Aula 3
Zeros Reais de Funções Reais.

MS211 - Cálculo Numérico

Marcos Eduardo Valle

Departamento de Matemática Aplicada
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Universidade Estadual de Campinas

Introdução

Nas aula de hoje iniciaremos os estudos sobre métodos numéricos para o seguinte problema:

Zero de uma Função Real

Dada uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, determine, se possível, $\xi \in [a, b]$ tal que

$$f(\xi) = 0.$$

Nesse caso, ξ é chamado **zero** (ou **raiz**) de f. Dizemos também que ξ é uma solução da equação $f(x) = 0$.

Devemos nos atentar para algumas questões:

- Existe $\xi \in [a, b]$ tal que $f(\xi) = 0$?
- No caso afirmativo, ξ é único?
- Se existem mais de uma solução, há um critério para a melhor solução?

Existência de Solução

O seguinte teorema, geralmente visto no curso de Cálculo I, garante a existência de uma raiz de f em $[a, b]$.

Teorema 1 (Teorema do Valor Intermediário)

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Se $f(a)f(b) < 0$, então existe pelo menos um $\xi \in (a, b)$ tal que $f(\xi) = 0$.

O teorema do valor intermediário (TVI), além de garantir a existência da raiz, é a base para o chamado **método da bissecção.**

Método da Bissecção

Suponha que conhecemos um intervalo $[a, b]$ tal que $f(a)f(b)$.

Calcule o ponto médio do intervalo:

$$m = \frac{a+b}{2},$$

e avalie f no ponto médio, ou seja, calcule $f(m)$.

Substitua a ou b por m de modo a obter um novo intervalo que contém a raiz. Formalmente,

$$\text{Se } f(m)f(b) < 0, \text{ então } a \leftarrow m, \text{ senão}$$

$$\text{Se } f(a)f(m) < 0, \text{ então } b \leftarrow m.$$

Repetimos até obter um intervalo suficientemente pequeno, ou seja, até obtermos $(b - a) \leqslant 2\delta$!

Tomamos o ponto médio como estimativa da raiz de f.

Exemplo 2

Use o método da bissecção para encontrar uma estimativa para a raiz **positiva** da função

$$f(x) = e^x - 2x - 1.$$

Taxa de Convergência

A taxa de convergência de um método numérico refere-se ao quão rápido ele fornece uma estimativa para a raiz de uma função.

No caso do método da bissecção, a cada iteração dividimos o intervalo inicial pela metade.

Após k iterações, teremos um intervalo de tamanho $\frac{b-a}{2^k}$, que converge para zero quando $k \to \infty$.

Teremos $b - a \leqslant 2\delta$ quando

$$k \geqslant \log_2 \left(\frac{|b-a|}{\delta} \right) - 1.$$

O erro absoluto da aproximação satisfaz $|\tilde{\xi} - \xi| \leqslant \delta$.

Método da Posição Falsa (Regula Falsi)

Para o método da bisseção, importa apenas o sinal de f nos extremos dos intervalos.

Um método mais elaborado, deve olhar para os valores de f!

Por exemplo, espera-se que a raiz de f esteja mais próxima de a que de b se $|f(a)| < |f(b)|$.

No método da posição falsa, em vez de escolher o ponto médio do intervalo, adotamos a intersecção do eixo x com a reta que passa pelos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$.

Formalmente, substituímos o ponto médio do intervalo por

$$m = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}.$$

Método do Ponto Fixo (ou Iteração Linear)

O método do ponto fixo é conceitualmente importante, pois serve de base para muitos outros métodos numéricos.

Suponha que desejamos resolver a equação $f(x) = 0$, em que f é uma função contínua em $[a, b]$.

Primeiramente, no método do ponto fixo reescrevemos o problema na forma

$$x = \varphi(x), \tag{1}$$

em que φ é tal que $f(\xi) = 0$ se e somente se $\xi = \varphi(\xi)$.

Uma solução ξ de (1) é chamada **ponto fixo** de φ.

Em geral, dada f, podemos definir

$$\varphi(x) = x + A(x)f(x),$$

em A é tal que $A(\xi) \neq 0$.

Aproximações Sucessivas

Posteriormente, dado uma aproximação inicial x_0 de ξ, o método do ponto fixo define as aproximações sucessivas

$$x_{k+1} = \varphi(x_k), \quad \forall k = 0, 1, \ldots$$

Espera-se que $x_k \to \xi$ quando $k \to \infty$.

Exemplo 3

Considere a função $f(x) = e^x - 2x - 1$, que possui duas raízes f: $\xi_1 = 0$ e $\xi_2 \in [1, 2]$. Usando como aproximação inicial os valores $x_0 = 1$ ou $x_0 = 2$, determine as aproximações sucessivas considerando

(a) $\varphi_1(x) = (e^x - 1)/2$.

(b) $\varphi_2(x) = \ln(2x + 1)$.

Esboce as funções φ_1 e φ_2 e os resultados obtidos.

Exemplo 3

Considere a função $f(x) = e^x - 2x - 1$, que possui duas raízes f: $\xi_1 = 0$ e $\xi_2 \in [1, 2]$. Usando como aproximação inicial os valores $x_0 = 1$ ou $x_0 = 2$, determine as aproximações sucessivas considerando

(a) $\varphi_1(x) = (e^x - 1)/2$.

(b) $\varphi_2(x) = \ln(2x + 1)$.

Esboce as funções φ_1 e φ_2 e os resultados obtidos.

Resposta: A função φ_1 com $x_0 = 1$ gera uma sequencia que converge para $\xi_1 = 0$. A mesma função diverge com $x_0 = 2$. A função φ_2 produz uma sequência que converge para $\tilde{\xi}_2 = 1.2564$ para ambos $x_0 = 1$ e $x_0 = 2$.

Exemplo 4

Considere a função $f(x) = x^2 + x - 6$. As raízes de f são $\xi_1 = -3$ e $\xi_2 = 2$. Usando a aproximação inicial $x_0 = 1.5$, determine as aproximações sucessivas considerando

(a) $\varphi_1(x) = 6 - x^2$.

(b) $\varphi_2(x) = \sqrt{6 - x}$.

Esboce as funções φ_1 e φ_2 e os resultados obtidos.

Exemplo 4

Considere a função $f(x) = x^2 + x - 6$. As raízes de f são $\xi_1 = -3$ e $\xi_2 = 2$. Usando a aproximação inicial $x_0 = 1.5$, determine as aproximações sucessivas considerando

(a) $\varphi_1(x) = 6 - x^2$.

(b) $\varphi_2(x) = \sqrt{6 - x}$.

Esboce as funções φ_1 e φ_2 e os resultados obtidos.

Resposta: A função φ_1 gera uma sequencia que não converge. A função φ_2 produz uma sequência que converge para $\xi_2 = 2$.

Definição de Taxa de Convergência

Definição 5 (Convergência Linear)

Seja $\{x_k\}$, com $\lim_{k\to\infty} x_k = \xi$, a produzida de aproximações produzida por um método numérico. Dizemos que $\{x_k\}$ **converge linearmente** para ξ se

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|x_{k+1} - \xi|}{|x_k - \xi|} = c, \quad \text{com } 0 < c < 1.$$

Dizemos que a **ordem de convergência** é $p > 1$ se

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|x_{k+1} - \xi|}{|x_k - \xi|^p} = c, \quad \text{com } 0 < c.$$

Em particular, se $p = 2$, tem-se convergência quadrática.

Convergência do Método do Ponto Fixo

O seguinte teorema fornece uma condição suficiente para a convergência do método do ponto fixo.

Teorema 6 (Teorema do Ponto Fixo)

Seja φ uma função contínua com derivada φ' contínua em um intervalo I centrado no ponto fixo ξ de φ. Se

$$|\varphi'(x)| \leqslant M < 1, \quad \forall x \in I,$$

então, para qualquer aproximação inicial $x_0 \in I$, a sequência $\{x_k\}$ produzida pelo método do ponto fixo converge pelo menos linearmente para ξ.

A convergência do método do ponto fixo será tanto mais rápida quanto menor for o valor de M.

Demonstração do Teorema do Ponto Fixo

Pelo teorema do valor médio, geralmente visto em Cálculo I, temos:

$$\varphi(x_k) - \varphi(\xi) = \varphi'(\eta)(x_k - \xi), \quad \text{para algum } \eta \text{ entre } x_k \text{ e } \xi.$$

Assim,

$$|x_k - \xi| = |\varphi(x_{k-1}) - \varphi(\xi)| = |\varphi'(\eta)||x_{k-1} - \xi| \leqslant M|x_{k-1} - \xi|.$$

Dessa forma, concluímos que

$$|x_k - \xi| \leqslant M^k |x_0 - \xi|, \quad \forall k = 1, 2, \ldots.$$

Lembrando que $M < 1$, concluímos que $x_k \in I$ para todo k e

$$\lim_{k\to\infty} |x_k - \xi| \leqslant \lim_{k\to\infty} M^k |x_0 - \xi| = 0.$$

Temos também que

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|x_{k+1} - \xi|}{x_k - \xi} = M < 1,$$

de onde concluímos que o método tem convergência pelo menos linear, pois podemos ter $M = 0$.