Aula 6
Eliminação de Gauss e Fatoração LU.

MS211 - Cálculo Numérico

Marcos Eduardo Valle

Departamento de Matemática Aplicada
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Universidade Estadual de Campinas

Introdução

Nas próximas aulas, trataremos do seguinte problema:

Problema:

Dada uma matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ não-singular e um vetor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},$$

determine o vetor $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

Equivalentemente, devemos resolver o sistema linear com n-equações e n-incógnitas:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots a_{2n}x_n = b_1, \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

Uma matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é não-singular se, e somente se, existe $\mathbf{A}^{-1}$, chamada *inversa de* $\mathbf{A}$, tal que

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I},$$

em que $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ denota a matriz identidade.

Sobretudo, a solução de $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ é

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}.$$

Logo, a solução de $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ existe e é única!

Apesar dessa considerações teóricas, não determinaremos a solução de $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ usando $\mathbf{A}^{-1}$ pois o cálculo da inversa de $\mathbf{A}$ exige um número desnecessário de operações aritméticas!

Para resolver os sistema linear $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, usaremos as chamadas operações elementares!

Operações Elementares:

Dado um sistema linear $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, as seguintes operações são chamadas operações elementares:

- Permutar duas equações.
- Multiplicar uma equação por uma constante não-nula.
- Adicionar (ou subtrair) um múltiplo de uma equação à outra.

As operações elementares não afetam a solução dos sistema!

Dizemos que dois sistemas lineares são equivalentes se admitem a mesma solução.

Ideia do Método da Eliminação de Gauss

As operações elementares são usadas para transformar um sistema linear $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ num sistema linear equivalente $\mathbf{Ux} = \mathbf{c}$ supostamente mais fácil de ser resolvido.

Sistema Diagonal

Se $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma matriz diagonal não-singular, isto é,

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & d_n \end{bmatrix},$$

com $d_i \neq 0$ para todo $i = 1, \dots, n$, então a solução de $\mathbf{D}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ é o vetor coluna $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]^T$ dado por

$$x_i = \frac{b_i}{d_i}, \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Para resolver um sistema diagonal, são efetuadas n operações aritméticas (adição e multiplicação).

Sistema Triangular Superior

Se $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é uma matriz triangular superior não-singular, i.e,

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \dots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{bmatrix},$$

com $u_{ii} \neq 0$ para todo $i = 1, \dots, n$, então a solução de $\mathbf{Ux} = \mathbf{c}$ é determinada usando a chamada *substituição regressiva* (do inglês *back substitution*). Formalmente, tem-se

$$x_i = \frac{1}{u_{ii}} \left(c_i - \sum_{j=i+1}^{n} u_{ij} x_j \right), \quad \text{para } i = n, n-1, \dots, 1.$$

A substituição regressiva efetua $\mathcal{O}(n^2)$ operações aritméticas.

Exemplo 1

Resolva o sistema triangular superior $\mathbf{Ux} = \mathbf{c}$, em que

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Exemplo 1

Resolva o sistema triangular superior $\mathbf{Ux} = \mathbf{c}$, em que

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Resposta: A solução é

$$\mathbf{u}^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Sistema Triangular Inferior

Se $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma matriz triangular inferior não-singular, i.e,

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \dots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & l_{nn} \end{bmatrix},$$

com $l_{ii} \neq 0$ para todo $i = 1, \dots, n$, então a solução de $\mathbf{Ly} = \mathbf{b}$ é determinada usando a chamada *substituição progressiva*:

$$y_i = \frac{1}{l_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} x_j \right), \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, n.$$

A substituição progressiva também requer $\mathcal{O}(n^2)$ operações.

Método da Eliminação de Gauss

No método da Eliminação de Gauss, aplicamos operações elementares em $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ de modo a obter um sistema equivalente $\mathbf{Ux} = \mathbf{c}$, em que $\mathbf{U}$ é uma matriz triangular superior.

A i-ésima linha da matriz $\mathbf{A}$ será denotada por $\mathbf{a}_i$, ou seja,

$$\mathbf{a}_i = \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Denotaremos por $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ a matriz $\mathbf{A}$ concatenada com o vetor $\mathbf{b}$.

Inicialmente, escrevemos $\mathbf{A}^{(0)} = \mathbf{A}$ e $\mathbf{b}^{(0)} = \mathbf{b}$.

A cada estágio $j = 0, 1, \dots, n-1$, operações elementares são aplicadas no par $[\mathbf{A}^{(j)}|\mathbf{b}^{(j)}]$ para obter um novo par $[\mathbf{A}^{(j+1)}|\mathbf{b}^{(j+1)}]$ com zeros abaixo do elemento $a_{jj}^{(j)}$.

No primeiro estágio, introduzimos zeros abaixo de $a_{11}^{(0)}$ subtraindo da j-ésima linha um múltiplo m_{i1} da primeira linha.

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & \dots & a_{1n}^{(0)} & | & b_1^{(0)} \\ a_{21}^{(0)} & a_{22}^{(0)} & \dots & a_{2n}^{(0)} & | & b_2^{(0)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & | & \vdots \\ a_{n1}^{(0)} & a_{n2}^{(0)} & \dots & a_{nn}^{(0)} & | & b_n^{(0)} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} & | & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} & | & b_2^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & | & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & \dots & a_{nn}^{(1)} & | & b_n^{(1)} \end{bmatrix}$$

Formalmente, para $i = 2, \dots, n$, definimos

$$m_{i1} = \frac{a_{i1}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}}, \quad b_i^{(1)} = b_i^{(0)} - m_{i1} b_1^{(0)} \quad \text{e} \quad \mathbf{a}_i^{(1)} = \mathbf{a}_i^{(0)} - m_{i1} \mathbf{a}_1^{(0)}.$$

No j-ésimo estágio, introduzimos zeros abaixo de $a_{jj}^{(j)}$, ou seja,

$$m_{ij} = \frac{a_{ij}^{(j-1)}}{a_{jj}^{(j-1)}}, \quad b_i^{(j)} = b_i^{(j-1)} - m_{ij} b_j^{(j-1)} \quad \text{e} \quad \mathbf{a}_i^{(j)} = \mathbf{a}_i^{(j-1)} - m_{ij} \mathbf{a}_j^{(j-1)},$$

para $i = j + 1, \dots, n$.

Exemplo 2

Use o método da eliminação de Gauss para determinar a solução do sistema linear $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, em que

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Exemplo 2

Use o método da eliminação de Gauss para determinar a solução do sistema linear $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, em que

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Resposta: O método da eliminação de Gauss fornece o sistema linear equivalente $\mathbf{Ux} = \mathbf{c}$ do exemplo anterior cuja solução é

$$\mathbf{x}^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Algoritmo da Eliminação de Gauss

Entrada: Matriz não-singular $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e vetor coluna $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$.

para $j = 1 : n - 1$ **faça**

  para $i = j + 1 : n$ **faça**

  - $m_{ij} = \dfrac{a_{ij}}{a_{jj}}$.
  - $\mathbf{a}_i = \mathbf{a}_i - m_{ij}\mathbf{a}_j$.
  - $b_i = b_i - m_{ij} b_j$.

  fim

fim

Saída: Matriz triangular superior **A** e **b**.

A notação $i = j + 1 : n$ significa: "para $i = 1$ até $i = n$.

No algoritmo acima, **U** e **c** são escritas sobre **A** e **b** para economizar espaço na memória.

O item $\mathbf{a}_i = \mathbf{a}_i - m_{ij}\mathbf{a}_j$ pode ser melhorado!

Número de Operações da Eliminação de Gauss

O método da eliminação de Gauss contém dois *loops*.

No *loop* para j, efetuamos

$$(\#\text{operaçoes}) = \sum_{j=1}^{n-1} (\#\text{operações efetuadas no estágio } j).$$

O *loop* para i, resulta em outro somatório

$$(\#\text{operaçoes}) = \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=j+1}^{n} (\text{operações efetuadas na linha } i).$$

Na linha i, efetuamos $1 + 2n + 2 = 2n + 3$ operações. Assim,

$$(\#\text{operaçoes}) = \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=j+1}^{n} (2n+3) = (2n+3)\frac{n(n-1)}{2} = \mathcal{O}(n^3).$$

Fatoração LU

Os multiplicadores m_{ij} determinados no método da eliminação de Gauss podem ser organizados numa matriz $\mathbf{L}$ triangular inferior com diagonal unitária, ou seja,

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & m_{n3} & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Sobretudo, a matriz original $\mathbf{A}$, a matriz triangular superior $\mathbf{U}$ obtida no final do processo de eliminação e a matriz $\mathbf{L}$ triangular inferior com os multiplicadores satisfazem:

$$\mathbf{A} = \mathbf{LU},$$

chamada **fatoração LU** de **A.**

Exemplo 3

Determine a fatoração LU da matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 3

Determine a fatoração LU da matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{bmatrix}.$$

Resposta: Tem-se que

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & & \\ 2 & 1 & & \\ 3 & 3 & 1 & \\ 4 & 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ & 1 & 1 & 1 \\ & & 2 & 2 \\ & & & 2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{U}}$$

Considerações Finais

O sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ é resolvido da seguinte forma usando a fatoração LU:

- Primeiro, resolve-se $\mathbf{Ly} = \mathbf{b}$.
- Depois, resolve-se $\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$.

Teoricamente, a fatoração LU é equivalente ao método da eliminação de Gauss!

Na prática, na fatoração LU guardamos os multiplicadores usados para transformar $\mathbf{A}$ numa matriz triangular superior $\mathbf{U}$.

Tanto a eliminação de Gauss como a fatoração requerem $\mathcal{O}(n^3)$ operações aritméticas!