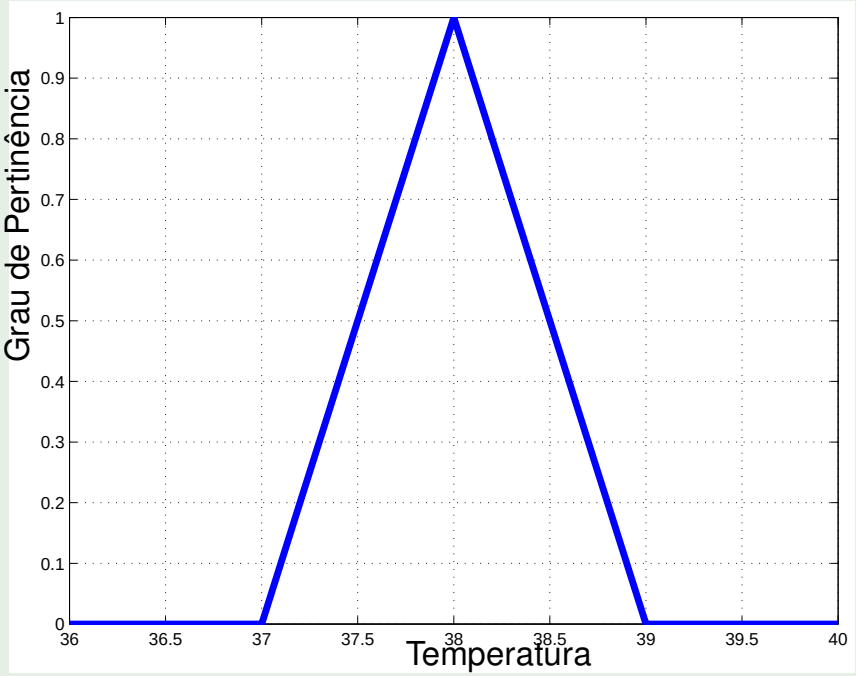


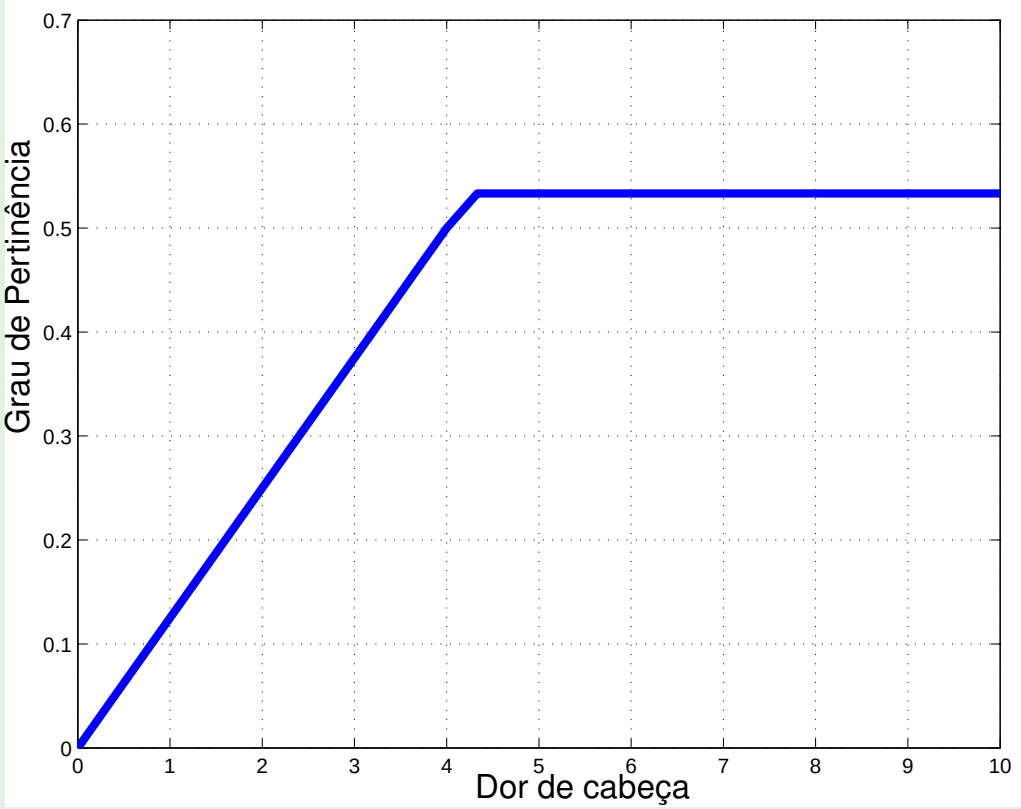
Exemplo 16

Dado o conjunto *fuzzy* $A \in \mathcal{F}([36, 40])$, dado por

$$A(x) = 0 \vee \big((x - 37) \wedge (39 - x)\big),$$

que descreve a temperatura em "torno de $38^o C$".



Exemplo 16

A composição inf-$\rightarrow_M$ $A \triangleright \mathcal{R}$, em que $\rightarrow_M$ denota a implicação de Gödel, fornece o conjunto *fuzzy*.