Aula 11
Equações Relacionais *Fuzzy*.

MS580 - Introdução à Teoria *Fuzzy*

Marcos Eduardo Valle

Departamento de Matemática Aplicada
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Universidade Estadual de Campinas

Na aula anterior, apresentamos algumas operações com relações *fuzzy*.

Em particular, vimos que duas relações podem ser combinadas usando a composição sup-$\triangle$.

Em outras palavras, dadas duas relações $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$, determinamos $\mathcal{Y} = \mathcal{R} \circ \mathcal{S}$.

Na aula de hoje, discutiremos como resolver a equação relacional *fuzzy*

$$\mathcal{R} \circ \mathcal{X} = \mathcal{S},$$

em que $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$ são relações dadas e a incógnita $\mathcal{X}$ é também uma relação *fuzzy*.

Exemplo 1

Considere universos finitos $U = u_1, u_2$, $V = v_1, v_2$ e $W = w_1, w_2$. Dadas as relações $\mathcal{R} \in \mathcal{F}(U \times V)$ e $\mathcal{S} \in \mathcal{F}(u \times W)$, com

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathcal{S} = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.3 \\ 0.3 & 0.3 \end{bmatrix},$$

determine $\mathcal{X} \in \mathcal{F}(V \times W)$ tal que $\mathcal{R} \circ \mathcal{X} = \mathcal{S}$, em que $\circ$ denota a composição max-min.

Exemplo 1

Considere universos finitos $U = u_1, u_2$, $V = v_1, v_2$ e $W = w_1, w_2$. Dadas as relações $\mathcal{R} \in \mathcal{F}(U \times V)$ e $\mathcal{S} \in \mathcal{F}(u \times W)$, com

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathcal{S} = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.3 \\ 0.3 & 0.3 \end{bmatrix},$$

determine $\mathcal{X} \in \mathcal{F}(V \times W)$ tal que $\mathcal{R} \circ \mathcal{X} = \mathcal{S}$, em que $\circ$ denota a composição max-min.

Resposta: Uma solução de $\mathcal{R} \circ \mathcal{X} = \mathcal{S}$ é

$$\mathcal{X} = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.3 \\ 0.3 & 0.3 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 2

Considere universos finitos $U = u_1, u_2$, $V = v_1, v_2$ e $W = w_1, w_2$. Dadas as relações $\mathcal{R} \in \mathcal{F}(U \times V)$ e $\mathcal{S} \in \mathcal{F}(u \times W)$, com

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.3 \\ 0.3 & 0.3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathcal{S} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix},$$

existe $\mathcal{X} \in \mathcal{F}(V \times W)$ tal que $\mathcal{R} \circ \mathcal{X} = \mathcal{S}$, em que $\circ$ denota a composição max-min?

Exemplo 2

Considere universos finitos $U = u_1, u_2$, $V = v_1, v_2$ e $W = w_1, w_2$. Dadas as relações $\mathcal{R} \in \mathcal{F}(U \times V)$ e $\mathcal{S} \in \mathcal{F}(u \times W)$, com

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.3 \\ 0.3 & 0.3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathcal{S} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix},$$

existe $\mathcal{X} \in \mathcal{F}(V \times W)$ tal que $\mathcal{R} \circ \mathcal{X} = \mathcal{S}$, em que $\circ$ denota a composição max-min?

Resposta: Não existe $\mathcal{X}$ tal que $\mathcal{R} \circ \mathcal{X} = \mathcal{S}$ pois

$$\begin{bmatrix} 0.3 & 0.3 \\ 0.3 & 0.3 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1.0 & 1.0 \\ 1.0 & 1.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.3 \\ 0.3 & 0.3 \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}.$$

Logo, para qualquer $\mathcal{X}$ teremos $\mathcal{R} \circ \mathcal{X} < \mathcal{S}$.

Uma equação relacional $\mathcal{R} \circ \mathcal{X} = \mathcal{S}$ pode não ter solução.

Porém, a inequação relacional $\mathcal{R} \circ \mathcal{X} \leq \mathcal{S}$ sempre admite uma solução.

Com efeito, a solução trivial de $\mathcal{R} \circ \mathcal{X} \leq \mathcal{S}$ é $\mathcal{X} = \emptyset$.

Na prática, buscaremos a maior solução da inequação $\mathcal{R} \circ \mathcal{X} \leq \mathcal{S}$.

Formalmente, resolveremos o problema: Dados $\mathcal{R} \in \mathcal{F}(U \times V)$ e $\mathcal{S} \in \mathcal{F}(U \times W)$, determine

$$\mathcal{X}^* = \sup\{\mathcal{X} \in \mathcal{F}(V \times W) : \mathcal{R} \circ \mathcal{X} \leq \mathcal{S}\}.$$

Para tanto, apresentaremos alguns conceitos matemáticos importantes.

Implicação Residual

Definição 3 (Implicação Residual)

Dada uma t-norma $\triangle : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$, o operador $I_\triangle : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ dado por

$$I_\triangle(a,b) = \sup\{z \in [0,1] : a \triangle z \leq b\}, \quad \forall a,b \in [0,1],$$

é chamado **implicação residual** de $\triangle$.

Notação:

A implicação residual $I_\triangle$ também pode ser denodada da seguinte forma: $a \to_\triangle b = I_\triangle(a,b)$, para todo $a,b \in [0,1]$.

Nomenclatura:

A implicação residual é também chamada **R-implicação**.

Exemplo 4

Verifique que $I_{\triangle}$ é uma implicação *fuzzy*.

Exemplo 4

Verifique que $I_\triangle$ é uma implicação *fuzzy*.

Resposta: Primeiro, note que

$$\begin{aligned}
I_\triangle(0,0) &= \sup\{z \in [0,1] : 0 \triangle z \leq 0\} = 1,\\
I_\triangle(0,1) &= \sup\{z \in [0,1] : 0 \triangle z \leq 1\} = 1,\\
I_\triangle(1,1) &= \sup\{z \in [0,1] : 1 \triangle z \leq 1\} = 1,\\
I_\triangle(1,0) &= \sup\{z \in [0,1] : 1 \triangle z \leq 0\} = 0.
\end{aligned}$$

Se $a \leq c$, então $a \triangle z \leq c \triangle z$ para todo $z \in [0,1]$. Além disso, $c \triangle z \leq b$ implica $a \triangle z \leq b$. Portanto, $\{z \in [0,1] : c \triangle z \leq b\} \subseteq \{z \in [0,1] : a \triangle z \leq b\}$. Logo,

$$\begin{aligned}
I_\triangle(c,b) &= \sup\{z \in [0,1] : c \triangle z \leq b\}\\
&\leq \sup\{z \in [0,1] : a \triangle z \leq b\} = I_\triangle(a,b).
\end{aligned}$$

De um modo similar, pode-se mostrar que $I_\triangle(a,b) \leq I_\triangle(a,c)$ sempre que $b \leq c$.

Exemplo 5

Determine a implicação residual de $a \triangle_M b = \min\{a, b\}$.

Exemplo 5

Determine a implicação residual de $a \triangle_M b = \min\{a, b\}$.

Resposta: A implicação residual do mínimo é

$$I_M(a, b) = \begin{cases} 1, & a \leq b \\ b, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

A implicação I_M é chamada **implicação de Gödel**.

Exemplo 6

Determine a implicação residual de $a \triangle_P b = ab$.

Exemplo 6

Determine a implicação residual de $a \triangle_P b = ab$.

Resposta: A implicação residual do produto é

$$I_P(a,b) = \begin{cases} 1, & a \leq b \\ b/a, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

A implicação I_P é chamada **implicação de Goguen**.

Exemplo 7

Determine a implicação residual de $a \triangle_L b = \max\{0, a + b - 1\}$.

Exemplo 7

Determine a implicação residual de $a \triangle_L b = \max\{0, a+b-1\}$.

Resposta: A implicação residual de Lukasiewicz é

$$I_L(a,b) = \min\{1, 1-a+b\}.$$

Exemplo 8

Determine a implicação residual da t-norma drástica

$$a \triangle_D b = \begin{cases} b, & a = 1, \\ a, & b = 1, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Exemplo 8

Determine a implicação residual da t-norma drástica

$$a \triangle_D b = \begin{cases} b, & a = 1, \\ a, & b = 1, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Resposta: A implicação residual da t-norma drástica é a implicação *fuzzy*

$$I_D(a, b) = \begin{cases} b, & a = 1, \\ 1, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Infelizmente essa implicação não tem propriedades interessantes!

Definição 9 (Adjunção)

Considere uma t-norma $\triangle$ e uma implicação *fuzzy* $\rightarrow$. Dizemos que o par $(\triangle, \rightarrow)$ forma uma adjunção se

$$a \triangle x \leq b \quad \Longleftrightarrow \quad x \leq a \rightarrow b,$$

para $a, b, x \in [0, 1]$.

Observação:

Numa adjunção $(\triangle, \rightarrow)$, a implicação *fuzzy* faz o papel da "inversa" da t-norma.

Teorema 10

Se $(\triangle, \rightarrow)$ *forma uma adjunção, então* $\rightarrow$ *é a implicação residual de* $\triangle$*, ou seja,*

$$(a \rightarrow b) = \sup\{z \in [0,1] : a \triangle z \leq b\}, \quad \forall a, b \in [0,1].$$

Demonstração.

Com efeito,

$$\begin{aligned}(a \rightarrow b) &= \sup\{z \in [0,1] : z \leq (a \rightarrow b)\} \\ &= \sup\{z \in [0,1] : a \triangle z \leq b\}.\end{aligned}$$

$\square$

Numa adjunção, temos a implicação residual $\rightarrow_{\triangle}$ de uma $\triangle$.

Porém, nem toda implicação residual $\rightarrow_{\triangle}$ forma uma adjunção com $\triangle$.

Exemplo 11

Mostre que $\triangle_D$ e I_D não formam uma adjunção.

Numa adjunção, temos a implicação residual $\rightarrow_{\triangle}$ de uma $\triangle$.

Porém, nem toda implicação residual $\rightarrow_{\triangle}$ forma uma adjunção com $\triangle$.

Exemplo 11

Mostre que $\triangle_D$ e I_D não formam uma adjunção.

Resposta: Basta tomar $a = 0.5$, $b = 0.3$ e $x = 1$. Nesse caso,

$$I_D(a, b) = I_D(0.5, 0.3) = 1 \geq 1,$$

porém

$$a \triangle_D x = 0.5 \triangle_D 1 = 0.5 \not\leq 0.3.$$

Logo,

$$x \leq I_D(a, b) \not\Rightarrow a \triangle x \leq b.$$

Reticulados Completos Residuado

A estrutura algébrica obtida equipando o intervalo $[0, 1]$ com uma t-norma $\triangle$ e sua R-implicação $\rightarrow_{\triangle}$ é chamada reticulado completo residuado.

Em outras palavras, $\langle [0, 1], \vee, \wedge, \triangle, \rightarrow, 0, 1 \rangle$ é um reticulado completo residuado se o par $(\triangle, \rightarrow)$, em que $\triangle$ é uma t-norma e $\rightarrow$ é uma implicação *fuzzy*, forma uma adjunção.

Exemplo 12

Exemplos de reticulados completos residuados:

- $\langle [0, 1], \vee, \wedge, \triangle_L, \rightarrow_L, 0, 1 \rangle$.
- $\langle [0, 1], \vee, \wedge, \triangle_M, \rightarrow_M, 0, 1 \rangle$.
- $\langle [0, 1], \vee, \wedge, \triangle_P, \rightarrow_P, 0, 1 \rangle$.

Composição Inf-$\rightarrow$

Em analogia à composição sup-$\triangle$ e inf-$\triangledown$, definimos a composição inf-$\rightarrow$ como segue:

Definição 13 (Composição inf-$\rightarrow$)

Dadas relações *fuzzy* $\mathcal{R} \in \mathcal{F}(U \times V)$ e $\mathcal{S} \in \mathcal{F}(V \times W)$, a composição inf-$\rightarrow$ de $\mathcal{R}$ por $\mathcal{S}$, denotada por $\mathcal{R} \triangleright \mathcal{S} \in \mathcal{F}(U \times W)$, é dada por

$$(\mathcal{R} \triangleright \mathcal{S})(u, w) = \inf_{v \in U} \left[\mathcal{R}(u, v) \rightarrow \mathcal{S}(v, w)\right], \quad \forall (u, w) \in U \times W.$$

Equação Relacionais *Fuzzy*

Teorema 14 (Solução de Inequações Relacionais)

Seja $\langle [0,1], \vee, \wedge, \triangle, \rightarrow, 0, 1 \rangle$ *um reticulado completo residuado. Dadas relações fuzzy* $\mathcal{R} \in \mathcal{F}(U \times V)$ *e* $\mathcal{S} \in \mathcal{F}(U \times W)$*, tem-se*

$$\mathcal{R}^T \triangleright \mathcal{S} = \sup\{\mathcal{X} \in \mathcal{F}(V \times W) : \mathcal{R} \circ \mathcal{X} \leq \mathcal{S}\}.$$

Em palavras, $\mathcal{X}^* = \mathcal{R}^{-1} \triangleright \mathcal{S}$ é a maior relação *fuzzy* tal que $\mathcal{R} \circ \mathcal{X} \leq \mathcal{S}$.

Teorema 15

Se a equação relacional $\mathcal{R} \circ X = \mathcal{S}$ *admite solução, então* $\mathcal{X}^* = \mathcal{R}^{-1} \triangleright \mathcal{S}$ *é maior solução, ou seja,* $\mathcal{R} \circ \mathcal{X}^* = \mathcal{S}$ *e* $\mathcal{X} \leq \mathcal{X}^*$ *para qualquer solução* $\mathcal{X}$*.*

Demonstração do Teorema 12.

Note que

$$
\begin{aligned}
& \mathcal{R} \circ \mathcal{X} \leq \mathcal{S} \\
\iff \quad & (\mathcal{R} \circ \mathcal{X})(u, w) \leq \mathcal{S}(u, w), \quad \forall u \in U, \forall w \in W \\
\iff \quad & \sup_{v \in V} \left[\mathcal{R}(u, v) \triangle \mathcal{X}(v, w) \right] \leq \mathcal{S}(u, w), \quad \forall u \in U, \forall w \in W \\
\iff \quad & \mathcal{R}(u, v) \triangle \mathcal{X}(v, w) \leq \mathcal{S}(u, w), \quad \forall u \in U, \forall v \in V, \forall w \in W \\
\iff \quad & \mathcal{X}(v, w) \leq \mathcal{R}(u, v) \to \mathcal{S}(u, w), \quad \forall u \in U, \forall v \in V, \forall w \in W \\
\iff \quad & \mathcal{X}(v, w) \leq \inf_{u \in U} \left[\mathcal{R}(u, v) \to \mathcal{S}(u, w) \right], \quad \forall v \in V, \forall w \in W \\
\iff \quad & \mathcal{X}(v, w) \leq \inf_{u \in U} \left[\mathcal{R}^{-1}(v, u) \to \mathcal{S}(u, w) \right], \quad \forall v \in V, \forall w \in W \\
\iff \quad & \mathcal{X}(v, w) \leq (\mathcal{R}^{-1} \triangleright \mathcal{S})(v, w), \quad \forall v \in V, \forall w \in W \\
\iff \quad & \mathcal{X} \leq \mathcal{R}^{-1} \triangleright \mathcal{S}.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$\mathcal{X}^* = \sup\{\mathcal{X} : \mathcal{R} \circ \mathcal{X} \leq \mathcal{S}\} = \sup\{\mathcal{X} : \mathcal{X} \leq \mathcal{R}^{-1} \triangleright \mathcal{S}\} = \mathcal{R}^{-1} \triangleright \mathcal{S}.$$

$\square$

Exemplo 16

Considere universos finitos $U = u_1, u_2$, $V = v_1, v_2$ e $W = w_1, w_2$. Dadas as relações $\mathcal{R} \in \mathcal{F}(U \times V)$ e $\mathcal{S} \in \mathcal{F}(u \times W)$, com

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.7 \\ 0.5 & 0.3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathcal{S} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.2 \\ 0.4 & 0.5 \end{bmatrix},$$

determine, se existir, $\mathcal{X} \in \mathcal{F}(V \times W)$ tal que $\mathcal{R} \circ \mathcal{X} = \mathcal{S}$, em que $\circ$ denota a composição max-min?

Exemplo 16

Considere universos finitos $U = u_1, u_2$, $V = v_1, v_2$ e $W = w_1, w_2$. Dadas as relações $\mathcal{R} \in \mathcal{F}(U \times V)$ e $\mathcal{S} \in \mathcal{F}(u \times W)$, com

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.7 \\ 0.5 & 0.3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathcal{S} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.2 \\ 0.4 & 0.5 \end{bmatrix},$$

determine, se existir, $\mathcal{X} \in \mathcal{F}(V \times W)$ tal que $\mathcal{R} \circ \mathcal{X} = \mathcal{S}$, em que $\circ$ denota a composição max-min?

Resposta: A composição min-$\rightarrow$ fornece

$$\mathcal{X}^* = \mathcal{R}^{-1} \triangleright \mathcal{S} = \begin{bmatrix} 0.4 & 1.0 \\ 0.6 & 0.2 \end{bmatrix}.$$

Note que

$$\mathcal{R} \circ \mathcal{X}^* = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.2 \\ 0.4 & 0.5 \end{bmatrix} = \mathcal{S}.$$

Logo, $\mathcal{X}^*$ é solução da equação relacional.