Aula 21
Interpolação Inversa, Fenômeno de Runge e os Nós de Chebyshev.

MS211 - Cálculo Numérico

Marcos Eduardo Valle

Departamento de Matemática Aplicada
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Universidade Estadual de Campinas

Nas aulas anteriores, vimos o problema de interpolação que consiste em determinar um polinômio p_n, de grau menor ou igual a n, tal que

$$p_n(x_k) = y_k, \quad \forall k = 0, 1, \ldots, n,$$

em que $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ são dados.

Se $y_k = f(x_k)$, em que f é uma função com derivadas até ordem $n+1$ contínuas, então

$$f(x) - p_n(x) = \prod_{k=0}^{n}(x - x_k)\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}, \quad \forall x \in [x_0, x_n] \text{ para } \xi \in [x_0, x_n].$$

Além disso, o erro da interpolação polinomial satisfaz

$$\mathcal{E}_n(x) \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\left|\prod_{k=0}^{n}(x - x_k)\right|,$$

em que

$$M_{n+1} = \max_{x \in [x_0, x_n]} |f^{(n+1)}(x)|.$$

Em particular, se $x_0, x_1, \ldots, x_n$ forem pontos igualmente espaçados, então

$$\mathcal{E}_n(x) \leq \frac{M_{n+1} h^{n+1}}{4(n+1)},$$

em que $h = x_{k+1} - x_k$.

Se temos apenas uma tabela

x	x_0	x_1	$\ldots$	x_n
y	y_0	y_1	$\ldots$	y_n

então

$$\mathcal{E}_n(x) \approx \prod_{k=0}^{n} |x - x_k| \begin{pmatrix} \text{máximo do valor absoluto das} \\ \text{diferenças divididas de ordem } n+1 \end{pmatrix}$$

Escolha do Grau do Polinômio Interpolador

A tabela das diferenças divididas pode auxiliar na escolha do grau do polinômio interpolador.

Especificamente, o polinômio de grau k aproximará bem a função se as diferenças divididas de ordem k são praticamente constantes ou se as diferenças divididas de ordem $k + 1$ são próximas de zero.

Exemplo 1

Considere a função $f(x) = \sqrt{x}$ cuja tabela das diferenças dividas é:

x	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2
1	1		
		0.5	
1.01	1.005		0
		0.5	
1.02	1.01		-0.5
		0.49	
1.03	1.0149		0
		0.49	
1.04	1.0198		0
		0.49	
1.05	1.0247		

Dessa forma, dizemos que um polinômio de grau 1 fornece uma boa aproximação par $f(x) = \sqrt{x}$ em $[1, 1.05]$.

Interpolação Inversa

Problema:

Considere uma tabela

x	x_0	x_1	$\dots$	x_n
$y = f(x)$	$y_0 = f(x_0)$	$y_1 = f(x_1)$	$\dots$	$y_n = f(x_n)$

Dado $\eta \in (y_0, y_n)$, determine $\xi \in (x_0, x_n)$ tal que $f(\xi) = \eta$.

Esse problema pode ser resolvido:

- Determinando o polinômio p_n que interpola f em $x_0, x_1, \dots, x_n$ e, em seguida, encontrando ξ tal que $p_n(\xi) = \eta$.
  Nesse caso, porém, não temos nenhuma estimativa sobre o erro.
- Utilizando interpolação inversa.

Se $f(x)$ é inversível num intervalo contendo η, então podemos determinar o polinômio q_n que interpola f^{-1} em $y_0, y_1, \ldots, y_n$ e definimos $\xi = q_n(\eta)$.

Nesse caso, podemos usar as fórmulas anteriores para estimar o erro da interpolação inversa!

Uma condição para que uma função contínua f seja inversível em $[x_0, x_n]$ é que ela seja monótona (crescente ou decrescente).

Dada uma tabela, admitimos que f é **crescente** se

$$y_0 < y_1 < \ldots < y_n,$$

e **decrescente** se

$$y_0 > y_1 > \ldots > y_n.$$

Exemplo 2

Considere a tabela

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$y = e^x$	1	1.1052	1.2214	1.3499	1.4918	1.6487

Determine ξ tal que $e^{\xi} = 1.3165$ usando interpolação inversa quadrática e apresente uma estimativa para o erro.

Exemplo 2

Considere a tabela

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$y = e^x$	1	1.1052	1.2214	1.3499	1.4918	1.6487

Determine ξ tal que $e^\xi = 1.3165$ usando interpolação inversa quadrática e apresente uma estimativa para o erro.

Resposta: O polinômio q_2 que interpola f^{-1} em

$$y_0 = 1.2214, \quad y_1 = 1.3499 \quad \text{e} \quad y_2 = 1.4918,$$

é

$$q_2(y) = 0.2 + (y - 1.2214)\Big(0.7782 - 0.2718(y - 1.3499)\Big).$$

Assim,

$$\xi \approx q_2(1.3165) = 0.27487.$$

Sabemos que $e^{\xi} = 1.3165 \iff \xi = \ln(1.3165) = 0.27498$.
Logo, o erro da interpolação inversa é

$\mathcal{E}_2(1.3165) = |\ln(1.3165) - q_2(1.3165)| = 1.0655 \times 10^{-4} = 0.0001$.

Além disso, se $g(y) = \ln(y)$, então $g'''(y) = \frac{2}{y^3}$. Assim,

$$M_3 = \max_{1.2214<y<1.4918} \left| \frac{2}{y^3} \right| = \frac{2}{(1.2214)^3} = 1.0976.$$

Logo, da estimativa

$$\mathcal{E}_2(y) \leq |(y - y_0)(y - y_1)(y - y_2)| \frac{M_3}{3!},$$

concluímos que

$$\mathcal{E}_2(1.3165) \leq 1.0186 \times 10^{-4} = 0.0001.$$

Observe que $1.0655 \times 10^{-4} \not\leq 1.0186 \times 10^{-4}$ pois estamos trabalhando com apenas 4 casas após a virgula!

Fenômeno de Runge

Seja p_n o polinômio que interpola f nos pontos

$$x_k = a + \frac{b-a}{n}k, \quad k = 0, 1, \ldots, n,$$

igualmente espaçados do intervalo $[a, b]$.

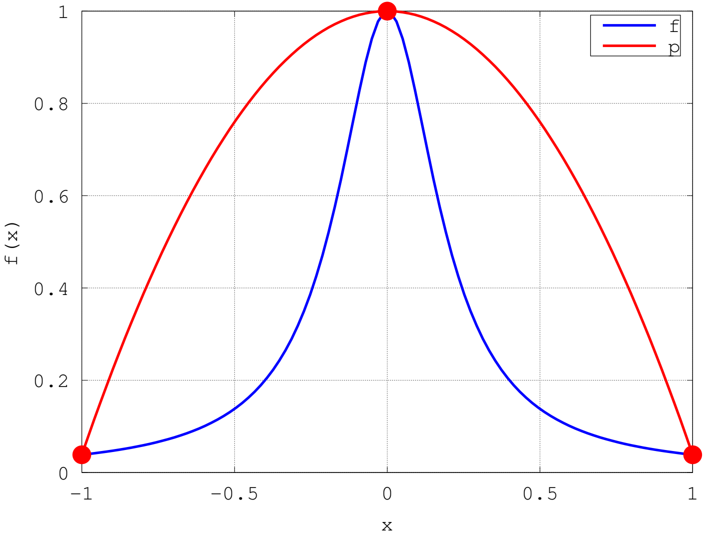
Será que obtemos aproximações melhores de f aumentando o número n de pontos? Em outras palavras, será que p_n converge para f quando $n \to \infty$?

Exemplo 3

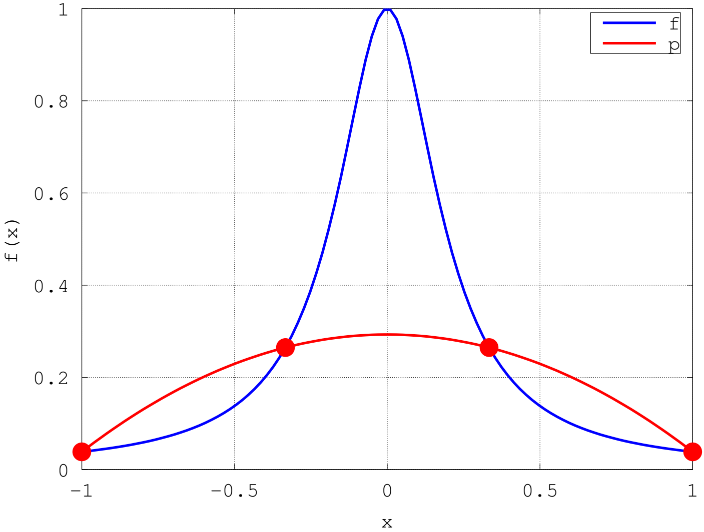
Considere a função

$$f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}, \quad x \in [-1, +1].$$

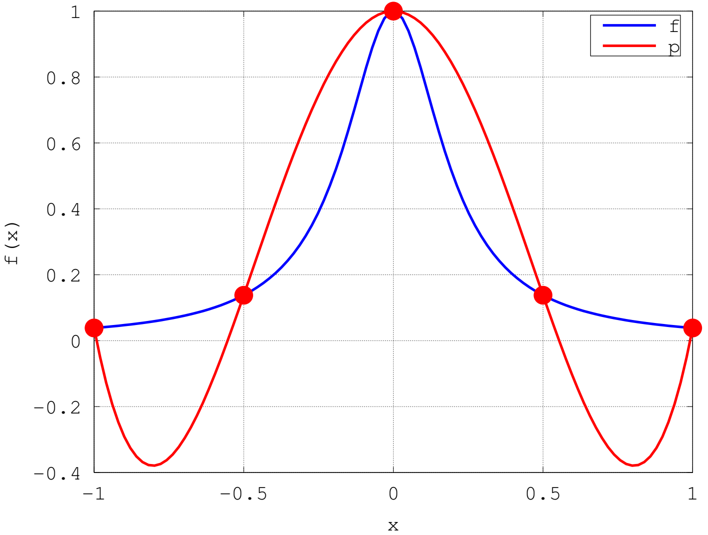
As próximas figuras mostram f e seu polinômio interpolador em nós igualmente espaçados no intervalo $[-1, 1]$.



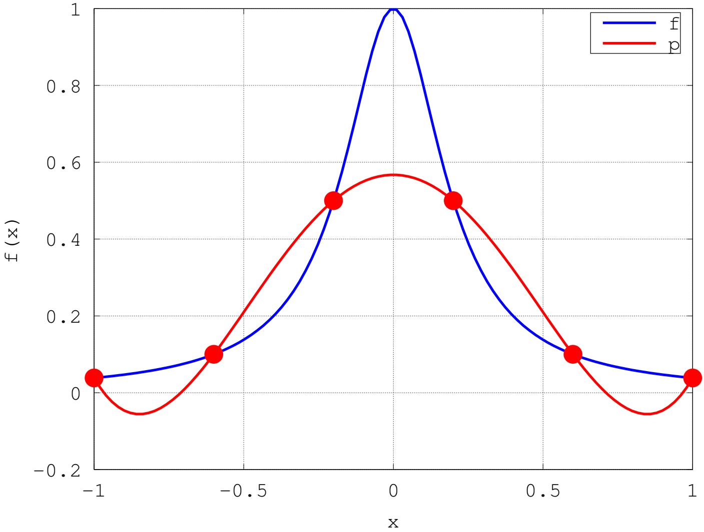
Polinômio de grau 2.



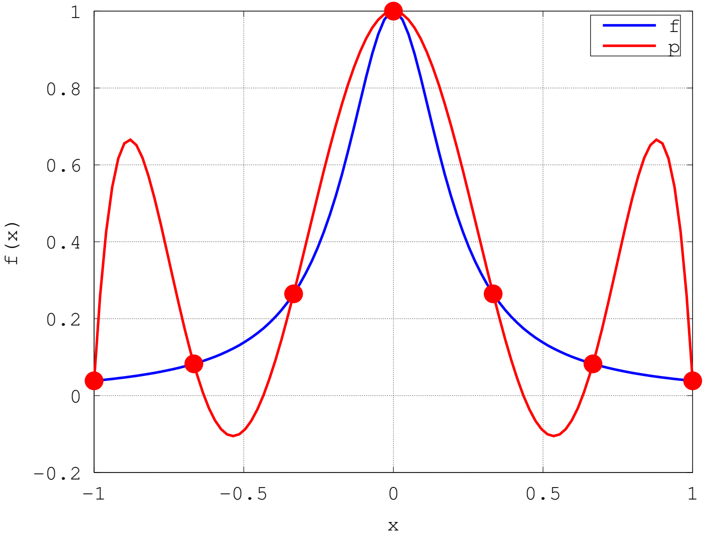
Polinômio de grau 3.



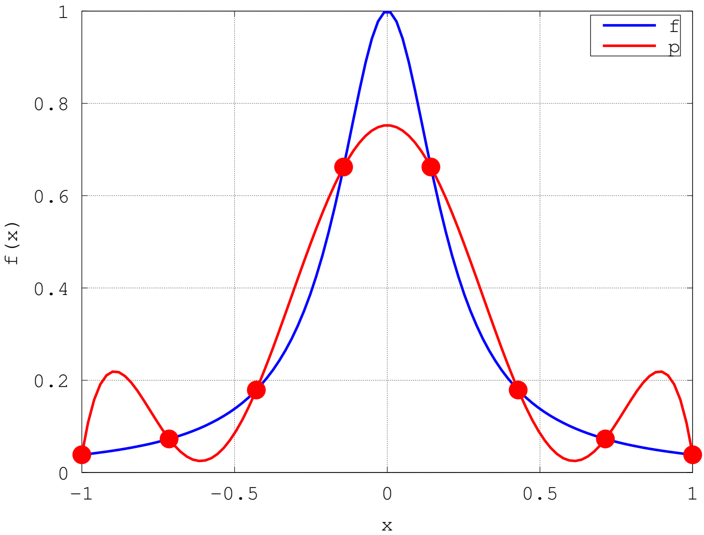
Polinômio de grau 4.



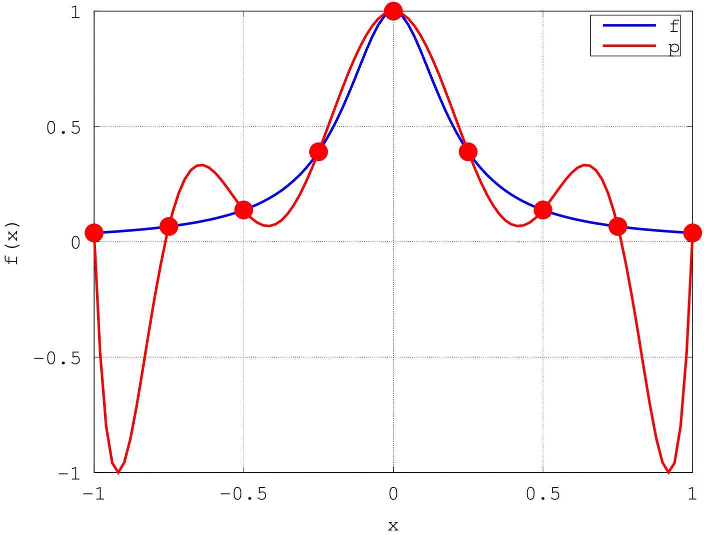
Polinômio de grau 5.



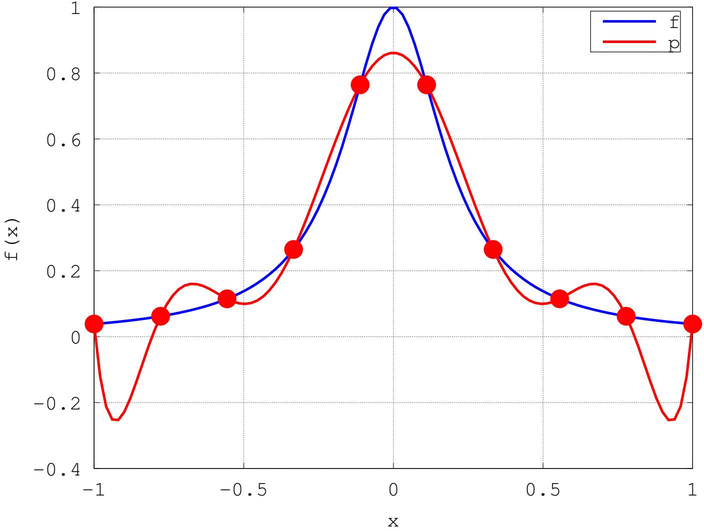
Polinômio de grau 6.



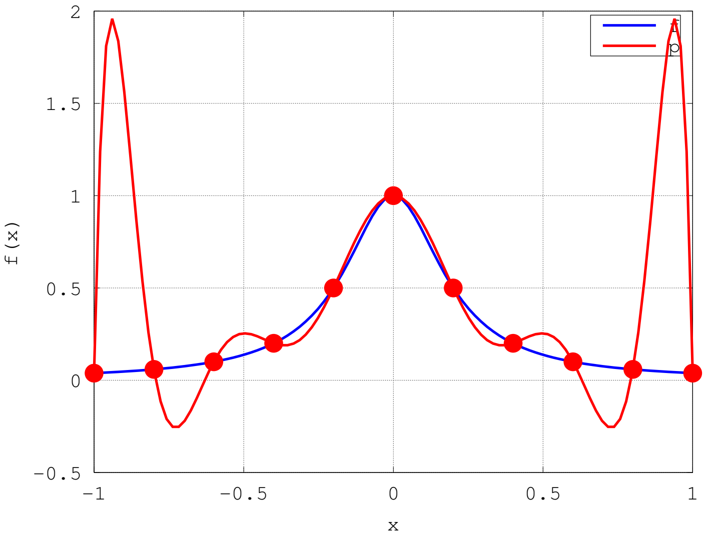
Polinômio de grau 7.



Polinômio de grau 8.



Polinômio de grau 9.



Polinômio de grau 10.

O exemplo anterior mostra o chamado **fenômeno de Runge.**

Respondendo as perguntas anteriores, não podemos garantir que $p_n \to f$ quando $n \to \infty$.

Com efeito, pode-se mostrar que

$$\max_{x \in [x_0, x_n]} |f(x) - p_n(x)|,$$

torna-se arbitrariamente grande para certas funções f, incluindo a função do exemplo anterior!

Lembre-se: Essas observações são válidas considerando pontos igualmente espaçados.

Nós de Chebyshev

Podemos obter um polinômio p_n que aproxima melhor f selecionando os nós de interpolação $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

Em particular, os nós de Chebyshev dados por

$$x_k = \frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2} \cos\left(\frac{k}{n}\pi\right), \quad \forall k = 0, 1, \ldots, n,$$

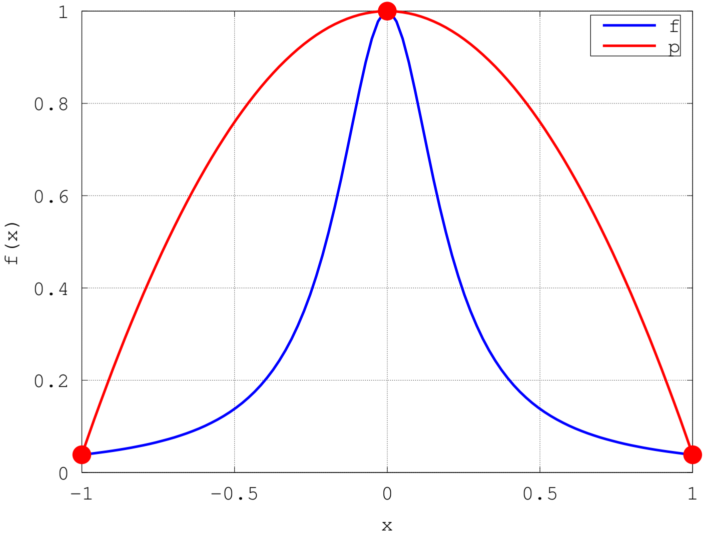
distribui o erro homogeneamente no intervalo $[a, b]$.

Alternativamente, pode-se considerar os pontos

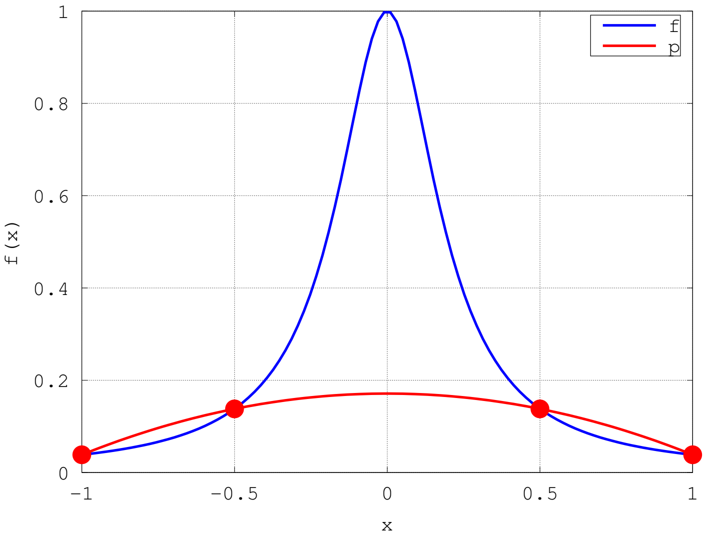
$$x_k = \frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2} \cos\left(\frac{2k+1}{n+1}\frac{\pi}{2}\right), \quad \forall k = 0, 1, \ldots, n,$$

Exemplo 4

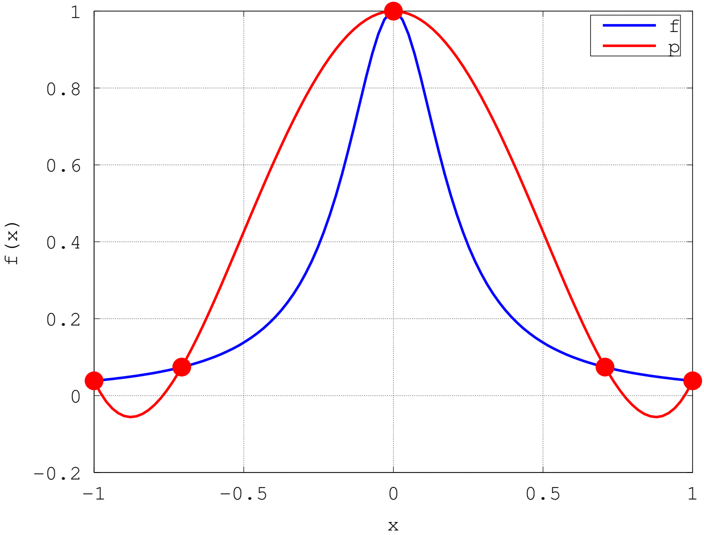
As próximas figuras mostram $f(x) = 1/(1+25x^2)$ e seu polinômio interpolador em nós de Chebyshev.



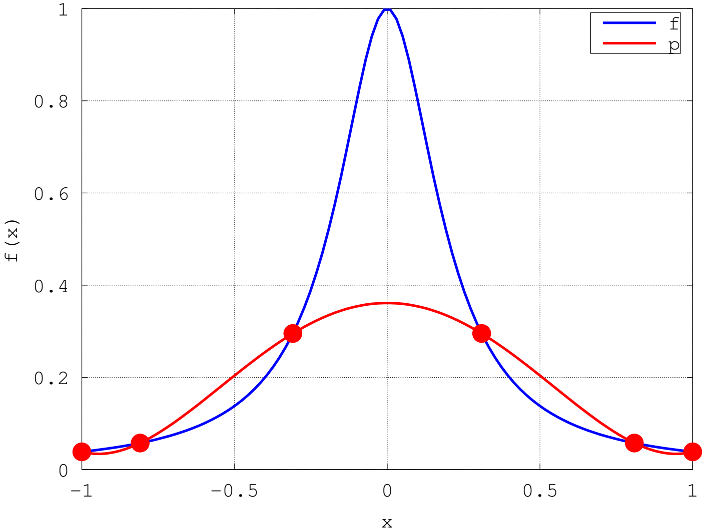
Polinômio de grau 2.



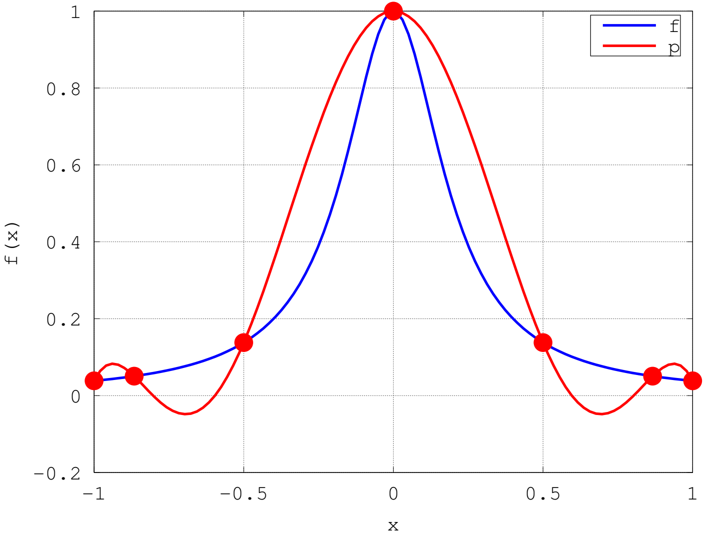
Polinômio de grau 3.



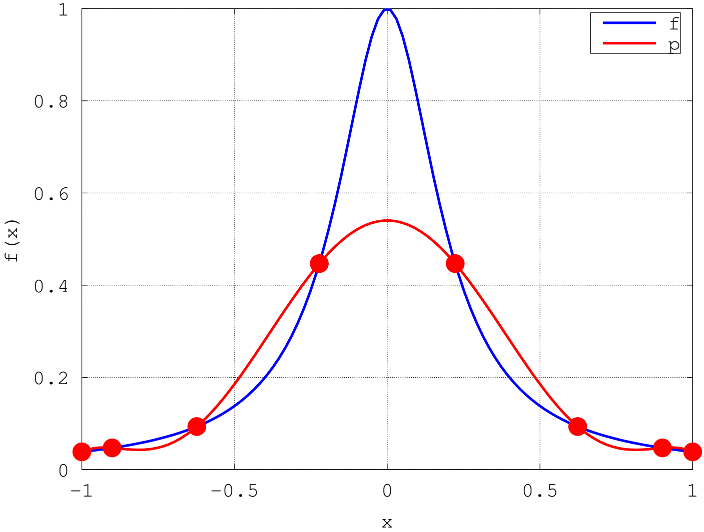
Polinômio de grau 4.



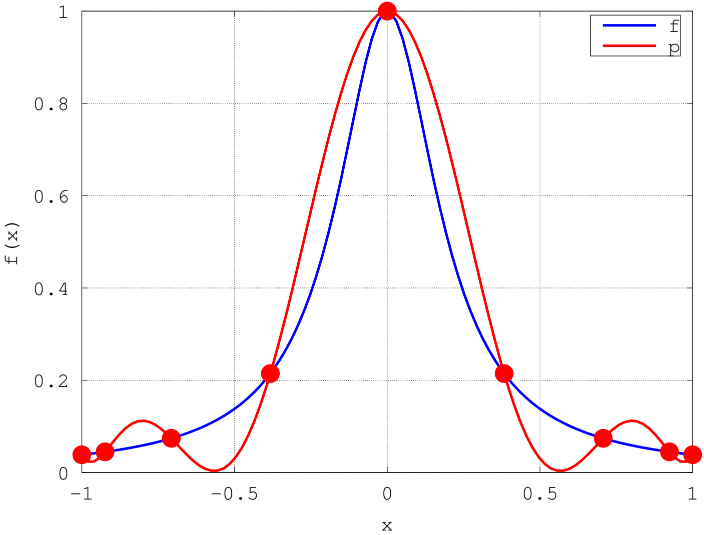
Polinômio de grau 5.



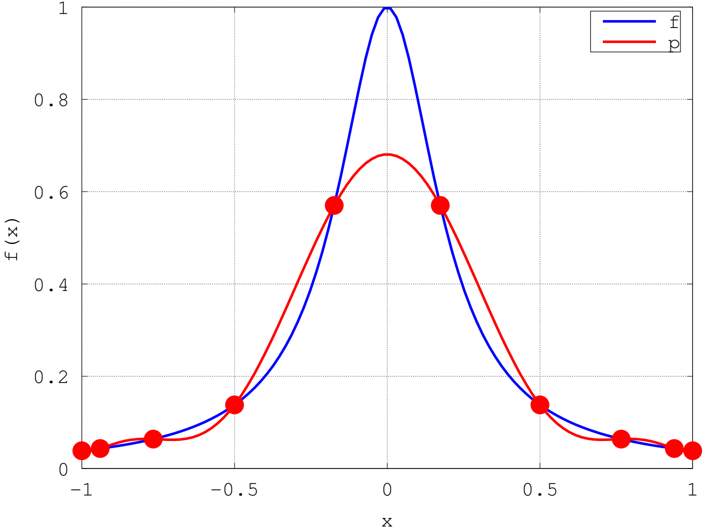
Polinômio de grau 6.



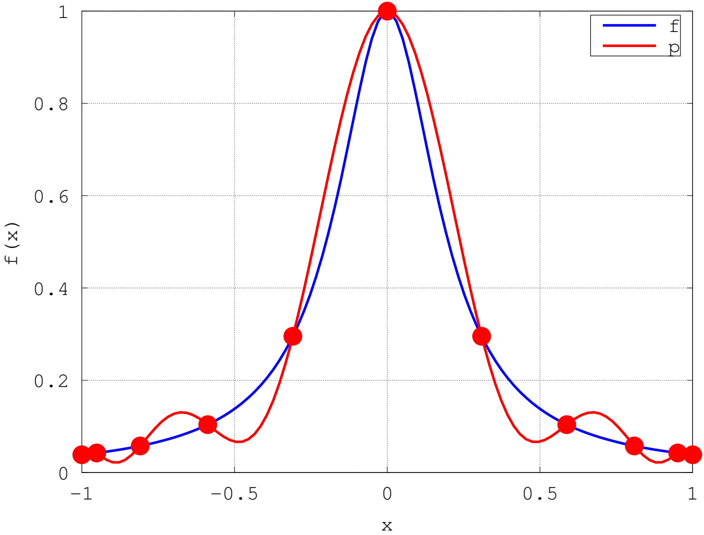
Polinômio de grau 7.



Polinômio de grau 8.



Polinômio de grau 9.



Polinômio de grau 10.

Considerações Finais

Na aula de hoje, discutimos os seguinte itens:

- O grau do polinômio interpolador pode ser estimado olhando para a tabela das diferenças divididas.

- A interpolação inversa, ou seja, interpolação da função inversa f^{-1}, pode ser usada para determinar ξ tal que $f(\xi) = \eta$.

- O fenômeno de Runge revela que, considerando pontos igualmente espaçados, não podemos garantir que $p_n \to f$ quando $n \to \infty$.

- Podemos obter melhores polinômios interpoladores utilizando os nós de Chebyshev.