UNICAMP IMECC

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
MS211 – Turma D – 2o. Sem. 2015 – EXAME – 10/12/2015

Q1	
Q2	
Q3	
Q4	
$\sum$	

ALUNO	RA

MS211 – Turma D – 2o. Sem. 2015 – EXAME – 10/12/2015

INSTRUÇÕES

NÃO É PERMITIDO DESTACAR AS FOLHAS DA PROVA

RESPOSTAS PURAMENTE NUMÉRICA NÃO SERÃO CONSIDERADAS

SERÃO CONSIDERADAS SOMENTE AS QUESTÕES ESCRITAS DE FORMA CLARA E DEVIDAMENTE JUSTIFICADAS

INFORMAÇÕES ÚTEIS

$y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k)$.

$y_{k+1} = y_k + h(k_1 + k_2)/2$, com $k_1 = f(x_k, y_k)$ e $k_2 = f(x_k + h, y_k + hk_1)$.

$y_{k+1} = y_k + h(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)/6$, com $k_1 = f(x_k, y_k), k_2 = f(x_k + h/2, y_k + hk_1/2)$,
$k_3 = f(x_k + h/2, y_k + hk_2/2)$ e $k_4 = f(x_k + h, y_k + hk_3)$.

$v'(x_k) \approx \dfrac{v(x_k + h) - v(x_k)}{h}$, $v'(x_k) \approx \dfrac{v(x_k) - v(x_k - h)}{h}$ e $v'(x_k) \approx \dfrac{v(x_k + h) - v(x_k - h)}{2h}$.

$v''(x_k) \approx \dfrac{v(x_k + h) - 2v(x_k) + v(x_k - h)}{h^2}$.

$f(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k L_k(x) + \prod_{k=0}^{n}(x - x_k)\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$, com $L_k(x) = \prod_{i \neq k} \dfrac{(x - x_i)}{(x_k - x_i)}$.

$I(f) = \dfrac{h}{2}\left(f(x_0) + 2f(x_1) + \ldots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)\right) - nf''(\xi)\dfrac{h^3}{12}$.

$I(f) = \dfrac{h}{3}\left(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + \ldots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)\right) - nf^{(iv)}(\xi)\dfrac{h^5}{180}$.

$f(x) \approx \sum_{k=0}^{m} \alpha_k g_k(x)$, com $\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{b}$, $a_{ij} = \sum_{k=1}^{m} g_i(x_k)g_j(x_k)$ e $b_i = \sum_{k=1}^{m} y_k g_i(x_k)$.

Questão 1. (4,0 pontos) Considere o sistema não linear

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2 - 37 &= 0, \\ x_1 - x_2^2 - 5 &= 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 - 3 &= 0. \end{cases}$$

(a) (1,5 pontos) Usando o método de Newton para a resolução deste sistema, com a aproximação inicial $\mathbf{x}^{(0)} = [1, -1, 0]^T$, mostre que o cálculo da aproximação $\mathbf{x}^{(1)}$ conduz à resolução do sistema linear

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 37 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

(b) (1,5 pontos) Usando o método de eliminação de Gauss, prove que a solução do item anterior é dada por $s_1 = 23, s_2 = -9$ e $s_3 = -11$.

(c) (0,5 ponto) Usando o resultado do item (b), ache o valor de $\mathbf{x}^{(1)}$ para a primeira iteração do método de Newton.

(d) (0,5 ponto) O método iterativo de Jacobi poderia ser apropriadamente usado para resolver o sistema do item (a)? Justifique sua resposta.

Questão 2. (2,0 pontos) Considere a tabela:

x	0.1	0.3	0.5	0.7	1.2
$y = f(x)$	-1.80	-0.70	-0.19	0.14	0.68

1. (1,5 pontos) Calcule uma aproximação para $f(0.6)$ usando interpolação quadrática.
2. (0,5 ponto) Sendo $|f^{(m)}(x)| \leq 1.5$, para qualquer m inteiro e qualquer $x \in [0.1,\ 1.2]$, calcule um limitante superior para o erro cometido no item anterior.

Questão 3. (2,0 pontos) Deseja-se ajustar a função $\varphi(x) = \exp(\alpha + \beta x)$, através do método de quadrados mínimos, usando a seguinte tabela:

x	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
$f(x)$	2.8	3.3	3.9	4.6	5.4

Dentre os quatro sistemas lineares abaixo, identifique qual deles corresponde ao sistema normal que deve ser resolvido para determinar os coeficientes α e β. Justifique sua escolha.

1. $\begin{bmatrix} 5.0 & 10.0 \\ 10.0 & 22.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20.00 \\ 43.25 \end{bmatrix}$
2. $\begin{bmatrix} 5.0 & 10.0 \\ 10.0 & 22.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.80 \\ 14.42 \end{bmatrix}$
3. $\begin{bmatrix} 5.0 & 3.1 \\ 3.1 & 2.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20.00 \\ 14.19 \end{bmatrix}$
4. $\begin{bmatrix} 5.0 & 3.1 \\ 3.1 & 2.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.80 \\ 14.42 \end{bmatrix}$

Questão 4. (2,0 pontos) Considere o PVI:

$$\begin{cases} y' = x/y + y/x, \\ y(1) = -2. \end{cases}$$

Aplicando um método de Runge-Kutta de segunda ordem e, já conhecendo os valores tabelados abaixo, obtenha uma aproximação para $y(1.6)$.

x_k	1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5
y_k	-2	-2.2517	-2.5068	-2.7650	-3.0261	-3.2897

Boa Prova!