Aula 22
Polinômio por Partes e Splines.

MS211 - Cálculo Numérico

Marcos Eduardo Valle

Departamento de Matemática Aplicada
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Universidade Estadual de Campinas

Nas aulas anteriores, vimos o problema de interpolação que consiste em determinar um polinômio p_n, de grau menor ou igual a n, tal que

$$p_n(x_k) = y_k, \quad \forall k = 0, 1, \dots, n,$$

em que $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ são dados.

Se $y_k = f(x_k)$, em que f é uma função com derivadas até ordem $n+1$ contínuas, então

$$f(x) - p_n(x) = \prod_{k=0}^{n} (x - x_k) \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}, \quad \forall x \in [x_0, x_n] \text{ para } \xi \in [x_0, x_n].$$

Além disso, se f tem derivadas de ordem $(n+1)$ contínuas em $[a, b]$, então o erro da interpolação nos pontos

$$x_k = a + hk, \quad h = \frac{b-a}{n}, \quad \forall\, k = 0, 1, \ldots, n,$$

satisfaz

$$\mathcal{E}_n(x) \leq \frac{h^{n+1}}{4(n+1)} \max_{\xi \in [a,b]} |f^{(n+1)}(\xi)|.$$

Essa desigualdade, porém, não garante que o polinômio interpolador $p_n \to f$ quando $n \to \infty$.

Em outras palavras, aumentar o grau do polinômio interpolador p_n não implica uma melhor aproximação de f.

Interpolação por Partes

Dado pontos $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$, dizemos que Π_m é uma função polinomial por partes se Π_m é contínua em $[x_0, x_n]$ e é um polinômio de grau menor ou igual a m em cada um dos subintervalos $[x_{k-1}, x_k]$, para $k = 1, \ldots, n$.

Exemplo 1

Encontre a função polinomial quadrática por partes que interpola a tabela

x	0	1/6	1/3	1/2	2/3	5/6	1
f	1	3	2	1	0	2	1

Interpolação por Partes

Dado pontos $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$, dizemos que Π_m é uma função polinomial por partes se Π_m é contínua em $[x_0, x_n]$ e é um polinômio de grau menor ou igual a m em cada um dos subintervalos $[x_{k-1}, x_k]$, para $k = 1, \ldots, n$.

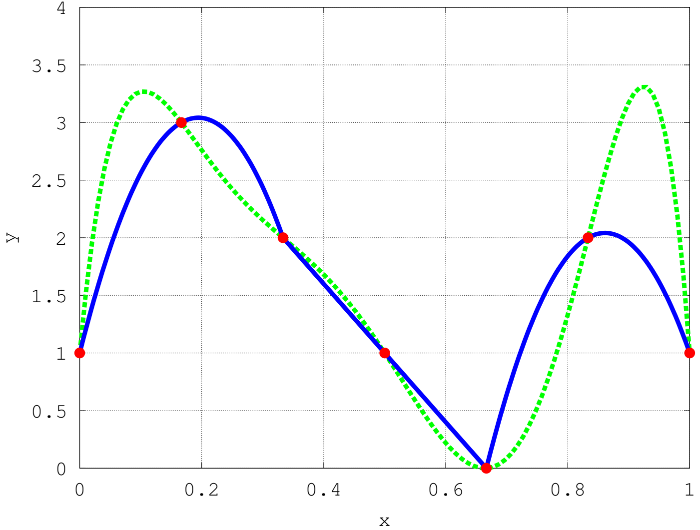
Exemplo 1

Encontre a função polinomial quadrática por partes que interpola a tabela

x	0	1/6	1/3	1/2	2/3	5/6	1
f	1	3	2	1	0	2	1

Resposta: O polinômio interpolador quadrático por partes é

$$\Pi_2(x) = \begin{cases} -54x^2 + 21x + 1, & 0 \leq x \leq 1/3, \\ -6x + 4, & 1/3 \leq x \leq 2/3, \\ -54x^2 + 93x - 38, & 2/3 \leq x \leq 1. \end{cases}$$



Polinômio interpolador de grau p_6 (verde) e o polinômio interpolador quadrático por partes Π_2 (azul).

Interpolação Linear por Partes

Dado uma tabela

x	x_0	x_1	$\dots$	x_n
f	y_0	y_1	$\dots$	y_n

o polinômio interpolador linear por partes é dado por

$$\Pi_1(x) = \begin{cases} y_0 + \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0), & x_0 \leq x \leq x_1, \\ \vdots & \\ y_k + \dfrac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k}(x - x_k), & x_k \leq x \leq x_{k+1}, \\ \vdots & \\ y_{n-1} + \dfrac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}(x - x_{n-1}), & x_{n-1} \leq x \leq x_n. \end{cases}$$

Considere uma função f com derivada de segunda ordem contínua em $[x_0, x_n]$.

Se $y_k = f(x_k)$, para $k = 0, 1, \ldots, n$, então o erro da interpolação linear por partes satisfaz

$$\mathcal{E}(x) = |f(x) - \Pi_1(x)| \leq \frac{M_2 H^2}{8}, \quad \forall x \in [x_0, x_n],$$

em que

$$M_2 = \max_{x_0 \leq x \leq x_n} |f''(x)| \quad \text{e} \quad H = \max_{k=1,\ldots,n} |x_k - x_{k-1}|.$$

Note que $\Pi_1 \to f$ quando $H \to 0$ se f é suficientemente suave.

Exemplo 2

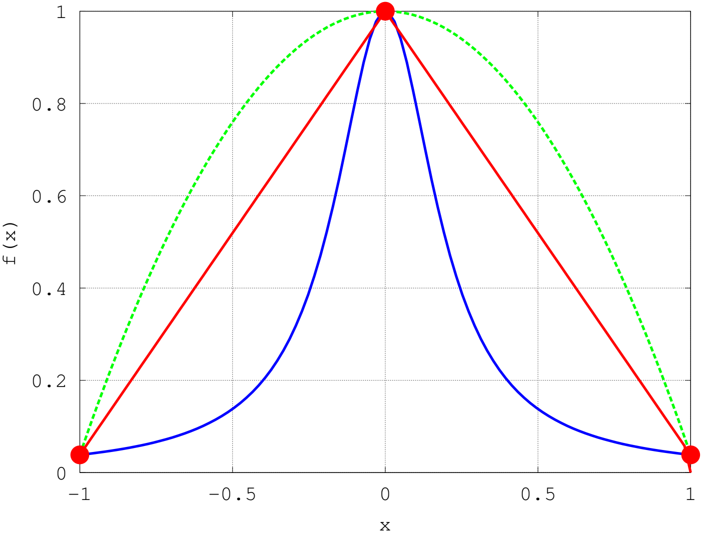
Considere a função

$$f(x) = \frac{1}{1+25x^2}, \quad x \in [-1,+1],$$

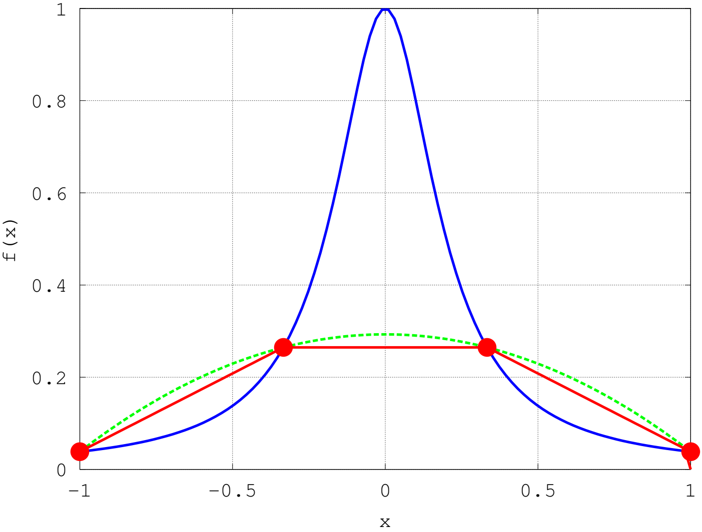
e nós

$$x_k = -1 + \frac{2}{n}k, \quad k = 0, 1, \ldots, n,$$

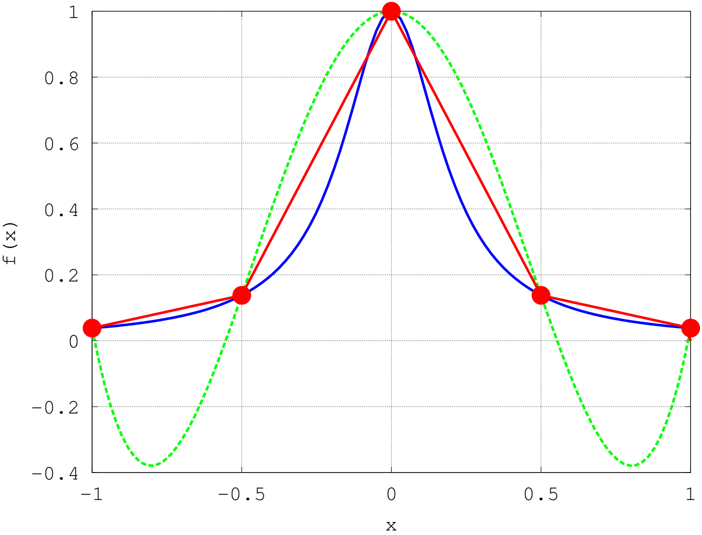
igualmente espaçados no intervalo $[-1, 1]$.
As próximas figuras mostram f (azul), seu polinômio interpolador (verde) e o polinômio interpolador linear por partes (vermelho).



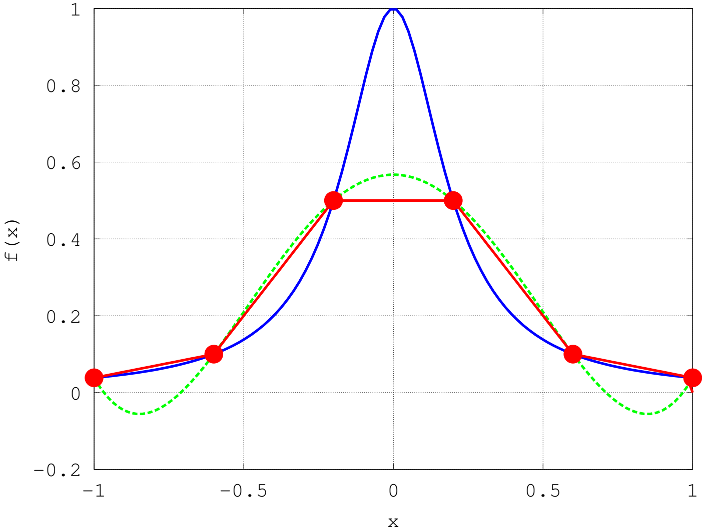
$n = 2.$



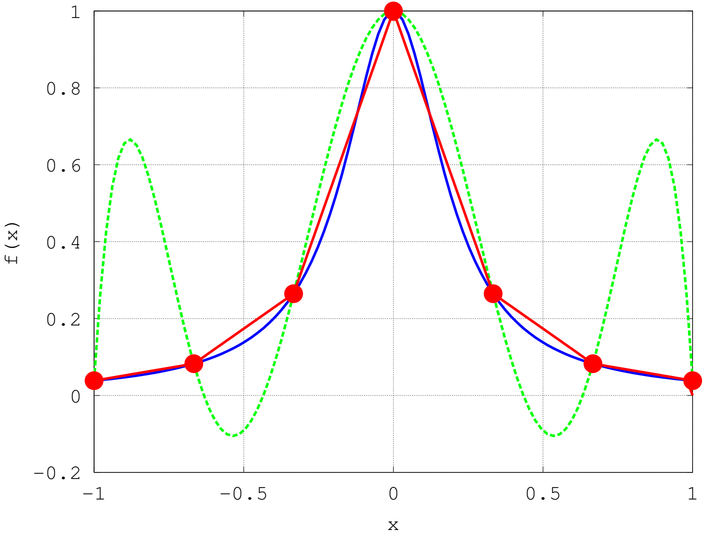
$n = 3.$



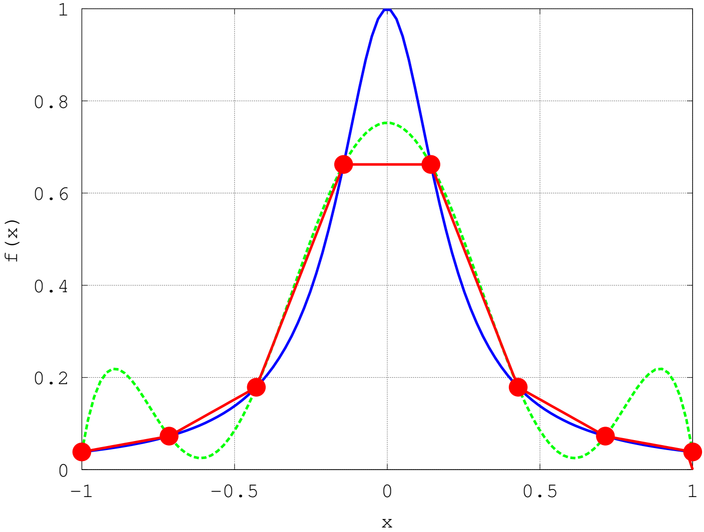
$n = 4.$



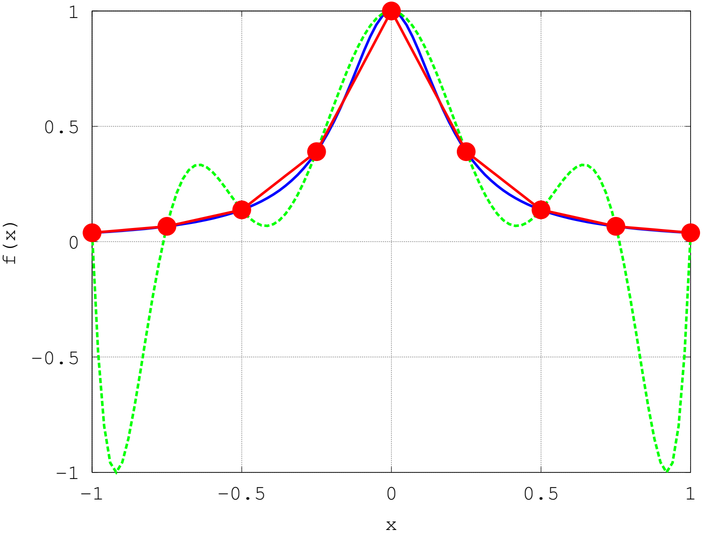
$n = 5$.



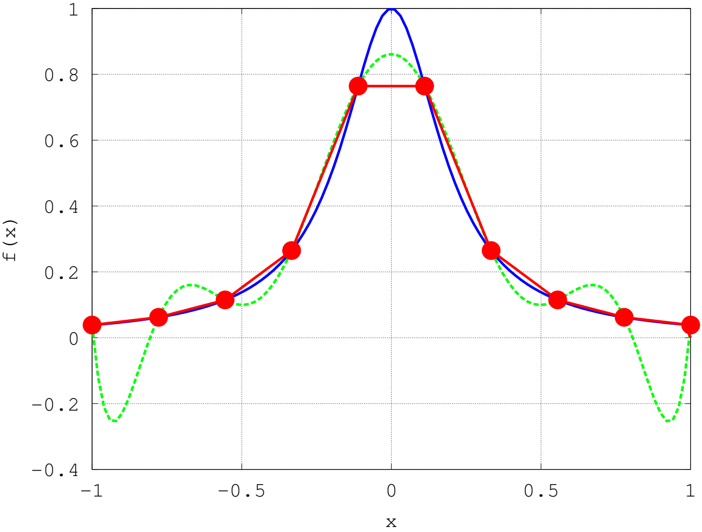
$n = 6$.



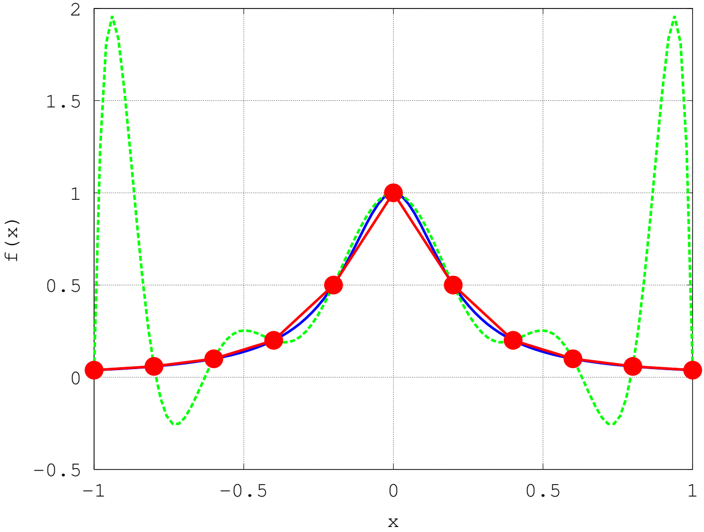
$n = 7.$



$n = 8.$



$n = 9.$



$n = 10.$

Splines Cúbicas

De um modo geral, se f é suficientemente suave, então o polinômio interpolador por partes $\Pi_m \to f$, mesmo que Π_m não seja suave!

Muitas aplicações, por exemplo em computação gráfica, requerem que a aproximação seja suave, ou seja, possua pelo menos derivada contínua.

Em vista disso, dados nós $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$, consideramos polinômios cúbicos por partes $\mathcal{S}_3$ com a seguinte propriedade:

- S_3 é um polinômio de grau menor ou igual a 3 em cada um dos subintervalos $[x_{k-1}, x_k]$.
- S_3 tem derivadas de primeira e segunda ordem contínuas em $[x_0, x_n]$.

Funções com essas propriedades são chamadas **splines cúbicas**.

Sendo um caso particular de polinômios cúbicos por partes, uma spline cúbica é da forma

$$\mathcal{S}_3(x) = \begin{cases} s_1(x), & x_0 \leq x \leq x_1, \\ \vdots & \\ s_k(x), & x_{k-1} \leq x \leq x_k, \\ \vdots & \\ s_n(x), & x_{n-1} \leq x \leq x_n, \end{cases}$$

em que

$$s_k(x) = a_k(x - x_k)^3 + b_k(x - x_k)^2 + c_k(x - x_k) + d_k,$$

é um polinômio de grau pelo menos 3.

Note que uma spline cúbica é determinada por $4n$ parâmetros $a_1, b_1, c_1, d_1, a_2, b_2, c_2, d_2, \ldots, a_n, b_n, c_n, d_n$.

Como $\mathcal{S}_3$, $\mathcal{S}_3'$ e $\mathcal{S}_3''$ são contínuas, devemos ter

$$s_k(x_k) = s_{k+1}(x_k), \quad s_k'(x_k) = s_{k+1}'(x_k) \quad \text{e} \quad s_k''(x_k) = s_{k+1}''(x_k),$$

para todo $k = 1, 2, \ldots, n-1$.

Num problema de interpolação, devemos também ter $\mathcal{S}_3(x_k) = y_k$, ou seja,

$$s_1(x_0) = y_0 \quad \text{e} \quad s_k(x_k) = y_k, \quad \forall k = 1, \ldots, n.$$

Com isso, temos

$$3(n-1) + (n+1) = 4n - 2,$$

equações para determinar $4n$ incógnitas.

Logo, temos duas condições em aberto que podem ser impostas, por exemplo, de acordo com informações físicas sobre o problema.

Spline Cúbica Natural

A **spline cúbica natural** é obtida impondo as condições

$$\mathcal{S}_3''(x_0) = 0 \quad \text{e} \quad \mathcal{S}_3''(x_n) = 0,$$

ou ainda,

$$s_1''(x_0) = 0 \quad \text{e} \quad s_n''(x_n) = 0.$$

Pode-se mostrar que a spline cúbica natural é aquela de menor curvatura.

Manipulando as equações acima, concluímos que os parâmetros $a_1, b_1, c_1, d_1, a_2, \ldots, d_n$ de uma spline cúbica natural são obtidos resolvendo um sistema de equações lineares

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}.$$

Especificamente, primeiro note que

$$
\begin{aligned}
s_k(x) &= a_k(x - x_k)^3 + b_k(x - x_k)^2 + c_k(x - x_k) + d_k, \\
s_k'(x) &= 3a_k(x - x_k)^2 + 2b_k(x - x_k) + c_k, \\
s_k''(x) &= 6a_k(x - x_k) + 2b_k,
\end{aligned}
$$

para todo $k = 1, 2, \ldots, n$.

Da condição de interpolação, devemos ter

$$s_1(x_0) = y_0 \quad \text{e} \quad s_k(x_k) = y_k, \quad \forall k = 1, \ldots, n.$$

Analogamente, vamos escrever

$$y_0' = s_1'(x_0) \quad \text{e} \quad y_k' = s_k'(x_k), \quad \forall k = 1, \ldots, n,$$

e

$$y_0'' = s_1''(x_0) \quad \text{e} \quad y_k'' = s_k''(x_k), \quad \forall k = 1, \ldots, n.$$

Lembre-se que $y_0'' = s_1''(x_0) = 0$ e $y_n'' = s_n''(x_n) = 0$ na spline cúbica natural.

Da expressão para s_k'' concluímos que

$$y_k'' = s_k''(x_k) = 2b_k \quad \Longrightarrow \quad b_k = \frac{y_k''}{2}, \quad \forall k = 1, \ldots, n.$$

Além disso, da continuidade de $\mathcal{S}_3''$, obtemos

$$y_{k-1}'' = s_{k-1}''(x_{k-1}) = s_k(x_{k-1}) = 6a_k(x_{k-1} - x_k) + 2b_k.$$

Denotando

$$h_k = x_k - x_{k-1}, \quad \forall k = 1, \ldots, n,$$

concluímos que

$$y_{k-1}'' = -6a_k h_k + 2b_k \quad \Longrightarrow \quad a_k = \frac{y_k'' - y_{k-1}''}{6h_k}, \quad \forall k = 1, \ldots, n.$$

Da condição de interpolação $\mathcal{S}_3(x_k) = y_k$, concluímos que

$$y_k = s_k(x_k) = d_k \quad \Longrightarrow \quad d_k = y_k, \quad \forall k = 1, \ldots, n.$$

Além disso, da continuidade de $\mathcal{S}_3$, temos

$$\begin{aligned} y_{k-1} &= s_{k-1}(x_{k-1}) = s_k(x_{k-1}) \\ &= a_k(x_{k-1} - x_k)^3 + b_k(x_{k-1} - x_k)^2 + c_k(x_{k-1} - x_k) + d_k \\ &= -a_k h_k^3 + b_k h_k^2 - c_k h_k + d_k, \end{aligned}$$

em que $h_k = x_k - x_{k-1}$. Isolando c_k, obtemos

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{h_k}\left[-a_k h_k^3 + b_k h_k^2 + d_k - y_{k-1}\right] \\ &= -a_k h_k^2 + b_k h_k + \frac{d_k - y_{k-1}}{h_k} \end{aligned}$$

Substituindo as expressões para a_k, b_k e d_k, concluímos que

$$c_k = \frac{h_k}{6}\left(2y_k'' + y_{k-1}\right) + \frac{y_k - y_{k-1}}{h_k}, \quad \forall k = 1, \ldots, n.$$

Concluindo, os coeficientes a_k, b_k, c_k e d_k em

$$s_k(x) = a_k(x - x_k)^3 + b_k(x - x_k)^2 + c_k(x - x_k) + d_k,$$

da spline cúbica natural satisfazem

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{y_k'' - y_{k-1}''}{6h_k}, \\
b_k &= \frac{y_k''}{2}, \\
c_k &= \frac{y_k - y_{k-1}}{h_k} + \frac{2h_k y_k'' + y_{k-1}'' h_k}{6}, \\
d_k &= y_k,
\end{aligned}$$

para todo $k = 1, \ldots, n$.

Agora, $y_0, y_1, \ldots, y_n$ são dados num problema de interpolação.

Resta determinar $y_0'', y_1'', \ldots, y_n''$.

Na spline natural, $y_0'' = 0$ e $y_n'' = 0$. Os valores $y_1'', y_2'', \ldots, y_{n-1}''$ são determinados da continuidade de $\mathcal{S}_3'$.

Com efeito, da condição

$$s_k'(x_k) = s_{k+1}'(x_k), \quad \forall k = 1, 2, \ldots, n-1,$$

deduzimos

$$\begin{aligned} c_k &= 3a_{k+1}(x_k - x_{k+1})^2 + 2b_{k+1}(x_k - x_{k+1}) + c_{k+1} \\ &= 3a_{k+1}h_{k+1} + 2b_{k+1}h_{k+1} + c_{k+1}, \quad \forall k = 1, \ldots, n-1, \end{aligned}$$

em que $h_{k=1} = x_{k+1} - x_k$.

Substituindo as expressões para $c_k, a_{k+1}, b_{k+1}, c_{k+1}$ e agrupando os termos, encontramos

$$h_k y_{k-1}'' + 2(h_k + h_{k+1}) y_k'' + h_{k+1} y_{k+1}'' = 6\left(\frac{y_{k+1} - y_k}{h_{k+1}} - \frac{y_k - y_{k-1}}{h_k}\right),$$

para $k = 1, \ldots, n-1$.

Equivalentemente, temos o sistema linear tridiagonal $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, com $n-1$ equações, em que

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2(h_1+h_2) & h_2 & & & & \\ h_2 & 2(h_2+h_3) & h_3 & & & \\ & & h_3 & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & & h_{n-1} \\ & & & & h_{n-1} & 2(h_{n-1}+h_n) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} y_1'' \\ y_2'' \\ \vdots \\ y_{n-1}'' \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{b} = 6 \begin{bmatrix} \frac{y_2-y_1}{h_2} - \frac{y_1-y_0}{h_1} \\ \frac{y_3-y_2}{h_3} - \frac{y_2-y_1}{h_2} \\ \vdots \\ \frac{y_n-y_{n-1}}{h_n} - \frac{y_{n-1}-y_{n-2}}{h_{n-1}} \end{bmatrix}$$

Resolvendo o sistema linear $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, encontramos os valores $y_1'', \ldots, y_{n-1}''$.

Exemplo 3

Determine a spline cúbica natural $\mathcal{S}_3$ que interpola a tabela

x	0	1/4	1/2	3/4	1
y	1	2	1	0	1

e calcule $\mathcal{S}_3(0.35)$.

Exemplo 3

Determine a spline cúbica natural $\mathcal{S}_3$ que interpola a tabela

x	0	1/4	1/2	3/4	1
y	1	2	1	0	1

e calcule $\mathcal{S}_3(0.35)$.

Resposta: Primeiro, resolvemos o sistema linear

$$\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1'' \\ y_2'' \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -48 \\ 0 \\ 48 \end{bmatrix}$$

cuja solução fornece

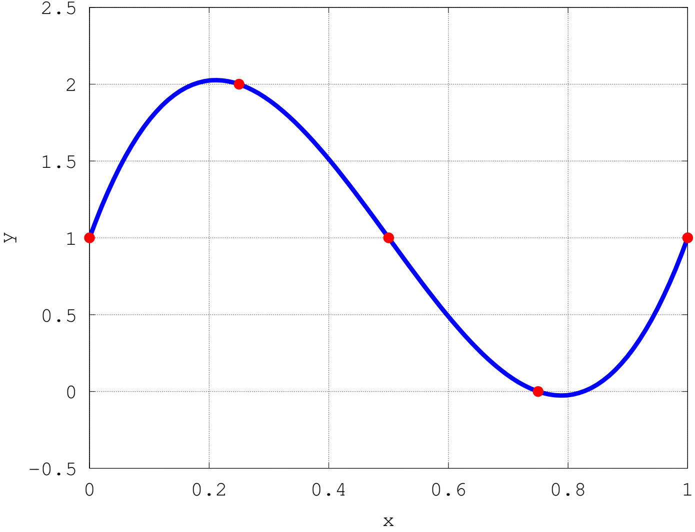
$$y_0'' = 0, \quad y_1'' = -48, \quad y_2'' = 0, \quad y_3'' = 48 \quad \text{e} \quad y_4'' = 0.$$

Com esses valores, concluímos que a spline cúbina natural que interpola a tabela é

$$\mathcal{S}_3(x) = \begin{cases} 1 + 6x - 21x^3, & 0 \le x \le \frac{1}{4}, \\ 2 - 24(x - \frac{1}{4})^2 + 32(x - \frac{1}{4})^3, & \frac{1}{4} \le x \le \frac{1}{2}, \\ 1 - 6(x - \frac{1}{2}) + 32(x - \frac{1}{2})^3, & \frac{1}{2} \le x \le \frac{3}{4}, \\ 24(x - \frac{3}{4})^2 - 32(x - \frac{3}{4})^3, & \frac{3}{4} \le x \le 1. \end{cases}$$

Finalmente, como $0.35 \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$, temos que

$$\mathcal{S}_3(0.35) = 2 - 24(0.1)^2 + 32(0.1)^3 = 1.792.$$



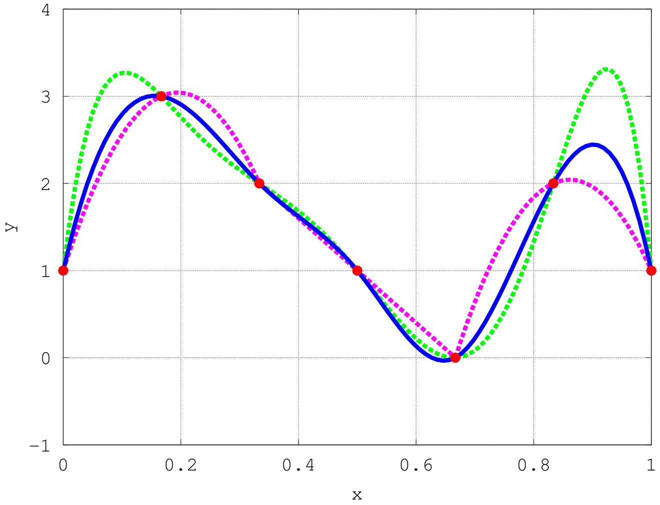
Spline cúbica natural $\mathcal{S}_3$.

Exemplo 4

Considere a tabela

x	0	1/6	1/3	1/2	2/3	5/6	1
f	1	3	2	1	0	2	1

Compare graficamente o polinômio interpolador, o polinômio interpolador quadrático por partes com a spline cúbica natural que interpola os pontos.



Polinômio interpolador de grau p_6 (verde), o polinômio interpolador quadrático por partes Π_2 (magenta) e spline cúbica natural (azul).

Exemplo 5

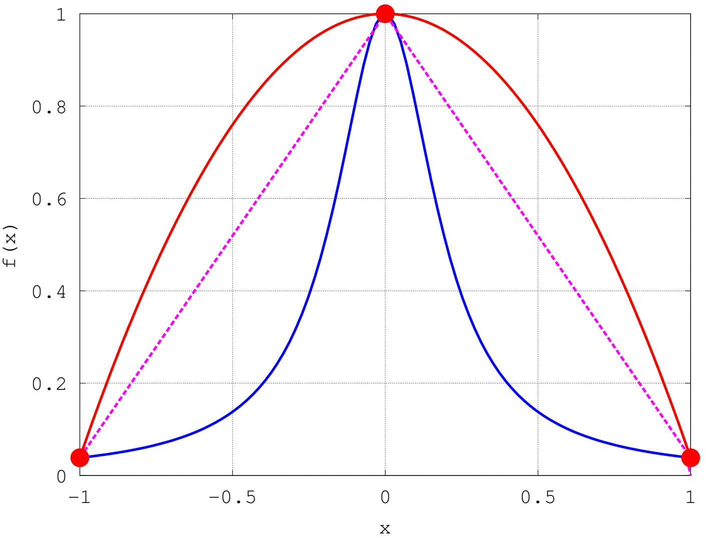
Considere a função

$$f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}, \quad x \in [-1, +1],$$

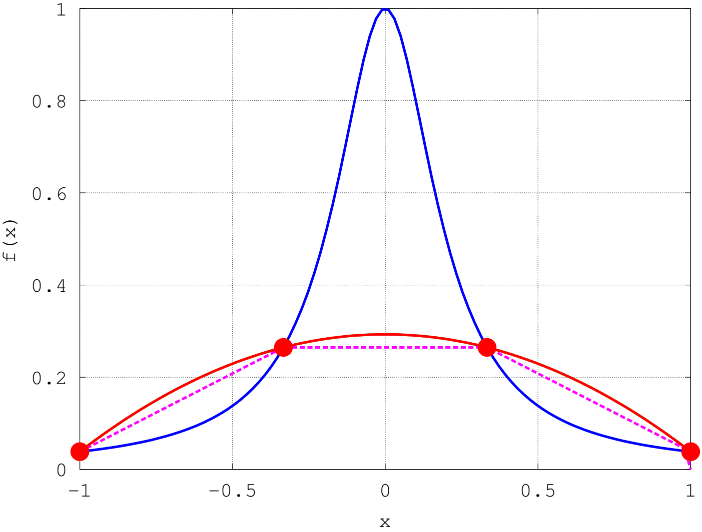
e nós

$$x_k = -1 + \frac{2}{n}k, \quad k = 0, 1, \ldots, n,$$

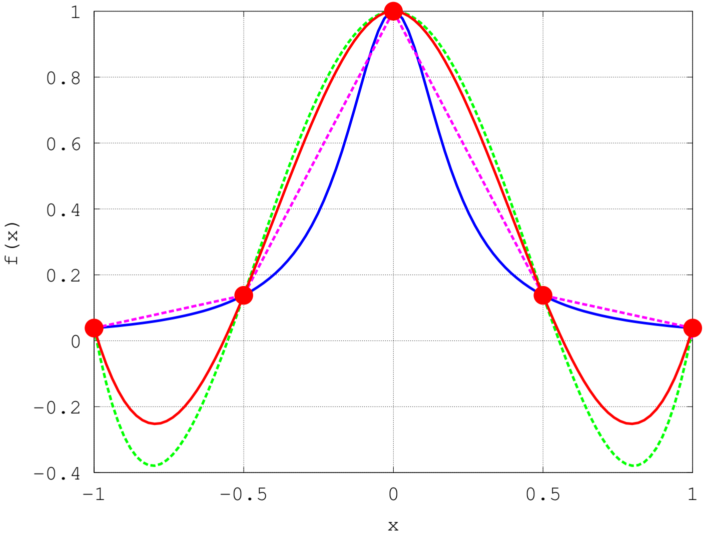
igualmente espaçados no intervalo $[-1, 1]$.
As próximas figuras mostram f (azul), seu polinômio interpolador (verde), o polinômio interpolador linear por partes (magenta) e a spline cúbica natural (vermelho).



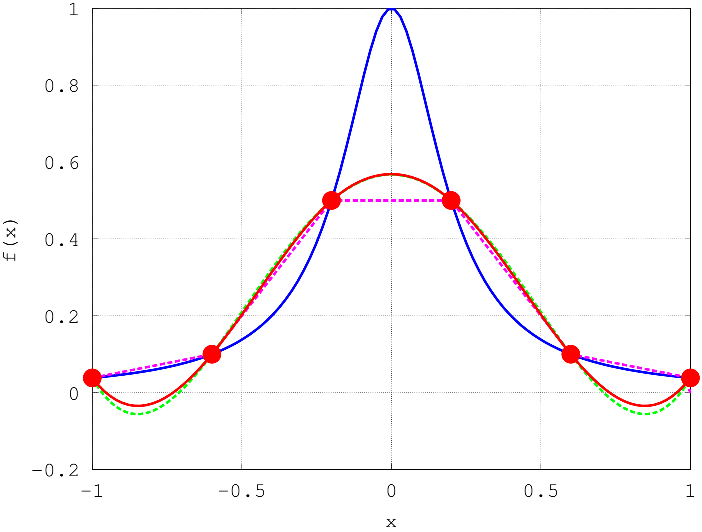
$n = 2.$



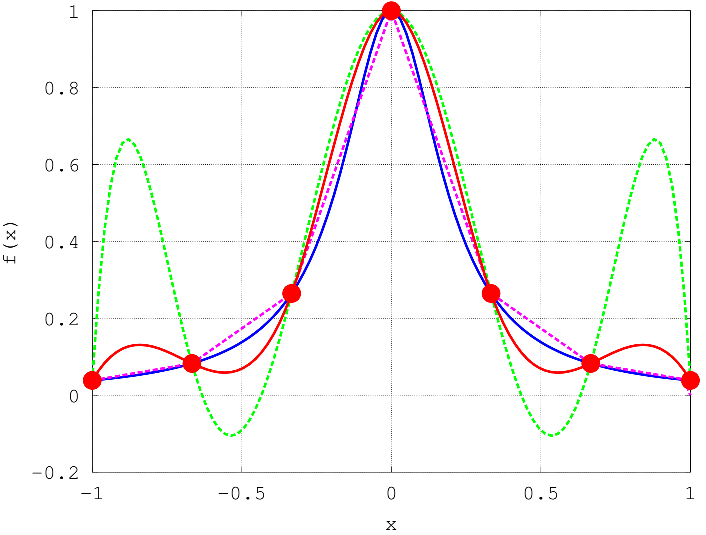
$n = 3.$



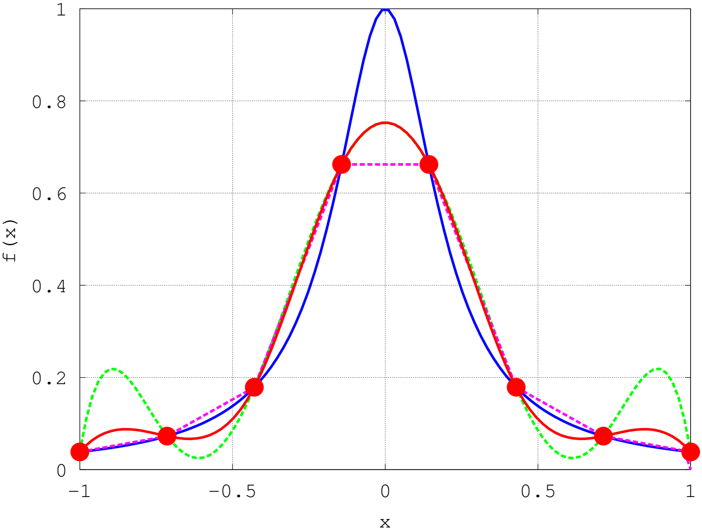
$n = 4.$



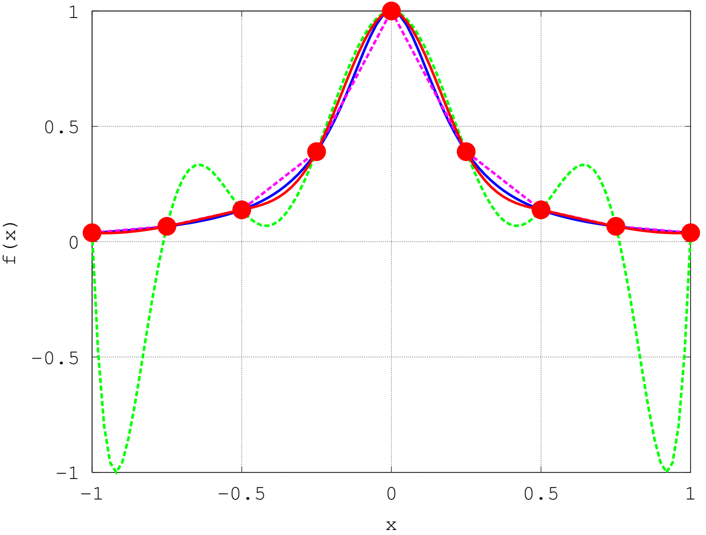
$n = 5.$



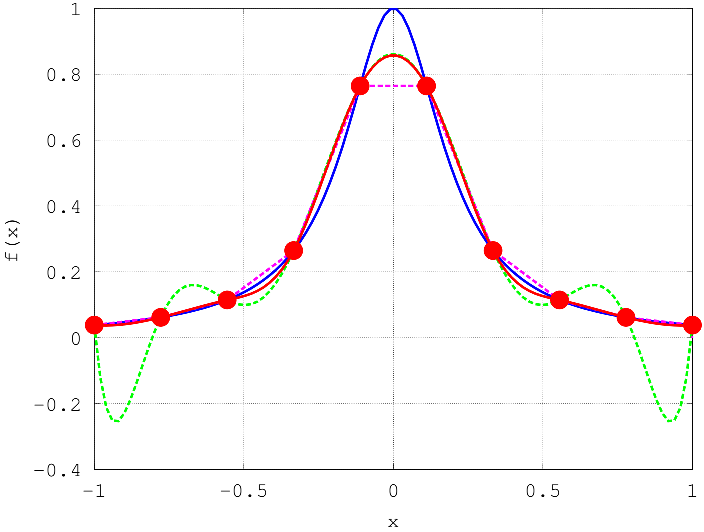
$n = 6.$



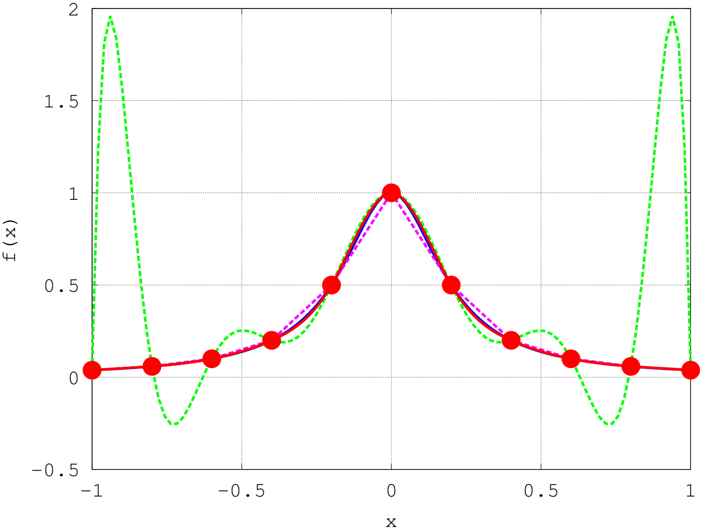
$n = 7.$



$n = 8.$



$n = 9.$



$n = 10.$

Considerações Finais

Considere um conjunto de pontos $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$.

Um polinômio por partes Π_m é uma função contínua em $[x_0, x_n]$ tal que Π_m é um polinômio de grau $\leq m$ em cada um dos subintervalos $[x_{k_1}, x_k]$, para $k = 1, \ldots, n$.

Pode-se mostrar que $\Pi_m \to f$ se f for suficientemente suave. Porém, Π_m não é necessariamente suave!

Uma spline cúbica $\mathcal{S}_3$ é um polinômio cúbico por partes que com derivadas $\mathcal{S}_3'$ e $\mathcal{S}_3''$ contínuas em $[x_0, x_n]$.

A spline cúbica que interpola um conjunto de pontos $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$ é obtida resolvendo um sistema linear tridiagonal de dimensão $(n-1)$.