Aula 7
Pivoteamento Parcial na Eliminação de Gauss e Fatoração LU.

MS211 - Cálculo Numérico

Marcos Eduardo Valle

Departamento de Matemática Aplicada
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Universidade Estadual de Campinas

Na aula anterior, apresentamos a Elininação de Gauss e a Fatoração LU.

No método da eliminação de Gauss, operações elementares são usadas para transformar um sistema linear $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ num sistema equivalente $\mathbf{Ux} = \mathbf{c}$, em que $\mathbf{U}$ é uma matriz triangular superior.

Equivalentemente, organizando os multiplicadores usados na eliminação de Gauss, obtemos uma matriz $\mathbf{L}$ triangular inferior com diagonal unitária tal que $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$, chamada **fatoração LU** de $\mathbf{A}$.

Tanto a eliminação de Gauss como a fatoração LU requerem $\mathcal{O}(n^3)$ operações, em que n é a dimensão do sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

Na aula de hoje, veremos problemas da eliminação de Gauss/fatoração LU e apresentaremos o pivoteamento parcial como alternativa.

Falha na Eliminação de Gauss/Fatoração LU

No método da eliminação de Gauss/fatoração LU, inicialmente escrevemos $\mathbf{A}^{(0)} = \mathbf{A}$ e $\mathbf{b}^{(0)} = \mathbf{b}$.

No j-ésimo, definimos

$$m_{ij} = \frac{a_{ij}^{(j-1)}}{a_{jj}^{(j-1)}}, \quad b_i^{(j)} = b_i^{(j-1)} - m_{ij} b_j^{(j-1)} \quad \text{e} \quad \mathbf{a}_i^{(j)} = \mathbf{a}_i^{(j-1)} - m_{ij} \mathbf{a}_j^{(j-1)},$$

para $i = j+1, \ldots, n$.

Observe que o multiplicador m_{ij}, que será um elemento da matriz **L** da fatoração LU, requer uma divisão por a_{jj}^{j-1}, chamado **pivô**.

Consequentemente, o método irá falhar se em algum estágio o pivô é nulo, ou seja, $a_{jj}^{(j-1)} = 0$!

Exemplo 1

Considere o sistema linear $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, em que $\mathbf{A}$ e $\mathbf{b}$ são

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

A (única) solução do sistema é $\mathbf{x}^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Porém, não é possível determina-la usando o método da eliminação de Gauss. De fato, no primeiro estágio deveríamos calcular

$$m_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}},$$

mas o denominador é zero!

No exemplo acima, o método da eliminação de Gauss falha.

O ponto positivo é que temos então um diagnóstico claro do problema: uma divisão por zero!

Um problema muito mais delicado surge no exemplo abaixo!

Exemplo 2

Use o método da eliminação de Gauss para resolver o sistema linear $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, em que $\mathbf{A}$ e $\mathbf{b}$ são

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 10^{-20} & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

no sistema de ponto flutuante $\mathbb{F} = (10, 10, 300, 300)$ com arredondamento. Podemos pensar que a_{11} deveria ser zero mas, devido a erros de arredondamento, temos $a_{11} = 10^{-20}$.

Um problema muito mais delicado surge no exemplo abaixo!

Exemplo 2

Use o método da eliminação de Gauss para resolver o sistema linear $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, em que $\mathbf{A}$ e $\mathbf{b}$ são

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 10^{-20} & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

no sistema de ponto flutuante $\mathbb{F} = (10, 10, 300, 300)$ com arredondamento. Podemos pensar que a_{11} deveria ser zero mas, devido a erros de arredondamento, temos $a_{11} = 10^{-20}$.

Resposta: Devido a aritmética de ponto flutuante, o método da eliminação de Gauss fornece $\tilde{\mathbf{x}}^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. A solução exata é $\mathbf{x}^* = \begin{bmatrix} 1 + \frac{1}{10^{20}-1} \\ 1 - \frac{1}{10^{20}-1} \end{bmatrix}$ que seria representa por $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ no sistema de flutuante $\mathbb{F}$. Uma situação como essa pode ser evitada usando pivoteamento parcial.

Pivoteamento Parcial

No método da eliminação de Gauss, o pivô no j-ésimo estágio é $a_{jj}^{(j-1)}$.

Pivoteamento parcial

Na estratégia de pivoteamento parcial, antes de iniciar o j-ésimo estágio, permutam-se linhas da matriz $\mathbf{A}^{(j-1)}$ de modo a obter

$$|a_{jj}^{(j-1)}| \geq |a_{ij}^{(j-1)}|, \quad \forall i = j, \ldots, n.$$

Em palavras, o pivô é escolhido como sendo um dos elementos de maior valor absoluto dentre

$$a_{jj}^{(j-1)}, a_{j+1,j}^{(j-1)}, \ldots, a_{nj}^{(j-1)}.$$

Eliminação de Gauss com Pivoteamento Parcial

Entrada: Matriz não-singular $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e vetor coluna $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$.

para $j = 1 : n - 1$ **faça**

- Determine k tal que $|a_{kj}| = \max_{i=j:n} |a_{ij}|$. (índice do pivô)
- $\mathbf{temp}_1 = \mathbf{a}_j$ e $temp_2 = b_j$.
- $\mathbf{a}_j = \mathbf{a}_k$ e $b_j = b_k$. (Permute as linhas j e k)
- $\mathbf{a}_k = \mathbf{temp}_1$ e $b_k = temp_2$.

  para $i = j + 1 : n$ **faça**

  - $m_{ij} = \dfrac{a_{ij}}{a_{jj}}$.
  - $\mathbf{a}_i = \mathbf{a}_i - m_{ij}\mathbf{a}_j$.
  - $b_i = b_i - m_{ij} b_j$.

  fim

fim

Saída: Matriz triangular superior $\mathbf{A}$ e $\mathbf{b}$.

Exemplo 3

Use o método da eliminação de Gauss com pivoteamento parcial para determinar a solução do sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, em que

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Exemplo 3

Use o método da eliminação de Gauss com pivoteamento parcial para determinar a solução do sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, em que

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Resposta: Permutamos a primeira com a terceira linha:

$$\bar{\mathbf{A}}^{(0)} = \begin{bmatrix} 8 & 7 & 9 & 5 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \bar{\mathbf{b}}^{(0)} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Exemplo 3

Use o método da eliminação de Gauss com pivoteamento parcial para determinar a solução do sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, em que

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Introduzir zeros abaixo do pivô:

$$m_{21} = 1/2, \quad m_{31} = 1/4 \quad \text{e} \quad m_{41} = 3/4.$$

$$\mathbf{A}^{(1)} = \begin{bmatrix} 8 & 7 & 9 & 5 \\ 0 & -1/2 & -3/2 & -3/2 \\ 0 & -3/4 & -5/4 & -5/4 \\ 0 & 7/4 & 9/4 & 17/4 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{b}^{(1)} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Exemplo 3

Use o método da eliminação de Gauss com pivoteamento parcial para determinar a solução do sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, em que

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Permutar a quarta linha com a segunda:

$$\bar{\mathbf{A}}^{(1)} = \begin{bmatrix} 8 & 7 & 9 & 5 \\ 0 & 7/4 & 9/4 & 17/4 \\ 0 & -3/4 & -5/4 & -5/4 \\ 0 & -1/2 & -3/2 & -3/2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \bar{\mathbf{b}}^{(1)} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Exemplo 3

Use o método da eliminação de Gauss com pivoteamento parcial para determinar a solução do sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, em que

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Introduzir zeros abaixo do pivô:

$$m_{32} = -3/7 \quad \text{e} \quad m_{42} = -2/7.$$

$$\mathbf{A}^{(2)} = \begin{bmatrix} 8 & 7 & 9 & 5 \\ 0 & 7/4 & 9/4 & 17/4 \\ 0 & 0 & -2/7 & 4/7 \\ 0 & 0 & -6/7 & -2/7 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{b}^{(2)} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 6/7 \\ 4/7 \end{bmatrix}$$

Exemplo 3

Use o método da eliminação de Gauss com pivoteamento parcial para determinar a solução do sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, em que

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Permutar a quarta linha com a terceira:

$$\bar{\mathbf{A}}^{(2)} = \begin{bmatrix} 8 & 7 & 9 & 5 \\ 0 & 7/4 & 9/4 & 17/4 \\ 0 & 0 & -6/7 & -2/7 \\ 0 & 0 & -2/7 & 4/7 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \bar{\mathbf{b}}^{(2)} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 4/7 \\ 6/7 \end{bmatrix}$$

Exemplo 3

Use o método da eliminação de Gauss com pivoteamento parcial para determinar a solução do sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, em que

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Introduzir zero abaixo do pivô:

$$m_{43} = 1/3.$$

$$\mathbf{U} = \mathbf{A}^{(3)} = \begin{bmatrix} 8 & 7 & 9 & 5 \\ 0 & 7/4 & 9/4 & 17/4 \\ 0 & 0 & -6/7 & -2/7 \\ 0 & 0 & 0 & 2/3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{c} = \mathbf{b}^{(3)} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 4/7 \\ 2/3 \end{bmatrix}$$

Exemplo 3

Use o método da eliminação de Gauss com pivoteamento parcial para determinar a solução do sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, em que

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

A solução do sistema é:

$$\mathbf{x}^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Fatoração LU com Pivoteamento Parcial

Os multiplicadores determinados no método da eliminação de Gauss com pivoteamento parcial podem ser organizados, com cuidado devido as permutações das linhas, numa matriz **L** triangular inferior com diagonal unitária.

Sobretudo, a matriz original **A**, a matriz triangular superior **U** obtida no final do processo de eliminação e a matriz **L** triangular inferior com os multiplicadores satisfazem:

$$\mathbf{PA} = \mathbf{LU},$$

em que **P** é a matriz de permutação (obtida permutando linhas da matriz identidade).

Exemplo 4

Determine a fatoração LU, com pivoteamento parcial, da matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 4

Determine a fatoração LU, com pivoteamento parcial, da matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{bmatrix}.$$

Resposta: A fatoração LU de **A** com pivoteamento parcial é

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{P}} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3/4 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & -2/7 & 1 & 0 \\ 1/4 & -3/7 & 1/3 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}} \underbrace{\begin{bmatrix} 8 & 7 & 9 & 5 \\ 0 & 7/4 & 9/4 & 17/4 \\ 0 & 0 & -6/7 & -2/7 \\ 0 & 0 & 0 & 2/3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{U}}.$$

Observe que o multiplicador m_{ij}, determinado no processo de eliminação, não aparece necessariamente na posição (i, j) da matriz **L** por causa das permutações das linhas!

Teorema 5

Qualquer matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *não-singular pode ser fatorada como*

$$\mathbf{PA} = \mathbf{LU},$$

em que $\mathbf{U}$ *é triangular superior,* $\mathbf{L}$ *é triangular inferior com diagonal unitária e* $\mathbf{P}$ *é uma matriz de permutação.*

Como consequência, a eliminação de Gauss com pivoteamento parcial pode ser usado para resolver $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ sempre que $\mathbf{A}$ for não-singular.

Se a matriz $\mathbf{A}$ for singular, haverá um pivô nulo no processo de eliminação (com pivoteamento parcial)!

Comandos do MATLAB

O sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ é resolvido usando através do comando:

$$>> \mathtt{x} = \mathtt{A} \backslash \mathtt{b};$$

que, basicamente, implementa a eliminação de Gauss com pivoteamento parcial.

A fatoração LU de $\mathbf{A}$ é determinada através do comando:

$$>> [\mathtt{L}, \mathtt{U}, \mathtt{P}] = \mathtt{lu}(\mathtt{A});$$

Considerações Finais

Há também uma estratégia de pivoteamento total, na qual busca-se o elemento de maior valor absoluto dentre as linhas e colunas abaixo do pivô.

O pivoteamento total, porém, requer uma busca longa entre os elementos da matriz **A**.

Consequentemente, não há benefícios ao empregar a estratégia de pivoteamento total!

O pivoteamento parcial é tão empregado que, ao referir a fatoração LU ou eliminação de Gauss, geralmente assumimos o uso essa estratégia!