Aula 10
Operações com Relações *Fuzzy*.

MS580 - Introdução à Teoria *Fuzzy*

Marcos Eduardo Valle

Departamento de Matemática Aplicada
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Universidade Estadual de Campinas

Na aula anterior, vimos que uma relação *fuzzy* $\mathcal{R}$ de U para V é um subconjunto do produto cartesiano $U \times V$, ou seja, $\mathcal{R} \in \mathcal{F}(U \times V)$.

Sendo um subconjunto *fuzzy*, podemos fazer as operações de intersecção, união e complemento usando os conceitos de conjunção, disjunção e negação *fuzzy*, respectivamente.

Além das operações elementares, veremos dois tipos de composições de relações *fuzzy*.

Intersecção de Relações *Fuzzy*

Definição 1 (Intersecção de Relações *Fuzzy*)

Seja $\mathcal{C} : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ uma conjunção *fuzzy*. A intersecção de duas relações *fuzzy* $\mathcal{R}, \mathcal{S} \in \mathcal{F}(U \times V)$, denotada por $\mathcal{Y} = \mathcal{R} \cap \mathcal{S}$, é a relação *fuzzy* $\mathcal{Y} \in \mathcal{F}(U \times V)$ dada por

$$\mathcal{Y}(u,v) = \mathcal{C}\Big(\mathcal{R}(u,v), \mathcal{S}(u,v)\Big), \quad \forall (u,v) \in U \times V.$$

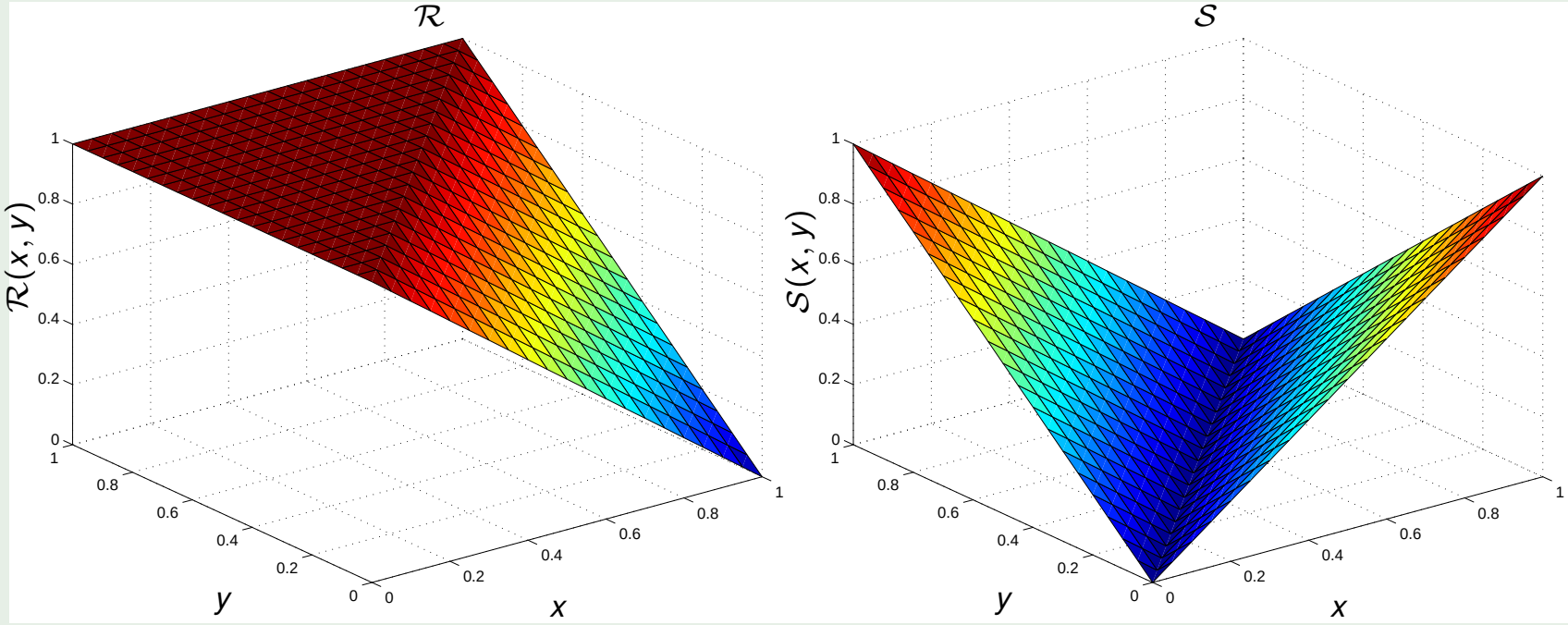
Observação:

- Tal como na intersecção de conjuntos *fuzzy*, a intersecção de relações *fuzzy* é geralmente definida em termos de uma t-norma.
- Se não for mencionada a conjunção *fuzzy* ou a t-norma, considera-se o mínimo.

Exemplo 2

Considere as relações *fuzzy* $\mathcal{R}, \mathcal{S} \in \mathcal{F}([0,1] \times [0,1])$ dadas por

$$\mathcal{R}(x,y) = 1 \wedge (1 + x - y) \quad \text{e} \quad \mathcal{S}(x,y) = |x - y|.$$

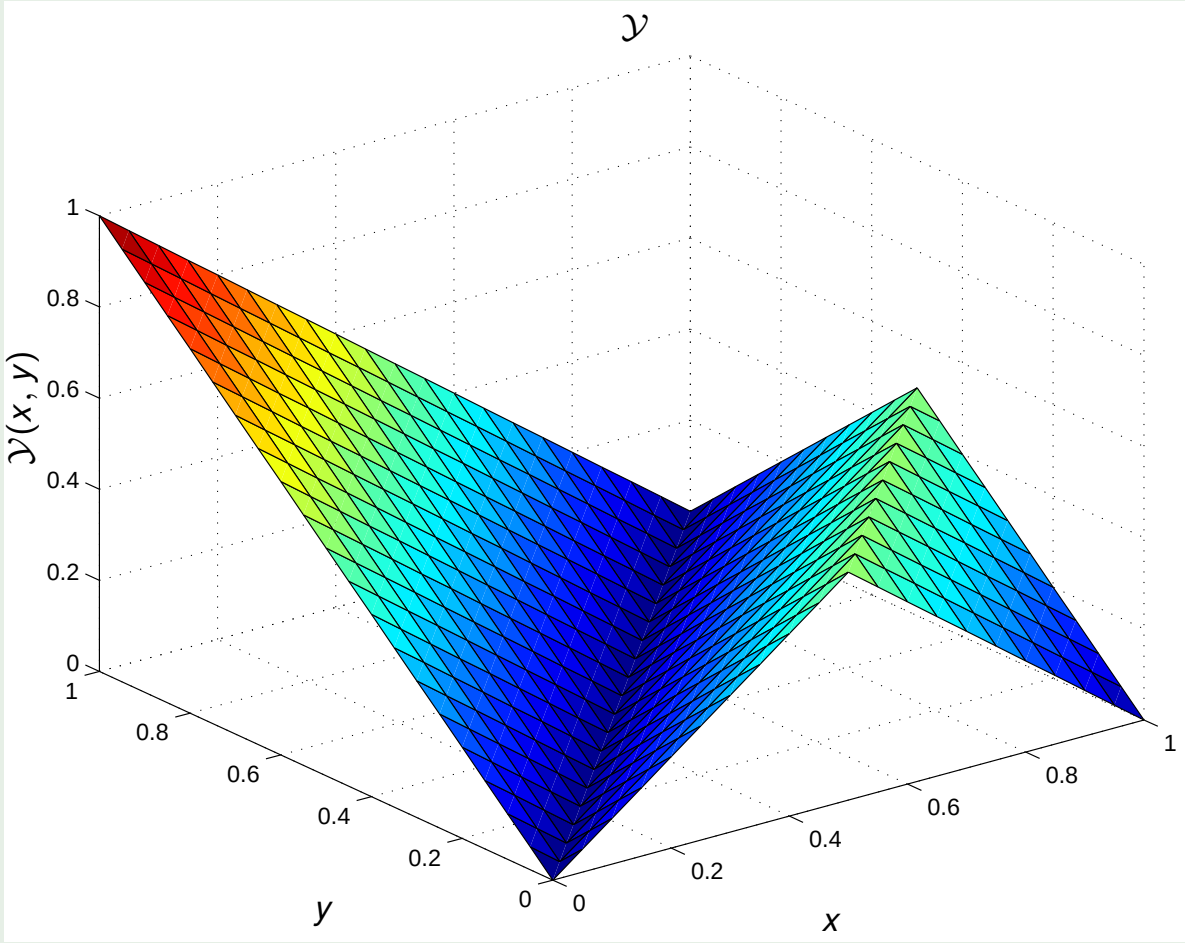


- A relação $\mathcal{R}$ descreve "x é menor ou igual a y".
- A relação $\mathcal{S}$ descreve "x é diferente de y".

Exemplo 2

A intersecção $\mathcal{Y} = \mathcal{R} \cap \mathcal{S}$ é a relação *fuzzy* dada por

$$\mathcal{Y}(x, y) = (1 + x - y) \wedge |x - y|,$$



que descreve "x é menor e diferente de y".

União de Relações *Fuzzy*

Definição 3 (União de Relações *Fuzzy*)

Seja $\mathcal{D} : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ uma disjunção *fuzzy*. A união de duas relações *fuzzy* $\mathcal{R}, \mathcal{S} \in \mathcal{F}(U \times V)$, denotada por $\mathcal{Y} = \mathcal{R} \cup \mathcal{S}$, é a relação *fuzzy* $\mathcal{Y} \in \mathcal{F}(U \times V)$ dada por

$$\mathcal{Y}(u,v) = \mathcal{D}\Big(\mathcal{R}(u,v), \mathcal{S}(u,v)\Big), \quad \forall (u,v) \in U \times V.$$

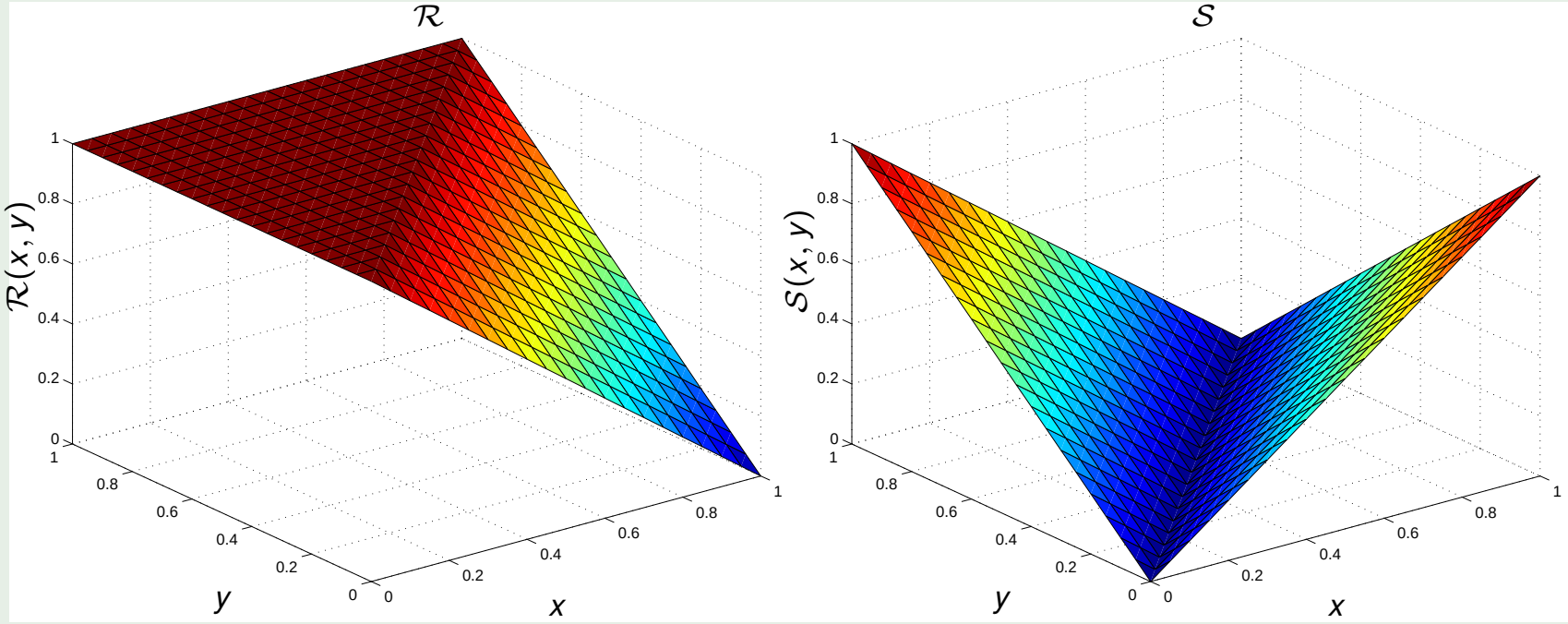
Observação:

- Tal como na união de conjuntos *fuzzy*, a união de relações *fuzzy* é geralmente definida em termos de uma t-conorma.
- Se não for mencionada a disjunção *fuzzy* ou a t-conorma, considera-se o máximo.

Exemplo 4

Considere as relações *fuzzy* $\mathcal{R}, \mathcal{S} \in \mathcal{F}([0,1] \times [0,1])$ dadas por

$$\mathcal{R}(x,y) = 1 \wedge (1 + x - y) \quad \text{e} \quad \mathcal{S}(x,y) = |x - y|.$$

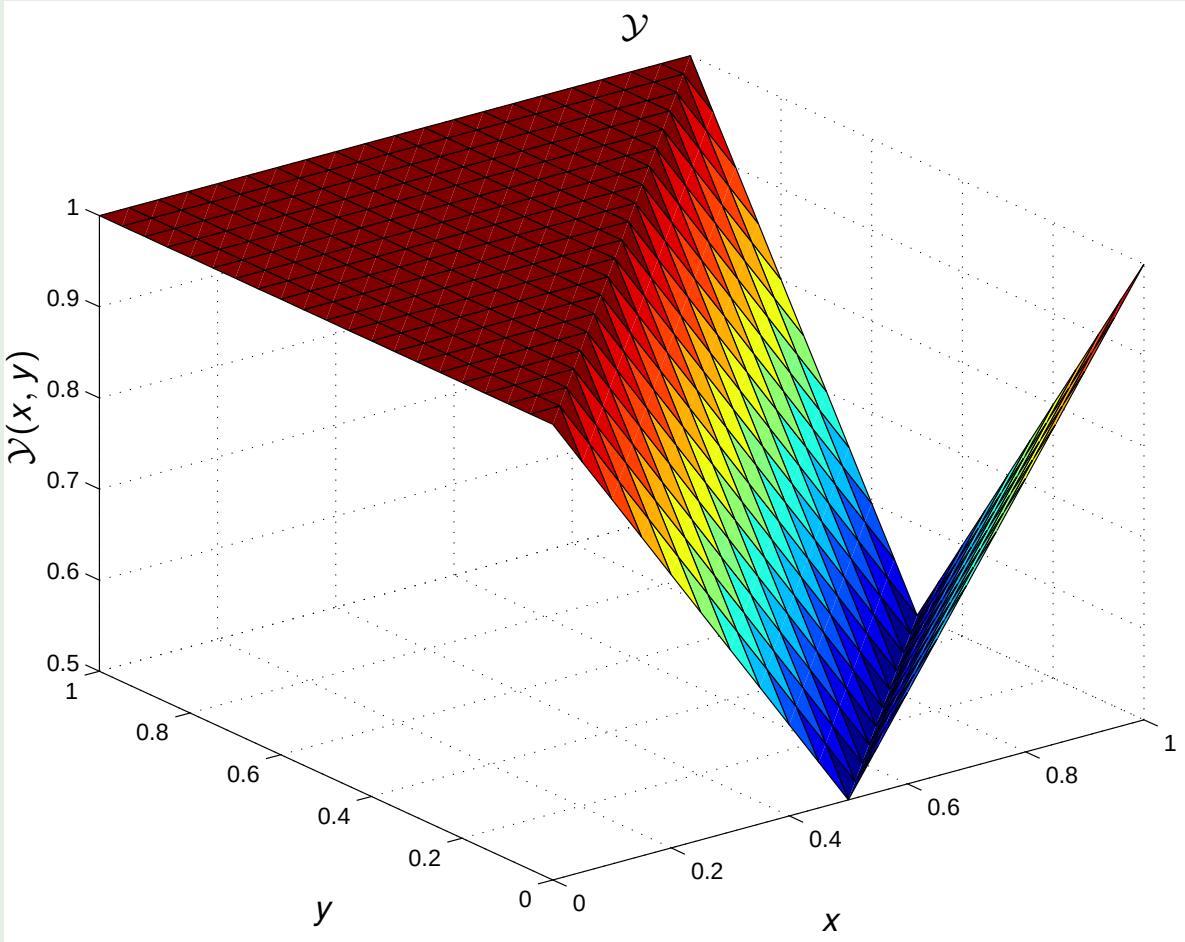


- A relação $\mathcal{R}$ descreve "x é menor ou igual a y".
- A relação $\mathcal{S}$ descreve "x é diferente de y".

Exemplo 4

A união $\mathcal{Y} = \mathcal{R} \cap \mathcal{S}$ é a relação *fuzzy* dada por

$$\mathcal{Y}(x, y) = \Big(1 \wedge (1 + x - y)\Big) \vee |x - y|$$



que descreve “x é menor ou igual ou diferente de y”.

Complemento de Relações *Fuzzy*

Definição 5 (Complemento de Relações *Fuzzy*)

Seja $\eta : [0,1] \to [0,1]$ uma negação *fuzzy*. O complemento de uma relação *fuzzy* $\mathcal{R} \in \mathcal{F}(U \times V)$, denotada por $\mathcal{Y} = \mathcal{R}^c$, é a relação *fuzzy* $\mathcal{Y} \in \mathcal{F}(U \times V)$ dada por

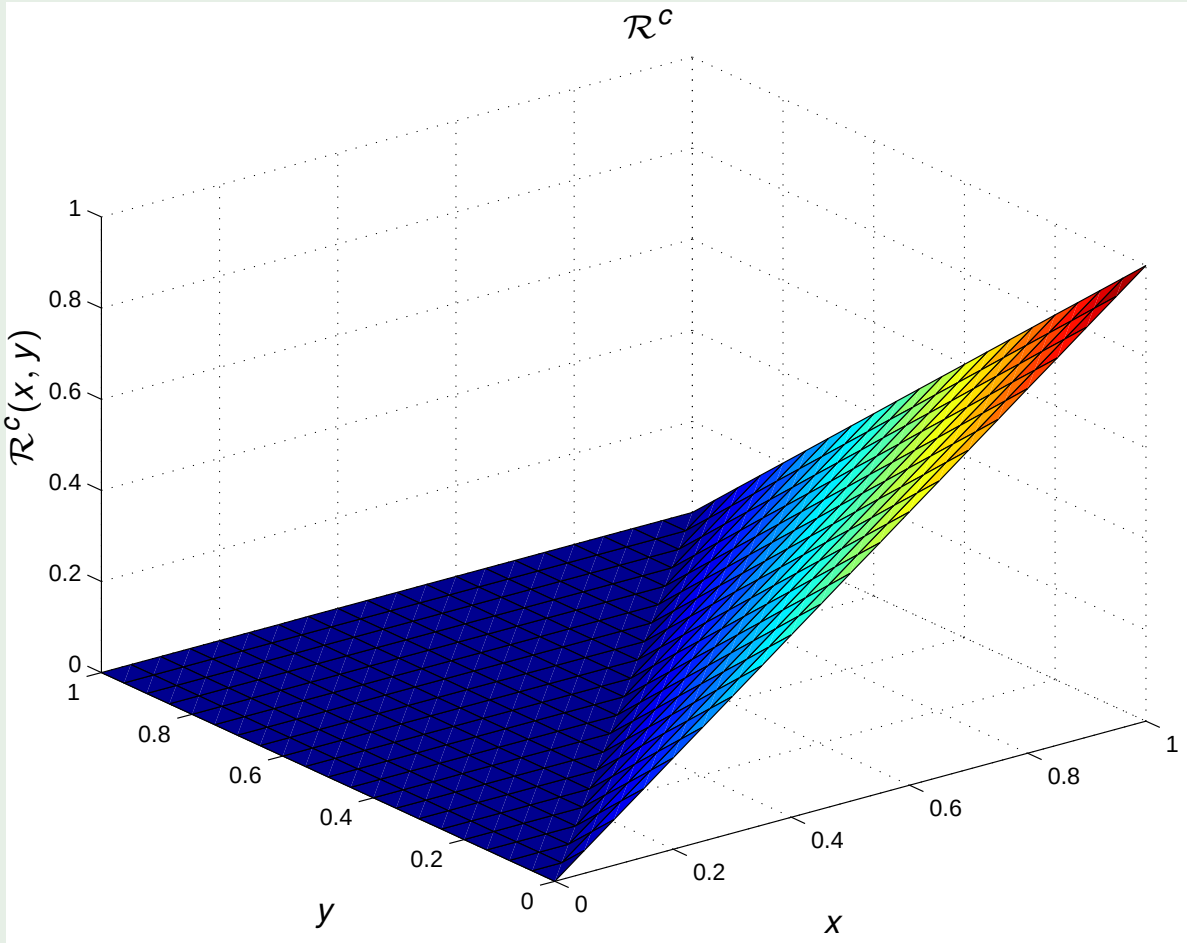
$$\mathcal{Y}(u,v) = \eta\Big(\mathcal{R}(u,v)\Big), \quad \forall (u,v) \in U \times V.$$

Observação:

- Se não for mencionada a negação *fuzzy*, considera-se a negação usual $\eta_S(a) = 1 - a$.

Exemplo 6

A negação da relação *fuzzy* $\mathcal{R} \in \mathcal{F}([0,1] \times [0,1])$ é $\mathcal{R}^c$ dada por $\mathcal{R}^c(x,y) = 1 - \Big(1 \wedge (1 + x - y)\Big) = 0 \vee (y - x)$.



que descreve "x não é menor ou igual à y".

Composição de Relações Clássicas

Considere relações clássicas $\mathcal{R} \subseteq U \times V$ e $\mathcal{S} \subseteq V \times W$.

A composição de $\mathcal{R}$ com $\mathcal{S}$ é a relação $\mathcal{R} \circ \mathcal{S} \subseteq U \times W$ dada por

$$\mathcal{R} \circ \mathcal{S} = \{(u, w) : \exists v \in V, (u, v) \in \mathcal{R}, (v, w) \in \mathcal{S}\}.$$

Em palavras, $(u, w) \in \mathcal{R} \circ \mathcal{S}$ se existe $v \in V$ tal que $(u, v) \in \mathcal{R}$ e $(v, w) \in \mathcal{S}$.

De forma alternativa, u e w estão relacionados (em termos de $\mathcal{R} \circ \mathcal{S}$) se u está relacionado com um v (por meio de $\mathcal{R}$) e esse mesmo v está relacionado com w (por meio de $\mathcal{S}$).

Em termos da função característica, temos

$$\begin{aligned}
\chi_{\mathcal{R}\circ\mathcal{S}}(u,w) = 1 \quad &\iff \quad \exists v \in V : \chi_{\mathcal{R}}(u,v) = 1, \chi_{\mathcal{S}}(v,w) = 1. \\
&\iff \quad \exists v \in V : \chi_{\mathcal{R}}(u,v) \triangle \chi_{\mathcal{S}}(v,w) = 1. \\
&\iff \quad \sup_{v \in V} \chi_{\mathcal{R}}(u,v) \triangle \chi_{\mathcal{S}}(v,w) = 1,
\end{aligned}$$

em que $a \triangle b = 1$ se, e somente se, $a = 1$ e $b = 1$.

Concluindo, podemos escrever

$$\chi_{\mathcal{R}\circ\mathcal{S}}(u,w) = \sup_{v \in V} \chi_{\mathcal{R}}(u,v) \triangle \chi_{\mathcal{S}}(v,w).$$

Substituindo a função característica pela função de pertinência, obtemos a composição sup-$\triangle$ para relações *fuzzy*.

Composição Sup-$\triangle$

Definição 7 (Composição sup-$\triangle$)

Seja $\triangle : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ uma t-norma. A composição sup-$\triangle$ de duas relações *fuzzy* $\mathcal{R} \in \mathcal{F}(U \times V)$ e $\mathcal{S} \in \mathcal{F}(V \times W)$, denotada por $\mathcal{Y} = \mathcal{R} \circ \mathcal{S}$, é a relação *fuzzy* $\mathcal{Y} \in \mathcal{F}(U \times W)$ dada por

$$\mathcal{Y}(u,w) = \sup_{v \in V} \mathcal{R}(u,v) \triangle \mathcal{S}(v,w).$$

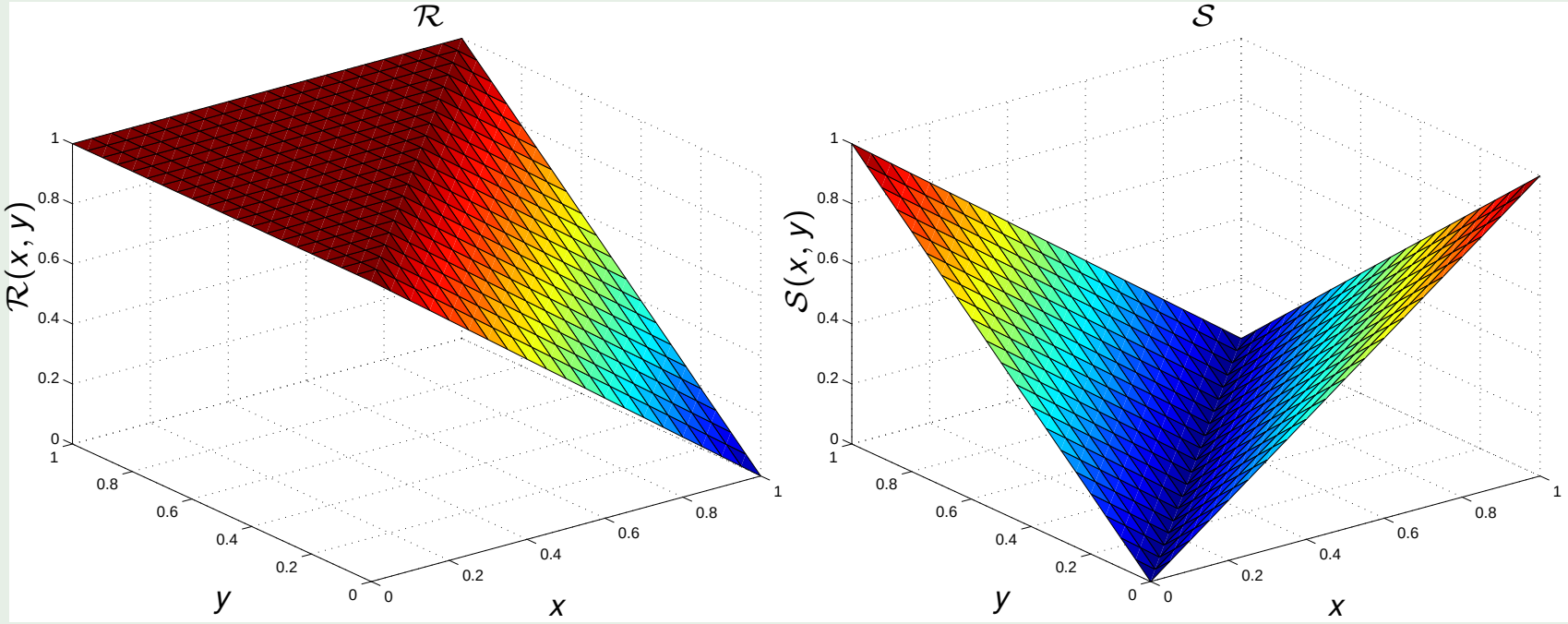
Observação:

- Se não for mencionada a t-norma, considera-se o mínimo.

Exemplo 8

Considere as relações *fuzzy* $\mathcal{R}, \mathcal{S} \in \mathcal{F}([0,1] \times [0,1])$ dadas por

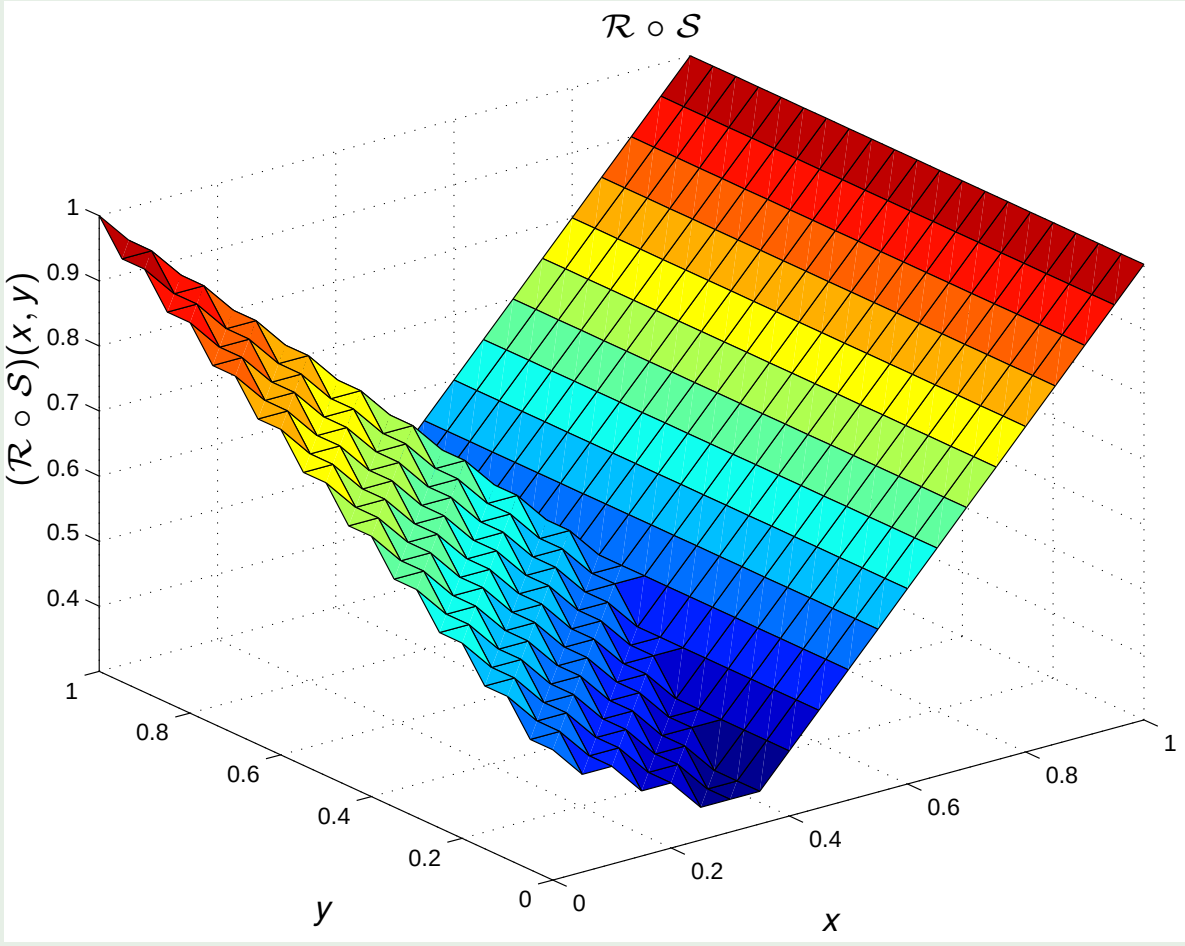
$$\mathcal{R}(x,y) = 1 \wedge (1 + x - y) \quad \text{e} \quad \mathcal{S}(x,y) = |x - y|.$$



- A relação $\mathcal{R}$ descreve "x é menor ou igual a y".
- A relação $\mathcal{S}$ descreve "x é diferente de y".

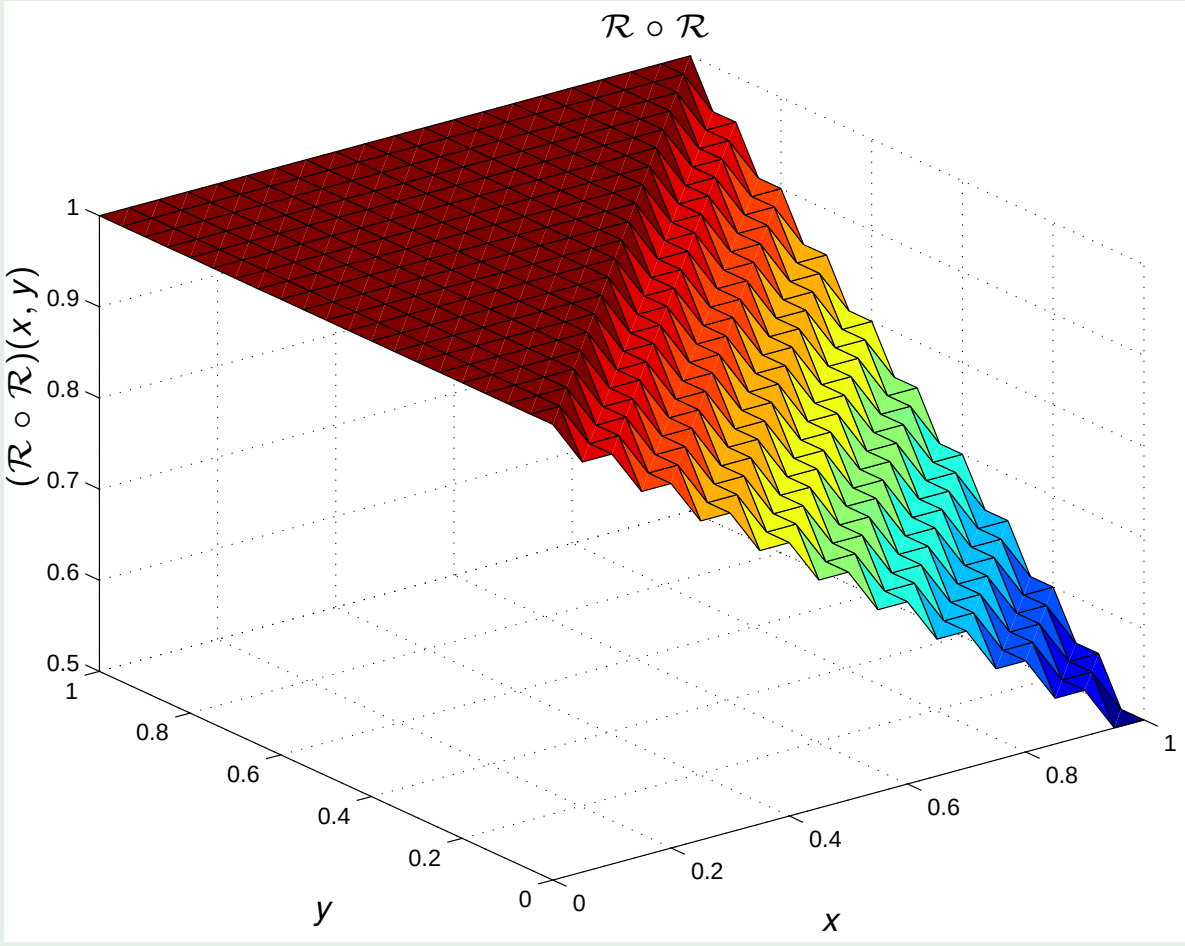
Exemplo 8

A composição sup-min $\mathcal{Y} = \mathcal{R} \circ \mathcal{S}$ é a relação *fuzzy* dada por $\mathcal{Y}(x, y) = \sup_{z \in [0,1]} (1 - x + z) \wedge |z - y|$.



Exemplo 8

Analogamente, a composição $\mathcal{R} \circ \mathcal{R}$ é a relação *fuzzy* dada por $(\mathcal{R} \circ \mathcal{R})(x, y) = \sup_{z \in [0,1]} (1 - x + z) \wedge (1 - z + y)$.



Produto Max-$\triangle$

Se $U = \{u_1, \ldots, u_m\}$, $V = \{v_1, \ldots, v_k\}$ e $W = \{w_1, \ldots, w_n\}$ são conjuntos finitos, as relações $\mathcal{R} \in \mathcal{F}(U \times V)$ e $\mathcal{S} \in \mathcal{F}(V \times W)$ podem ser representadas por uma matrizes.

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \ldots & r_{1k} \\ r_{21} & r_{22} & \ldots & r_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ r_{m1} & r_{m2} & \ldots & r_{mk} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathcal{S} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \ldots & s_{1n} \\ s_{21} & s_{22} & \ldots & s_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ s_{k1} & s_{k2} & \ldots & s_{kn} \end{bmatrix}.$$

Nesse caso, a composição sup-$\triangle$ pode ser vista como um produto matricial, chamado **produto max-$\triangle$**.

Definição 9 (Produto Max-$\triangle$)

Considere matrizes $\mathcal{R} = (r_{ik}) \in [0,1]^{m\times k}$ e $\mathcal{S} = (s_{kj}) \in [0,1]^{k\times n}$. O produto max-$\triangle$ de $\mathcal{R}$ por $\mathcal{S}$, denotado por $\mathcal{R} \circ \mathcal{S} \in [0,1]^{m\times n}$, é dado por

$$(\mathcal{R} \circ \mathcal{S})_{ij} = \max_{l=1:k} \{r_{il} \triangle s_{lj}\} = \bigvee_{l=1}^{n} r_{il} \triangle s_{lj},$$

para todo $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$:

Observação:

No produto matricial usual, temos

$$(\mathcal{RS})_{ij} = \sum_{l=1}^{k} \{r_{il} s_{lj}\}.$$

Portanto, o produto max-$\triangle$ é obtido substituindo a soma pelo máximo e o produto por uma t-norma.

Algoritmo do Produto Max-$\triangle$

Dadas matrizes $\mathcal{R} = (r_{il}) \in [0,1]^{m \times k}$ e $\mathcal{S} = (s_{lj}) \in [0,1]^{k \times n}$, o produto $\mathcal{Y} = \mathcal{R} \circ \mathcal{S} \in [0,1]^{m \times n}$ é determinado como segue:

para $i = 1$ **até** n **faça**
  para $j = 1$ **até** m **faça**
    $y_{ij} = 0$
    para $l = 1$ **até** k **faça**
      $y_{ij} = \max\{y_{ij}, r_{il} \triangle s_{lj}\}$.
    fim
  fim
fim

em que $\triangle$ denota uma t-norma.

Exemplo 10

Determine o produto max-min (max-$\triangle_M$) e max-Lukasiewicz (max-$\triangle_L$) das matrizes

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.7 \\ 0.3 & 0.4 \\ 0.5 & 0.0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathcal{S} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.8 \\ 0.4 & 1.0 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 10

Determine o produto max-min (max-$\triangle_M$) e max-Lukasiewicz (max-$\triangle_L$) das matrizes

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.7 \\ 0.3 & 0.4 \\ 0.5 & 0.0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathcal{S} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.8 \\ 0.4 & 1.0 \end{bmatrix}.$$

Resposta: O produto max-min é

$$\mathcal{R} \circ_M \mathcal{S} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.7 \\ 0.4 & 0.4 \\ 0.2 & 0.5 \end{bmatrix}.$$

O produto max-Lukasiewicz é

$$\mathcal{R} \circ_L \mathcal{S} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.7 \\ 0.0 & 0.4 \\ 0.0 & 0.3 \end{bmatrix}.$$

Composição Inf-$\bigtriangledown$

De um modo análogo a composição sup-$\bigtriangleup$, definimos:

Definição 11 (Composição inf-$\bigtriangledown$)

Seja $\bigtriangledown : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ uma t-conorma. A composição inf-$\bigtriangledown$ de duas relações *fuzzy* $\mathcal{R} \in \mathcal{F}(U \times V)$ e $\mathcal{S} \in \mathcal{F}(V \times W)$, denotada por $\mathcal{Y} = \mathcal{R} \bullet \mathcal{S}$, é a relação *fuzzy* $\mathcal{Y} \in \mathcal{F}(U \times W)$ dada por

$$\mathcal{Y}(u,w) = \inf_{v \in V} \mathcal{R}(u,v) \bigtriangledown \mathcal{S}(v,w).$$

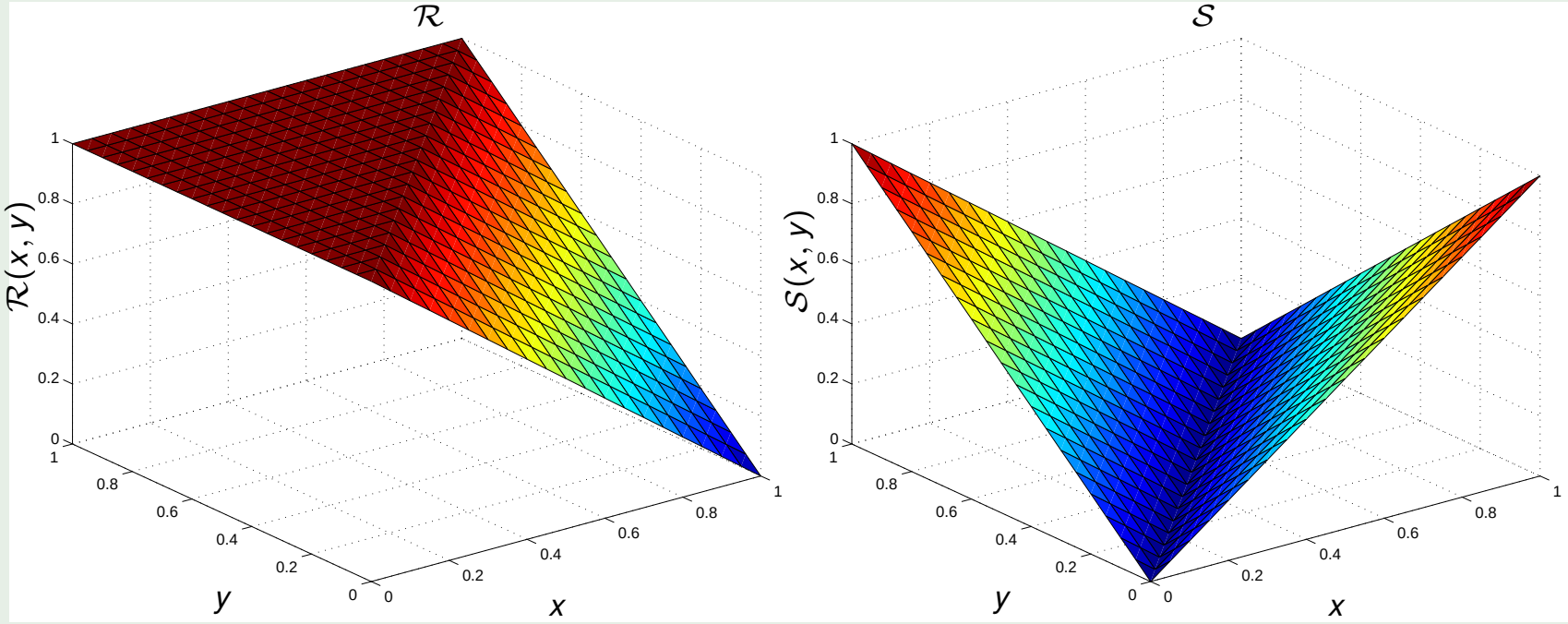
Observação:

- Se não for mencionada a t-conorma, considera-se o máximo.

Exemplo 12

Considere as relações *fuzzy* $\mathcal{R}, \mathcal{S} \in \mathcal{F}([0,1] \times [0,1])$ dadas por

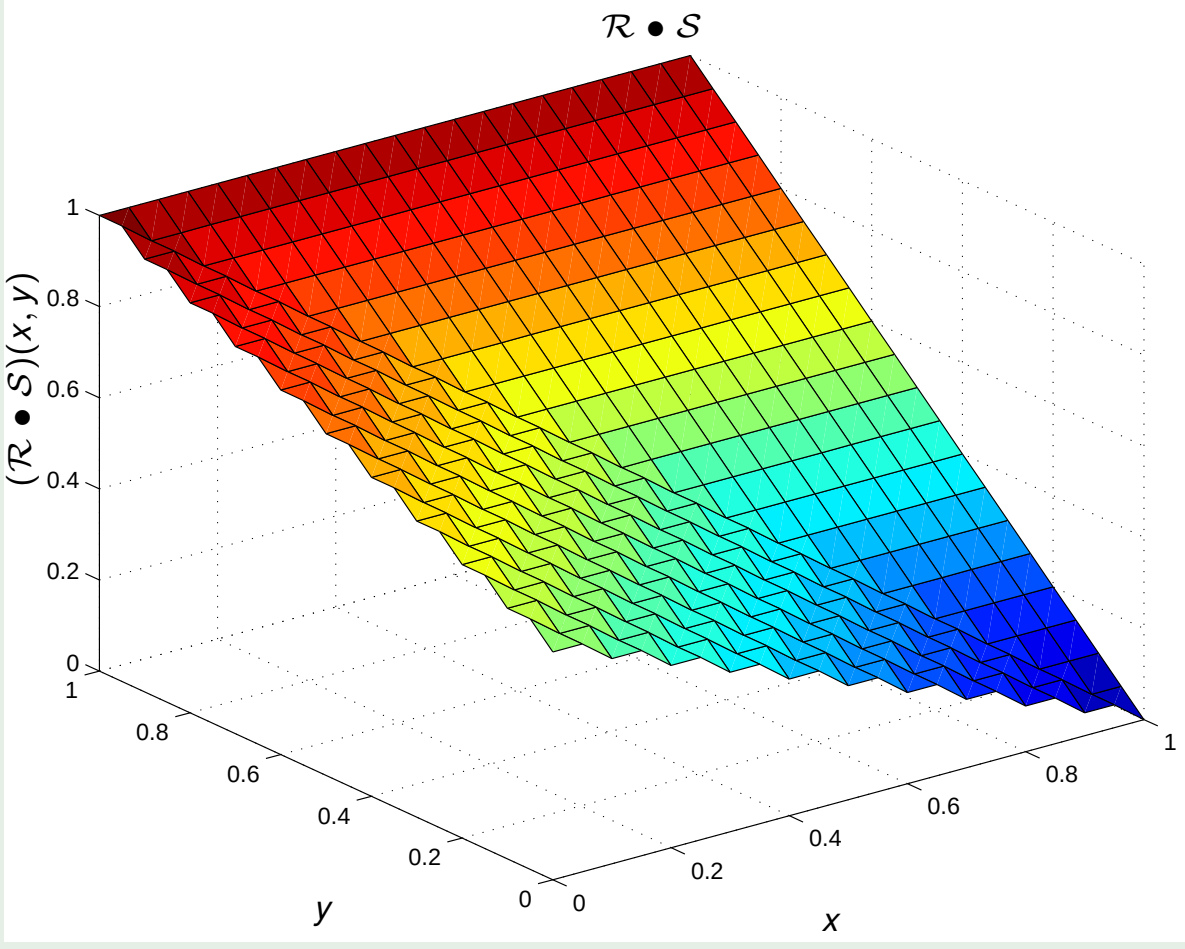
$$\mathcal{R}(x,y) = 1 \wedge (1 + x - y) \quad \text{e} \quad \mathcal{S}(x,y) = |x - y|.$$



- A relação $\mathcal{R}$ descreve "x é menor ou igual a y".
- A relação $\mathcal{S}$ descreve "x é diferente de y".

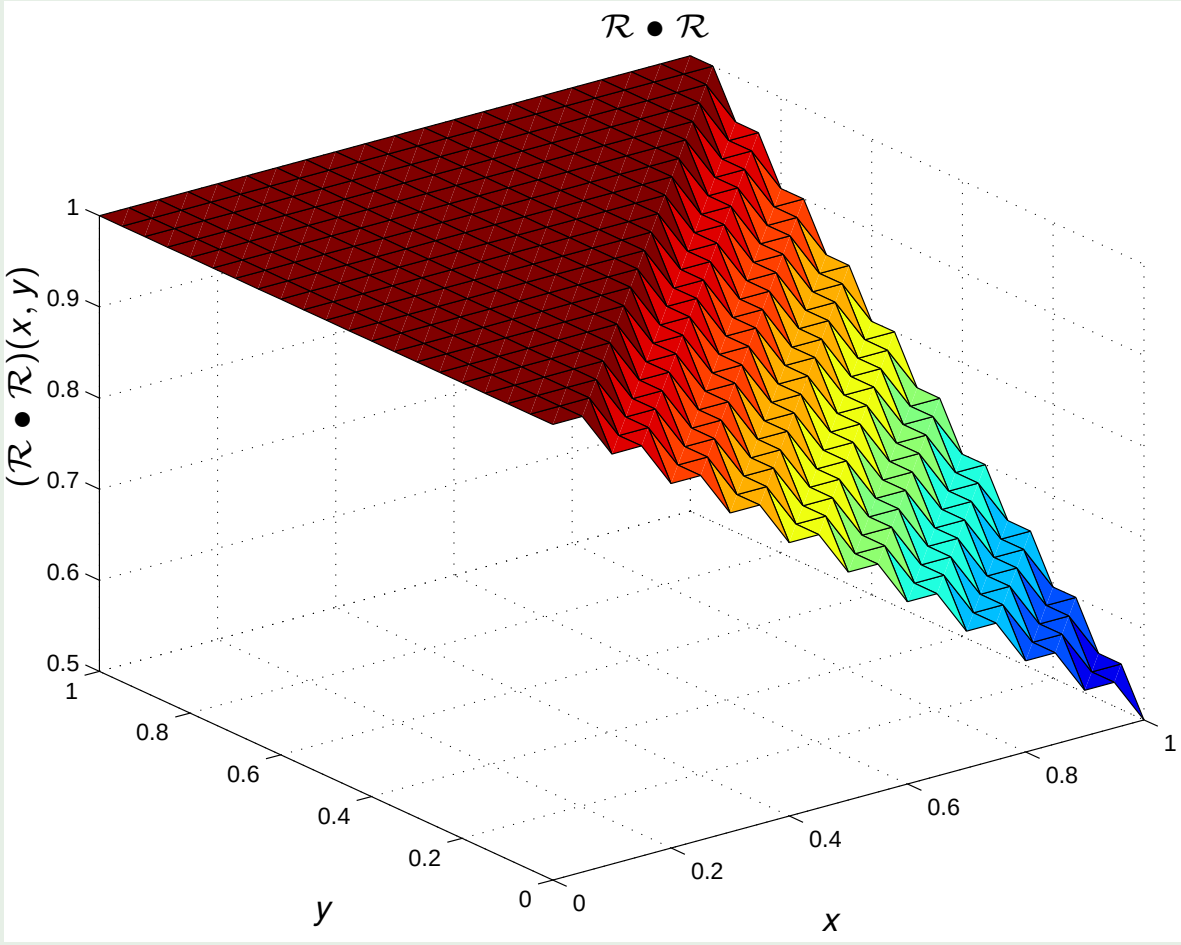
Exemplo 12

A composição inf-max $\mathcal{Y} = \mathcal{R} \bullet \mathcal{S}$ é a relação *fuzzy* dada por $\mathcal{Y}(x, y) = \inf_{z \in [0,1]} (1 + x - z) \vee |z - y|$.



Exemplo 12

Analogamente, a composição $\mathcal{R} \bullet \mathcal{R}$ é a relação *fuzzy* dada por $(\mathcal{R} \bullet \mathcal{R})(x, y) = \sup_{z \in [0,1]} (1 + x - z) \vee (1 + z - y)$.



Definição 13 (Produto Min-$\bigtriangledown$)

Considere matrizes $\mathcal{R} = (r_{ik}) \in [0,1]^{n \times k}$ e $\mathcal{S} = (s_{kj}) \in [0,1]^{k \times n}$. O produto min-$\bigtriangledown$ de $\mathcal{R}$ por $\mathcal{S}$, denotado por $\mathcal{R} \bullet \mathcal{S} \in [0,1]^{m \times n}$, é dado por

$$(\mathcal{R} \bullet \mathcal{S})_{ij} = \min_{l=1:k} \left\{ r_{il} \bigtriangledown s_{kj} \right\} = \bigwedge_{l=1}^{n} r_{il} \bigtriangledown s_{lj},$$

para todo $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$:

Observação:

O produto min-$\bigtriangledown$ é obtido substituindo a soma pelo mínimo e o produto por uma t-conorma.

Algoritmo do Produto Min-$\bigtriangledown$

Dadas matrizes $\mathcal{R} = (r_{il}) \in [0,1]^{m \times k}$ e $\mathcal{S} = (s_{lj}) \in [0,1]^{k \times n}$, o produto $\mathcal{Y} = \mathcal{R} \bullet \mathcal{S} \in [0,1]^{m \times n}$ é determinado como segue:

para $i = 1$ **até** n **faça**
  para $j = 1$ **até** m **faça**
    $y_{ij} = 1$
    para $l = 1$ **até** k **faça**
      $y_{ij} = \min\{y_{ij}, r_{il} \bigtriangledown s_{lj}\}$.
    fim
  fim
fim

em que $\bigtriangledown$ denota uma t-conorma.

Exemplo 14

Determine o produto min-max (min-$\bigtriangledown_M$) e min-Lukasiewicz (min-$\bigtriangledown_L$) das matrizes

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.7 \\ 0.3 & 0.4 \\ 0.5 & 0.0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathcal{S} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.8 \\ 0.4 & 1.0 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 14

Determine o produto min-max (min-$\bigtriangledown_M$) e min-Lukasiewicz (min-$\bigtriangledown_L$) das matrizes

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.7 \\ 0.3 & 0.4 \\ 0.5 & 0.0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathcal{S} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.8 \\ 0.4 & 1.0 \end{bmatrix}.$$

Resposta: O produto min-max é

$$\mathcal{R} \bullet_M \mathcal{S} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.8 \\ 0.3 & 0.8 \\ 0.4 & 0.8 \end{bmatrix}.$$

O produto min-Lukasiewicz é

$$\mathcal{R} \bullet_L \mathcal{S} = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.9 \\ 0.5 & 1.0 \\ 0.4 & 1.0 \end{bmatrix}.$$