Aula 5
Algoritmos e uma Breve Discussão dos Métodos Numéricos.

MS211 - Cálculo Numérico

Marcos Eduardo Valle

Departamento de Matemática Aplicada
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Universidade Estadual de Campinas

Nas duas últimas aulas, apresentamos os métodos da bissecção, posição falsa, ponto fixo, Newton e secante.

Na aula de hoje, apresentaremos os algoritmos desses métodos e apresentaremos uma breve comparação deles.

Lembre-se que esses métodos são usados para determinar η tal que

$$f(\xi) = 0 \quad \text{ou, equivalentemente,} \quad \varphi(\xi) = \xi.$$

Denotaremos a aproximação de ξ fornecida por um método numérico por $\tilde{\xi}$.

Método da Bissecção

Entrada: Função f; intervalo que contém a raiz $[a, b]$.
Dados: Tolerâncias τ e ϵ.
Inicialize: $f_a = f(a)$, $f_b = f(b)$ *e* $f_m = \epsilon + 1$.
enquanto $|f_m| > \epsilon$ *e* $|b - a| > \tau$ **faça**

  Calcule: $m = \dfrac{a+b}{2}$.
  Avalie: $f_m = f(m)$.
  se $sign(f_a)sign(f_m) < 0$ **então**
    Defina $b = m$ e $f_b = f_m$.
  senão
    Defina $a = m$ e $f_a = f_m$.
  fim

fim

Saída: Aproximação para a raiz: $\tilde{\xi} = \begin{cases} m, & |f_m| \leq \epsilon, \\ \frac{a+b}{2}, & \text{caso contrário.} \end{cases}$

Para evitar *overflow*, usou-se $\text{sign}(f_a)\text{sign}(f_m) < 0$ no lugar de $f_a f_b < 0$.

Método da Posição Falsa

Entrada: Função f; intervalo que contém a raiz $[a, b]$.
Dados: Tolerâncias τ e ϵ.
Inicialize: $f_a = f(a)$, $f_b = f(b)$ *e* $f_m = \epsilon + 1$.
enquanto $|f_m| > \epsilon$ e $|b - a| > \tau$ **faça**

Defina: $m = \dfrac{af_b - bf_a}{f_b - f_a}$.

Avalie: $f_m = f(m)$.

se $sign(f_a)sign(f_m) < 0$ **então**

Defina $b = m$ e $f_b = f_m$.

senão

Defina $a = m$ e $f_a = f_m$.

fim

fim

Saída: Aproximação para a raiz: $\tilde{\xi} = \begin{cases} m, & |f_m| \leq \epsilon, \\ \frac{a+b}{2}, & \text{caso contrário.} \end{cases}$

Método do Ponto Fixo

Entrada: Função φ; aproximação inicial x_0.
Dados: Número máximo de interações k_{max}; tolerância τ.
Inicialize: $k = 0$ *e* $Er = \tau + 1$.
enquanto $k \leq k_{max}$ *e* $Er > \tau$ **faça**
  Atualize: $k = k + 1$.
  Avalie: $x = \varphi(x_0)$.
  Calcule: $Er = |x - x_0|$.
  Atualize: $x_0 = x$.
fim
Saída: Aproximação para a raiz $\tilde{\xi} = x_0$.

Método de Newton

Entrada: Função f e sua derivada f'; aproximação inicial x_0.
Dados: Número máximo de interações k_{max}; tolerâncias τ e ϵ.
Inicialize: $k = 0$, $f_0 = f(x_0)$ *e* $Er = \tau + 1$.
enquanto $k \leq k_{max}$, $|f_0| > \epsilon$ e $Er > \tau$ **faça**
  Atualize: $k = k + 1$.
  Defina: $x = x_0 - \dfrac{f_0}{f'(x_0)}$.
  Calcule: $Er = |x - x_0|$.
  Atualize: $x_0 = x$.
  Avalie: $f_0 = f(x_0)$.
fim
Saída: Aproximação para a raiz $\tilde{\xi} = x_0$.

Método da Secante

Entrada: Função f; aproximações iniciais x_0 e x_1.
Dados: Número máximo de interações k_{max}; tolerâncias τ e ϵ.
Inicialize: $k = 0$, $Er = \tau + 1$, $f_0 = f(x_0)$ *e* $f_1 = f(x_1)$.
enquanto $k \leq k_{max}$, $|f_1| > \epsilon$ *e* $Er > \tau$ **faça**
  Atualize: $k = k + 1$.
  Defina: $x = \dfrac{x_0 f_1 - x_1 f_0}{f_1 - f_0}$.
  Calcule: $Er = |x - x_1|$.
  Atualize: $x_0 = x_1$, $f_0 = f_1$, $x_1 = x$.
  Avalie: $f_1 = f(x)$.
fim
Saída: Aproximação para a raiz $\tilde{\xi} = x_1$.

Define-se $f_1 = f(x_1)$ e $f_0 = f(x_0)$ para diminuir o número de avaliações da função f.

Exemplo 1

Compare os métodos numéricos anteriores para estimar $\xi = \sqrt{2}$ usando a equação $x^2 - 2 = 0$ usando tolerâncias $\tau = 10^{-6}$ e $\epsilon = 10^{-6}$.

Exemplo 1

Compare os métodos numéricos anteriores para estimar $\xi = \sqrt{2}$ usando a equação $x^2 - 2 = 0$ usando tolerâncias $\tau = 10^{-6}$ e $\epsilon = 10^{-6}$.

Resposta: Observe a convergência quadrática do método de Newton, superlinear do método da secante e linear dos demais métodos.

Exemplo 2

Sabendo que a função $f(x) = e^{-x^2} - \cos(x)$ admite uma raiz $\xi \in [1, 2]$, compare os métodos numéricos aplicados para encontrar ξ usando tolerâncias $\tau = 10^{-4}$ e $\epsilon = 10^{-4}$.

Exemplo 2

Sabendo que a função $f(x) = e^{-x^2} - \cos(x)$ admite uma raiz $\xi \in [1, 2]$, compare os métodos numéricos aplicados para encontrar ξ usando tolerâncias $\tau = 10^{-4}$ e $\epsilon = 10^{-4}$.

Resposta: Observe a convergência quadrática do método de Newton, superlinear do método da secante e linear dos demais métodos.

Exemplo 3

Aplique o método de Newton para encontrar $\xi = 0$ resolvendo as equações $x^i = 0$ para $i = 2, 3, 4$. Estude o erro do método de Newton aplicado para resolver a equação $x^i = 0$, $i \geq 2$.

Exemplo 3

Aplique o método de Newton para encontrar $\xi = 0$ resolvendo as equações $x^i = 0$ para $i = 2, 3, 4$. Estude o erro do método de Newton aplicado para resolver a equação $x^i = 0$, $i \geq 2$.

Resposta: O método de Newton apresenta convergência linear. Com efeito, temos a sequência

$$x_{k+1} = \frac{i-1}{i} x_k.$$

Logo,

$$\lim_{k \to \infty} \frac{|x_{k+1} - \xi|}{|x_k - \xi|} = \frac{i-1}{i}.$$

A convergência linear não contradiz o teorema da convergência do método de Newton porque $f'(\xi) = 0$.