

# Aula 9

# Métodos de Jacobi e Gauss-Seidel.

MS211 - Cálculo Numérico

Marcos Eduardo Valle

Departamento de Matemática Aplicada  
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica  
Universidade Estadual de Campinas

# Introdução

Uma matriz  $\mathbf{A}$  é dita esparsa se possui uma quantidade relativamente pequena de elementos não-nulos.

Matrizes esparsas aparecem em muitas áreas como teoria dos grafos e resolução numérica de equações diferenciais.

Exemplos incluem:

- ▶ O *Google* trabalha com matrizes gigantescas contendo informações dos *links* das páginas na *internet*. Essas matrizes geralmente são esparsas e algumas delas possuem aproximadamente 10 elementos não-nulos por linha ou coluna. A multiplicação dessas matrizes por um vetor requer aproximadamente  $10n$  operações aritméticas, em que  $n$  denota a dimensão do vetor.
- ▶ A cúpula geodésica.

# Cúpula Geodésica

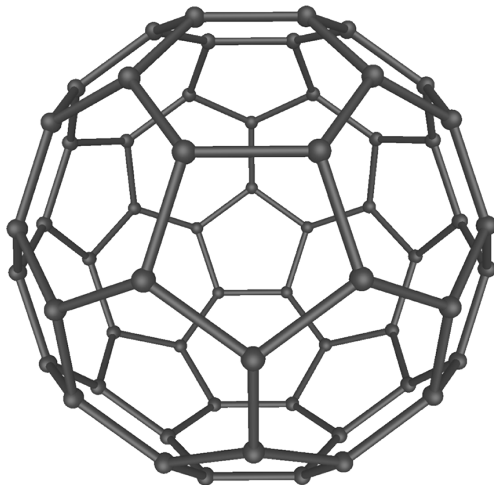
Richard Buckminster (Bucky) Fuller desenvolveu estruturas chamadas **cúpulas ou domos geodésicos**.



("Biosphère Montréal" by Cédric THÉVENET.

[https://en.wikipedia.org/wiki/Buckminster\\_Fuller#/media/File:Biosphère\\_Montréal.jpg](https://en.wikipedia.org/wiki/Buckminster_Fuller#/media/File:Biosphère_Montréal.jpg)

A cúpula geodésica aparece também na molécula de carbono e na bola de futebol.



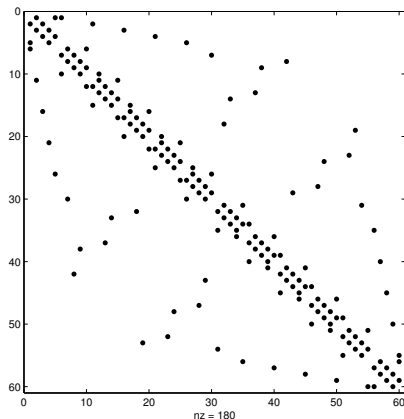
("C60a"uploaded by Bryn C at en.wikipedia.

<https://commons.wikimedia.org/wiki/File:C60a.png#/media/File:C60a.png>)

Esta cúpula corresponde à uma forma de carbono pura com 60 átomos.

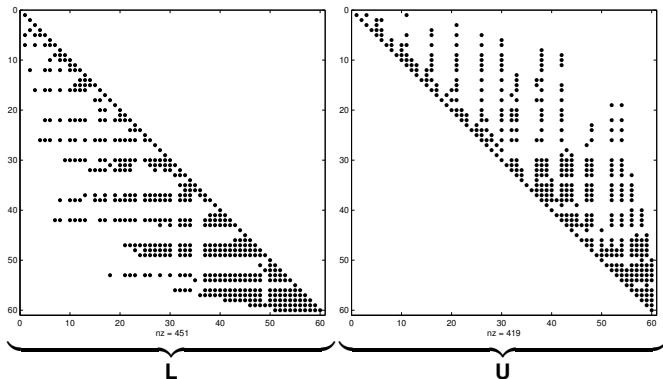
Os pontos na cúpula geodésica estão distribuídos de modo que a distância de um ponto com seus três vizinhos é a mesma.

A matriz de adjacência  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{60 \times 60}$ , mostrada abaixo, é simétrica e possui 3 elementos não-nulos por linha ou coluna, totalizando 180 relevantes.



O produto  $\mathbf{B}\mathbf{x}$  requer  $5 \times 60$  operações aritméticas.

A fatoração LU de **B** fornece os fatores mostrados abaixo:



O número total de elementos não-nulos nos fatores **L** e **U** são 451 e 419, respectivamente.

O número de operações efetuadas para determinar **L** e **U** foi aproximadamente  $1.4 \times 10^5$  (fatoração LU sem adaptações).

Um sistema linear  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ , em que  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é uma matriz não-singular esparsa, pode ser resolvido usando um método iterativo que efetua apenas o produto matriz-vetor  $\mathbf{Ax}$ .

Tais métodos iterativos preservam a estrutura esparsa da matriz e, portanto, efetuam menos operações e consomem menos espaço na memória.

Existem muitos métodos eficientes na literatura que vão além da ementa desse curso.

Na aula de hoje, veremos o método de Jacobi e Gauss-Seidel.





# Método de Jacobi

Dada uma aproximação inicial  $\mathbf{x}^{(0)}$  para a solução do sistema  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ , o método de Jacobi define a sequência de vetores  $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k \geq 0}$  através da seguinte relação de recorrência:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = (b_1 - a_{12}x_2^{(k)} + \dots + a_{1n}x_n^{(k)}) / a_{11}, \\ x_2^{(k+1)} = (b_2 - a_{21}x_1^{(k)} + \dots + a_{2n}x_n^{(k)}) / a_{22}, \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} = (b_n - a_{n1}x_1^{(k)} + \dots + a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k)}) / a_{nn}, \end{cases}$$

para  $k = 0, 1, \dots$

## Observação

Para aplicar o método de Jacobi, devemos ter  $a_{ii} \neq 0$ , para todo  $i = 1, \dots, n$ .

## Forma Matricial do Método de Jacobi

Podemos escrever o método de Jacobi na forma matricial:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{b} - \mathbf{M}\mathbf{x}^{(k)}) \quad k = 0, 1, \dots,$$

em que

$$\mathbf{D} = \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}) = \begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

é a matriz diagonal com os elementos  $a_{ij}$  e

$$\mathbf{M} = \mathbf{A} - \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

# Critério de Parada

## Definição 1 (Norma Infinito)

A norma- $\infty$  de um vetor  $\mathbf{y} = [y_1, y_2, \dots, y_n]^T \in \mathbb{R}^n$  é o maior valor absoluto de suas componentes, ou seja,

$$\|\mathbf{y}\|_\infty = \max_{i=1:n} |y_i|.$$

Além do número máximo de iterações, adotamos a seguinte inequação (erro relativo) como critério de parada do método de Jacobi:

$$\frac{\|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}\|_\infty}{\|\mathbf{x}^{(k+1)}\|_\infty} \leq \tau,$$

em que  $\tau > 0$  é uma certa tolerância.

# Método de Jacobi

**Entrada:** Matriz  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ; vetor  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ ; chute inicial  $\mathbf{x}_0$ .

**Dados:** Número máximo de interações  $k_{max}$  e tolerância  $\tau > 0$ .

*Inicialize:*  $k = 0$  e  $Er = \tau + 1$ .

*Defina:*  $\mathbf{D} = \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$  e  $\mathbf{M} = \mathbf{A} - \mathbf{D}$ .

**enquanto**  $k \leq k_{max}$  e  $Er > \tau$  **faça**

    Atualize:  $k = k + 1$ .

    Resolva:  $\mathbf{D}\mathbf{x} = \mathbf{b} - \mathbf{M}\mathbf{x}_0$                       (ou seja,  $\mathbf{x} = \mathbf{D} \setminus (\mathbf{b} - \mathbf{M}\mathbf{x}_0)$ ).

    Calcule:  $Er = \frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_\infty}{\|\mathbf{x}\|_\infty}$ .

    Atualize:  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}$ .

**fim**

**Saída:** Aproximação para a solução  $\mathbf{x}_0$ .

## Exemplo 2

Use o método de Jacobi, com aproximação inicial  $\mathbf{x}_0 = [0, 0]^T$  e  $\tau = 10^{-4}$  como critério de parada, para determinar a solução do sistema linear

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 1, \\ 3x_1 + 4x_2 = -1. \end{cases}$$

Na primeira iteração, encontramos

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = \frac{1}{2}(1 - x_2^{(0)}) = \frac{1}{2} \\ x_2^{(1)} = \frac{1}{4}(-1 - x_1^{(0)}) = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

com

$$\frac{\|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}\|_\infty}{\|\mathbf{x}^{(1)}\|_\infty} = \frac{1/2}{1/2} = 1.$$

## Exemplo 2

Use o método de Jacobi, com aproximação inicial  $\mathbf{x}_0 = [0, 0]^T$  e  $\tau = 10^{-4}$  como critério de parada, para determinar a solução do sistema linear

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 1, \\ 3x_1 + 4x_2 = -1. \end{cases}$$

Na segunda iteração, encontramos

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = \frac{1}{2}(1 - x_2^{(1)}) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{4}\right) = \frac{5}{8} \\ x_2^{(2)} = \frac{1}{4}(-1 - x_1^{(1)}) = \frac{1}{4} \left(-1 - \frac{1}{2}\right) = -\frac{5}{8} \end{cases}$$

com

$$\frac{\|\mathbf{x}^{(2)} - \mathbf{x}^{(1)}\|_\infty}{\|\mathbf{x}^{(2)}\|_\infty} = \frac{3/8}{5/8} = \frac{3}{5}.$$

## Exemplo 2

Use o método de Jacobi, com aproximação inicial  $\mathbf{x}_0 = [0, 0]^T$  e  $\tau = 10^{-4}$  como critério de parada, para determinar a solução do sistema linear

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 1, \\ 3x_1 + 4x_2 = -1. \end{cases}$$

Na terceira iteração, encontramos

$$\begin{cases} x_1^{(3)} = \frac{1}{2}(1 - x_2^{(2)}) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{5}{8}\right) = \frac{13}{16} \\ x_2^{(3)} = \frac{1}{4}(-1 - x_1^{(2)}) = \frac{1}{4} \left(-1 - \frac{5}{8}\right) = -\frac{23}{32} \end{cases}$$

com

$$\frac{\|\mathbf{x}^{(3)} - \mathbf{x}^{(2)}\|_\infty}{\|\mathbf{x}^{(3)}\|_\infty} = \frac{3/16}{23/16} = \frac{3}{23}.$$

## Exemplo 2

Use o método de Jacobi, com aproximação inicial  $\mathbf{x}_0 = [0, 0]^T$  e  $\tau = 10^{-4}$  como critério de parada, para determinar a solução do sistema linear

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 1, \\ 3x_1 + 4x_2 = -1. \end{cases}$$

Na iteração 19, encontramos

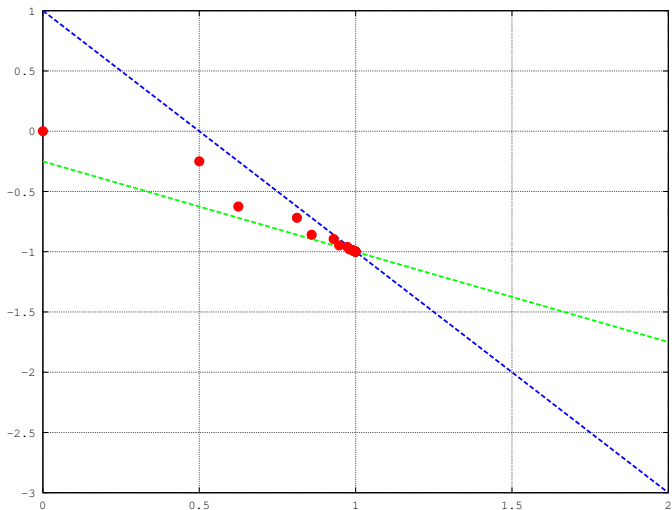
$$\begin{cases} x_1^{(19)} = \frac{1}{2}(1 - x_2^{(18)}) = 0.9999 \\ x_2^{(19)} = \frac{1}{4}(-1 - x_1^{(18)}) = -0.9999 \end{cases}$$

com

$$\frac{\|\mathbf{x}^{(19)} - \mathbf{x}^{(18)}\|_\infty}{\|\mathbf{x}^{(19)}\|_\infty} = 7.3 \times 10^{-5}.$$



## Resumindo, encontramos sequência de pontos vermelhos



em que as linhas azul e verde correspondem as duas equações.

## Motivação para o Método de Gauss-Seidel

Considere um sistema linear  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ , em que  $\mathbf{A}$  é uma matriz não-singular (supostamente esparsa) com  $a_{ii} \neq 0, \forall i = 1, \dots, n$ .

No método de Jacobi, dado  $\mathbf{x}^{(0)}$ , definimos

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = (b_1 - a_{12}x_2^{(k)} + \dots + a_{1n}x_n^{(k)}) / a_{11}, \\ x_2^{(k+1)} = (b_2 - a_{21}x_1^{(k)} + \dots + a_{2n}x_n^{(k)}) / a_{22}, \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} = (b_n - a_{n1}x_1^{(k)} + \dots + a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k)}) / a_{nn}, \end{cases}$$

para  $k = 0, 1, \dots$

Note que  $x_j^{(k+1)}$  usa os valores antigos  $x_i^{(k)}$ ,  $i < j$ , que já foram calculados!

No método de Gauss-Seidel, utilizam-se os valores atualizados  $x_i^{(k+1)}$ ,  $i < j$ , no cálculo de  $x_j^{(k+1)}$ .

## Método de Gauss-Seidel

Dada uma aproximação inicial  $\mathbf{x}^{(0)}$  para a solução do sistema  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ , o método de Gauss-Seidel define  $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k \geq 0}$  através da seguinte relação de recorrência:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = (b_1 - a_{12}x_2^{(k)} + \dots + a_{1n}x_n^{(k)}) / a_{11}, \\ x_2^{(k+1)} = (b_2 - a_{21}x_1^{(k+1)} + \dots + a_{2n}x_n^{(k)}) / a_{22}, \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} = (b_n - a_{n1}x_1^{(k+1)} + \dots + a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k+1)}) / a_{nn}, \end{cases}$$

para  $k = 0, 1, \dots$

Tal como no método de Jacobi, o erro relativo

$$\frac{\|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}\|_\infty}{\|\mathbf{x}^{(k+1)}\|_\infty} \leq \tau,$$

é usado como critério de parada com tolerância  $\tau > 0$ .

# Forma Matricial do Método de Gauss-Seidel

Podemos escrever o método de Gauss-Seidel na forma matricial:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{L}^{-1}(\mathbf{b} - \mathbf{U}\mathbf{x}^{(k)}) \quad k = 0, 1, \dots,$$

em que

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

é uma matriz triangular inferior e

$$\mathbf{U} = \mathbf{A} - \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix},$$

é triangular superior.

# Método de Gauss-Seidel

**Entrada:** Matriz  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ; vetor  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ ; chute inicial  $\mathbf{x}_0$ .

**Dados:** Número máximo de interações  $k_{max}$  e tolerância  $\tau > 0$ .

*Inicialize:*  $k = 0$  e  $Er = \tau + 1$ .

*Defina:*  $\mathbf{L} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$  e  $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$ .

**enquanto**  $k \leq k_{max}$  e  $Er > \tau$  **faça**

    Atualize:  $k = k + 1$ .

    Resolva:  $\mathbf{L}\mathbf{x} = \mathbf{b} - \mathbf{U}\mathbf{x}_0$  (ou seja,  $\mathbf{x} = \mathbf{L} \setminus (\mathbf{b} - \mathbf{U}\mathbf{x}_0)$ ).

    Calcule:  $Er = \frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_\infty}{\|\mathbf{x}\|_\infty}$ .

    Atualize:  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}$ .

**fim**

**Saída:** Aproximação para a solução  $\mathbf{x}_0$ .

### Exemplo 3

Use o método de Gauss-Seidel, com aproximação inicial  $\mathbf{x}_0 = [0, 0]^T$  e  $\tau = 10^{-4}$  como critério de parada, para determinar a solução do sistema linear

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 1, \\ 3x_1 + 4x_2 = -1. \end{cases}$$

Na primeira iteração, encontramos

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = \frac{1}{2}(1 - x_2^{(0)}) = \frac{1}{2}, \\ x_2^{(1)} = \frac{1}{4}(-1 - x_1^{(1)}) = \frac{1}{4}(-1 - \frac{1}{2}) = -\frac{5}{8}, \end{cases}$$

com

$$\frac{\|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}\|_\infty}{\|\mathbf{x}^{(1)}\|_\infty} = \frac{5/8}{5/8} = 1.$$

### Exemplo 3

Use o método de Gauss-Seidel, com aproximação inicial  $\mathbf{x}_0 = [0, 0]^T$  e  $\tau = 10^{-4}$  como critério de parada, para determinar a solução do sistema linear

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 1, \\ 3x_1 + 4x_2 = -1. \end{cases}$$

Na segunda iteração, encontramos

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = \frac{1}{2}(1 - x_2^{(1)}) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{5}{8}\right) = \frac{13}{16}, \\ x_2^{(2)} = \frac{1}{4}(-1 - x_1^{(2)}) = \frac{1}{4} \left(-1 - \frac{13}{16}\right) = -\frac{55}{64}, \end{cases}$$

com

$$\frac{\|\mathbf{x}^{(2)} - \mathbf{x}^{(1)}\|_\infty}{\|\mathbf{x}^{(2)}\|_\infty} = \frac{5/16}{55/64} = \frac{4}{11}.$$

### Exemplo 3

Use o método de Gauss-Seidel, com aproximação inicial  $\mathbf{x}_0 = [0, 0]^T$  e  $\tau = 10^{-4}$  como critério de parada, para determinar a solução do sistema linear

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 1, \\ 3x_1 + 4x_2 = -1. \end{cases}$$

Na terceira iteração, encontramos

$$\begin{cases} x_1^{(3)} = \frac{1}{2}(1 - x_2^{(2)}) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{55}{64}\right) = \frac{119}{128}, \\ x_2^{(3)} = \frac{1}{4}(-1 - x_1^{(3)}) = \frac{1}{4} \left(-1 - \frac{119}{128}\right) = -\frac{485}{512}, \end{cases}$$

com

$$\frac{\|\mathbf{x}^{(3)} - \mathbf{x}^{(2)}\|_\infty}{\|\mathbf{x}^{(3)}\|_\infty} = \frac{12}{91}.$$



### Exemplo 3

Use o método de Gauss-Seidel, com aproximação inicial  $\mathbf{x}_0 = [0, 0]^T$  e  $\tau = 10^{-4}$  como critério de parada, para determinar a solução do sistema linear

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 1, \\ 3x_1 + 4x_2 = -1. \end{cases}$$

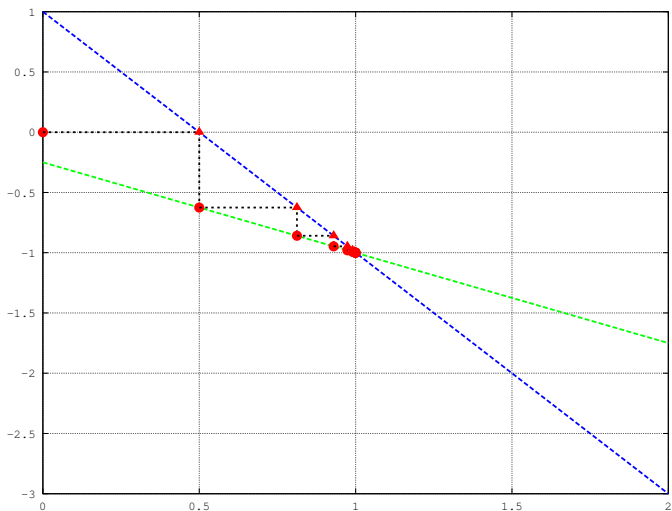
Na iteração 11, encontramos

$$\begin{cases} x_1^{(11)} = \frac{1}{2}(1 - x_2^{(10)}) = 0.9999 \\ x_2^{(11)} = \frac{1}{4}(-1 - x_1^{(11)}) = -0.9999 \end{cases}$$

com

$$\frac{\|\mathbf{x}^{(11)} - \mathbf{x}^{(10)}\|_\infty}{\|\mathbf{x}^{(11)}\|_\infty} = 4.6 \times 10^{-5}.$$

## Resumindo, encontramos sequência de pontos vermelhos



em que as linhas azul e verde correspondem as duas equações.

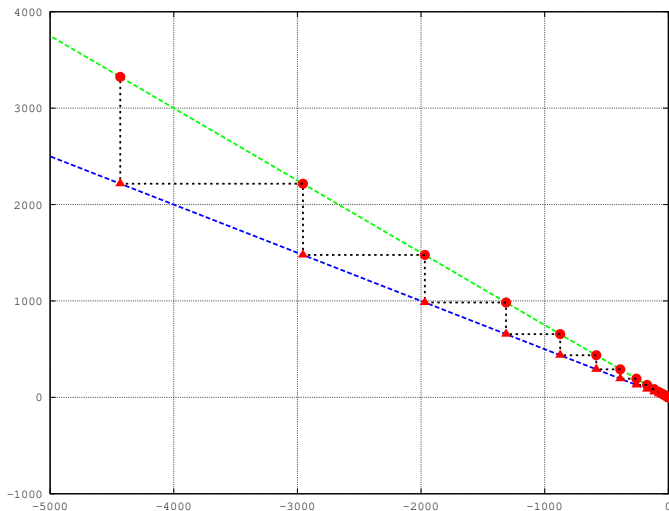
Os métodos de Jacobi e Gauss-Seidel não convergem sempre para a solução do sistema  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ .

### Exemplo 4

Ambos os métodos divergem quando aplicados para resolver o sistema linear  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  quando

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Em particular, encontramos encontramos sequência de pontos vermelhos



após 20 iterações do método de Gauss-Seidel com  $\mathbf{x}^{(0)} = [0, 0]^T$ .

# Convergência dos Métodos de Jacobi e Gauss-Seidel

Os métodos de Jacobi e Gauss-Seidel são métodos do ponto fixo, ou seja, construímos uma aplicação  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que

$$\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \iff \mathbf{Ax} = \mathbf{b}.$$

No método de Jacobi, temos:

$$\varphi_J(\mathbf{x}) = \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{b} - \mathbf{Mx}) = \underbrace{-\mathbf{DM}}_{\mathbf{C}}\mathbf{x} + \underbrace{\mathbf{D}^{-1}\mathbf{b}}_{\mathbf{g}}.$$

No método de Gauss-Seidel, temos:

$$\varphi_{GS}(\mathbf{x}) = \mathbf{L}^{-1}(\mathbf{b} - \mathbf{Ux}) = \underbrace{-\mathbf{LU}}_{\mathbf{C}}\mathbf{x} + \underbrace{\mathbf{L}^{-1}\mathbf{b}}_{\mathbf{g}}.$$

Em ambos os métodos, a função  $\varphi$  é dada pela equação

$$\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{Cx} + \mathbf{g},$$

em que  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $\mathbf{g} \in \mathbb{R}^n$ .

Semelhante ao método do ponto fixo para zeros de função, dada uma aproximação inicial  $\mathbf{x}^{(0)}$ , define-se:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \varphi(\mathbf{x}^{(k)}), \quad \forall k = 0, 1, \dots$$

Sobretudo, podemos garantir a convergência dos métodos de Jacobi e Gauss-Seidel investigando a matriz Jacobiana (derivada) de  $\varphi$ .

A matriz Jacobiana de  $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{g}$  é

$$\mathbf{J}_\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{C}, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,$$

que não depende de  $\mathbf{x}$ !

Nesse caso, o método do ponto fixo converge se e somente se todos os auto-valores de  $\mathbf{J}_\varphi$  possuem valor absoluto menor que 1!

# Critério das Linhas

Calcular os auto-valores não é uma tarefa fácil, mas para os métodos de Jacobi e Gauss-Seidel, uma condição suficiente para a convergência:

## Teorema 4 (Critério das Linhas)

*Considere o sistema linear  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ . Se a matriz  $\mathbf{A}$  é diagonalmente dominante, ou seja,*

$$\alpha_j = \frac{1}{a_{jj}} \left( \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \right) < 1, \quad \forall i = 1, \dots, n,$$

*então ambos os métodos de Jacobi e Gauss-Seidel geram uma sequência que converge para a solução do sistema, independentemente da aproximação inicial  $\mathbf{x}^{(0)}$ .*

# Critério de Sassenfeld

Para o método de Gauss-Seidel somente, tem-se também a seguinte condição suficiente para a convergência:

## Teorema 5 (Critério de Sassenfeld)

Considere o sistema linear  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ . Se

$$\beta_i = \frac{1}{|a_{ii}|} \left( \sum_{j < i} |a_{ij}| \beta_j + \sum_{j > i} |a_{ij}| \right) < 1, \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

então o método de Gauss-Seidel gera uma sequência  $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$  que converge para a solução do sistema, independentemente da aproximação inicial  $\mathbf{x}^{(0)}$ .



# Considerações Finais

Os métodos iterativos, que geralmente não modificam significativamente a estrutura da matriz  $\mathbf{A}$ , possuem papel importante principalmente quando  $\mathbf{A}$  é esparsa.

---

O método de Gauss-Seidel, evidentemente, é superior ao método de Jacobi!

---

O método de Jacobi pode ser interessante se implementado usando computação paralela!