Aula 4
Método de Newton e o Método da Secante.

MS211 - Cálculo Numérico

Marcos Eduardo Valle

Departamento de Matemática Aplicada
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Universidade Estadual de Campinas

Na aula anterior, iniciamos o estudo sobre métodos numéricos usados para resolver o problema:

Zero de uma Função Real

Dada uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, determine, se possível, $\xi \in [a, b]$ tal que

$$f(\xi) = 0.$$

Em particular, o método do ponto fixo.

Método do Ponto Fixo

Dado uma aproximação inicial x_0 para a raiz ξ de f, o método do ponto fixo define a sequência

$$x_{k+1} = \varphi(x_k), \quad \text{para } k = 0, 1, \ldots,$$

em que φ é uma função tal que

$$\varphi(\xi) = \xi \iff f(\xi) = 0.$$

Em termos gerais, $\lim_{k\to\infty} x_k = \xi$ se $|\varphi'(x)| \leq M < 1$ para todo x num intervalo I centrado na raiz ξ.

Além disso, a convergência será tanto mais rápida quanto for menor o valor de M!

Motivação Algébrica para o Método de Newton

Vimos também que, dada f, podemos definir

$$\varphi(x) = x + A(x)f(x),$$

em A é tal que $A(\xi) \neq 0$.

Com intuito de obter uma rápida convergência, vamos determinar uma função $A(x)$ tal que $\varphi'(\xi) = 0$.

Sabemos, pela regra do produto, que

$$\varphi'(x) = 1 + A'(x)f(x) + A(x)f'(x).$$

Lembrando que $f(\xi) = 0$, obtemos

$$A(\xi) = -\frac{1}{f'(\xi)}.$$

Assim, escolhemos $A(x) = -1/f'(x)$.

Método de Newton

Definição 1 (Método de Newton)

Dada uma função diferenciável f e uma aproximação inicial x_0 da raiz ξ de f, defina a sequência

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad \forall k = 0, 1, \ldots.$$

Espera-se que a sequência x_k convirja para a raiz ξ!

Teorema 2 (Convergência do Método de Newton)

Seja f uma função contínua com derivadas de primeira e segunda ordem f' e f'' contínuas em um intervalo I que contém a raiz ξ de f. Se $f'(\xi) \neq 0$ então existe um subintervalo $\bar{I} \subseteq I$, que contém ξ, tal que a sequência $\{x_k\}$ gerada pelo método de Newton converge pelo menos quadraticamente para ξ para todo $x_0 \in \bar{I}$.

Demonstração da Convergência do Método de Newton

Primeiramente, vamos mostrar que

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)},$$

satisfaz o teorema de convergência do ponto fixo.

Pela regra do quociente, temos

$$\varphi'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{\big(f(x)\big)^2}.$$

Agora, sendo $f'(\xi) \neq 0$ e $f'(x)$ é contínua em I, existe $I_1 \subseteq I$ tal que $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in I_1$.

Temos também que f, f' e f'' são contínuas em I_1 com $f''(x) \neq 0$.

Portanto, φ e φ' são ambas contínuas em I_1.

Além disso, como $\varphi'(\xi) = 0$, é possível escolher um subintervalo $\bar{I} \subseteq I_1$, centrado em ξ, tal que $|\varphi'(x)| < 1$ para todo $x \in \bar{I}$.

Dessa forma, φ satisfaz as hipóteses do teorema de convergência do método do ponto fixo.

Logo, a sequência $\{x_k\}$ converge para ξ.

Vamos agora mostrar que o método de Newton tem convergência quadrática.

O desenvolvimento de Taylor de f em torno de x_k fornece

$$f(x) = f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k) + \frac{1}{2}f''(\eta_k)(x - x_k)^2,$$

em que η_k está entre x e x_k. Assim,

$$f(\xi) = f(x_k) - f'(x_k)(x_k - \xi) + \frac{1}{2}f''(\eta_k)(x_k - \xi)^2 = 0.$$

Dividindo ambos os lados dessa equação $f'(x_k)$, encontramos

$$x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} - \xi = \frac{f''(\eta_k)}{2f'(x_k)}(x_k - \xi)^2,$$

ou seja, $\dfrac{x_{k+1} - \xi}{(x_k - \xi)^2} = \dfrac{f''(\eta_k)}{2f'(x_k)}$. Sendo f' contínua, temos

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|x_{k+1} - \xi|}{|x_k - \xi|^2} = \lim_{k\to\infty} \frac{|f''(\eta_k)|}{2|f'(x_k)|} = \frac{|f''(\eta_k)|}{2|f'(\eta_k)|} = C.$$

Finalmente, sendo f' contínua e, como $x_k, \eta_k \to \xi$, temos

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|x_{k+1} - \xi|}{|x_k - \xi|^2} = \lim_{k\to\infty} \frac{|f''(\eta_k)|}{2|f'(x_k)|} = \underbrace{\frac{|f''(\xi)|}{2|f'(\xi)|}}_{=c}.$$

Motivação Geométrica para o Método de Newton

O método de Newton tem a seguinte interpretação geométrica.

Seja L_k a reta tangente à f no ponto $(x_k, f(x_k))$, ou seja,

$$L_k(x) = f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k).$$

Define-se x_{k+1} como sendo a raiz de L_k, que pode ser vista como uma aproximação linear de f numa vizinhança de x_k.

Formalmente, $L_k(x_{k+1}) = 0$ se, e somente se,

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.$$

Método da Secante

Uma grande desvantagem do método de Newton é a necessidade de se obter e avaliar f' a cada iteração.

No método da secante, substituímos a derivada $f'(x_k)$ pelo quociente das diferenças

$$f'(x_k) \approx \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}},$$

em que x_k e x_{k-1} representam duas aproximações para ξ.

Geometricamente, dadas as aproximações x_{k-1} e x_k, defina x_{k+1} como sendo a abcissa do ponto de intersecção do eixo horizontal com a reta secante que passa por $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ e $(x_k, f(x_k))$.

Definição 3 (Método da Secante)

Dada uma função f e duas aproximações iniciais x_0 e x_1 da raiz ξ de f, defina a sequência para $k = 1, 2, \ldots$:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)(x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})} = \frac{x_{k-1} f(x_k) - x_k f(x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}.$$

Espera-se que a sequência x_k convirja para a raiz ξ!

Teorema 4

Suponha que f e sua derivada f′ são contínuas num intervalo I que contém a raiz ξ *de f. Se* $f'(\xi) \neq 0$ *e* x_0 *e* x_1 *suficientemente próximos de* ξ*, então a sequência* $\{x_k\}$ *produzida pelo método da secante converge pelo menos linearmente para* ξ*. Além disso, tem-se*

$$\lim_{k \to \infty} \frac{|x_{k+1} - \xi|}{|x_k - \xi|^p} = c,$$

com $0 < c$ *e* $p = (1 + \sqrt{5})/2 \approx 1.6$*.*