Aula 20
Análise do Erro na Interpolação Polinomial.

MS211 - Cálculo Numérico

Marcos Eduardo Valle

Departamento de Matemática Aplicada
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Universidade Estadual de Campinas

Introdução

Na aula anterior, vimos o problema de interpolação que consiste em determinar uma função φ tal que

$$\varphi(x_k) = y_k, \quad \forall k = 0, 1, \ldots, n,$$

em que $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ são dados.

Basicamente, vimos três formas para a interpolação polinomial:

1. **Forma de Vandermonde** – que apesar da simplicidade teórica, é computacionalmente caro além de ser numericamente instável.
2. **Forma de Lagrange** – que é rica do ponto de vista teórico mas também é computacionalmente cara.
3. **Forma de Newton** que, em conjunto com a forma dos parênteses encaixados, é o forma computacionalmente mais barada para determinar o polinômio interpolador.

Definição do Erro de Interpolação

Na aula de hoje, vamos fazer uma análise do erro na interpolação polinomial.

Formalmente, vamos assumir os pontos tabelados $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$ são tais que

$$y_k = f(x_k), \quad \forall k = 0, 1, \ldots, n,$$

em que f é a função que iremos aproximar por um polinômio interpolador p_n de grau menor ou igual à n.

O erro $\mathcal{E}_n$ da interpolação polinomial em $x \in [x_0, x_n]$ é

$$\mathcal{E}_n(x) = |f(x) - p_n(x)|.$$

Teorema 1 (Erro da Interpolação Polinomial)

Considere $n+1$ pontos $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$, com $n \geq 0$. Seja f uma função com derivadas até ordem $n+1$ contínuas no intervalo $[x_0, x_n]$. Se p_n é o polinômio que interpola f nos pontos $x_0, \ldots, x_n$, então

$$f(x) - p_n(x) = \prod_{k=0}^{n}(x - x_k)\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}, \quad \forall x \in [x_0, x_n],$$

em que $x_0 \leq \xi \leq x_n$.

Demonstração do Teorema 1

Primeiramente, vamos definir

$$\pi(x) = \prod_{k=0}^{n}(x - x_k) = (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n)$$
$$= x^{n+1} + \beta_n x^n + \dots + \beta_1 x + \beta_0.$$

Vamos mostrar que

$$f(x) - p_n(x) = \pi(x)\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}, \quad \forall x \in [x_0, x_n].$$

Se $x = x_k$, então $\pi(x) = 0$. Portanto, $f(x_k) = p_n(x_k)$, como é de se esperar uma vez que p_n interpola f em x_k.

Se $x \neq x_k$, defina a função auxiliar

$$\mathcal{A}(x) = f(t) - p_n(x) - \frac{f(x) - p_n(x)}{\pi(x)}\pi(t), \quad \forall t \in [x_0, x_n].$$

Note que

$$\mathcal{A}(x_0) = 0, \mathcal{A}(x_1) = 0, \ldots, \mathcal{A}(x_n) = 0 \quad \text{e} \quad \mathcal{A}(x) = 0.$$

Portanto, $\mathcal{A}$ possui $n+2$ raízes em $[x_0, x_n]$.

Pelo teorema de Rolle (caso particular do teorema do valor médio), $\mathcal{A}'$ possui $n+1$ raízes em (x_0, x_n).

Novamente pelo teorema de Rolle, $\mathcal{A}''$ possui n raízes em (x_0, x_n).

Aplicando repetidas vezes o teorema de Rolle, concluímos que $\mathcal{A}^{(n+1)}$ possui uma raiz $\xi \in (x_0, x_n)$.

Concluindo,

$$\mathcal{A}^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - \frac{f(x) - p_n(x)}{\pi(x)}(n+1)! = 0.$$

Logo,

$$f(x) - p_n(x) = \pi(x)\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}, \quad \forall x \in [x_0, x_n].$$

Observação

Lembre-se a aproximação de Taylor de f em x_0 é

$$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \ldots + f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n.$$

Sobretudo, tem-se

$$f(x) - T_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

Observe que essa aproximação é construída considerando apenas x_0.

Na interpolação polinomial, a aproximação p_n de f é feita considerando $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Portanto,

$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)\ldots(x - x_n).$$

Teorema 2 (Majorante do Erro da Interpolação Polinomial)

Considere $n+1$ pontos $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ e f uma função com derivadas até ordem $n+1$ contínuas no intervalo $[x_0, x_n]$. Se p_n é o polinômio que interpola f nos pontos $x_0, \ldots, x_n$, então o erro da interpolação polinomial satisfaz

$$\mathcal{E}_n(x) \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \left| \prod_{k=0}^{n} (x - x_k) \right|,$$

em que

$$M_{n+1} = \max_{x \in [x_0, x_n]} |f^{(n+1)}(x)|.$$

Demonstração do Teorema 2

Sendo $f^{(n+1)}$ contínua em $[x_0, x_n]$, $|f^{(n+1)}$ admite um valor máximo M_{n+1}. Consequentemente, pelo Teorema 1

$$\mathcal{E}(x) = \left| \prod_{k=0}^{n} (x - x_k) \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \right| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \left| \prod_{k=0}^{n} (x - x_k) \right|,$$

pois $|f^{(n+1)}(\xi)| \leq M_{n+1}$.

Teorema 3 (Majorante do Erro da Interpolação Polinomial)

Considere $n+1$ *pontos igualmente espaçados*

$$x_k = x_0 + kh, \quad \forall k = 0, 1, \dots, n,$$

e f *uma função com derivadas até ordem* $n+1$ *contínuas no intervalo* $[x_0, x_n]$*. Se* p_n *é o polinômio que interpola* f *nos pontos* $x_0, \dots, x_n$*, então o erro da interpolação polinomial satisfaz*

$$\mathcal{E}_n(x) \leq \frac{M_{n+1} h^{n+1}}{4(n+1)},$$

em que

$$M_{n+1} = \max_{x \in [x_0, x_n]} |f^{(n+1)}(x)|.$$

Exemplo 4

Suponha que desejamos obter ln(3.7) por interpolação linear conhecendo a seguinte tabela:

x	1	2	3	4
$\ln(x)$	0	0.6931	1.0986	1.3863

Apresente a aproximação para ln(3.7) e uma estimativa para o seu erro.

Exemplo 4

Suponha que desejamos obter ln(3.7) por interpolação linear conhecendo a seguinte tabela:

x	1	2	3	4
$\ln(x)$	0	0.6931	1.0986	1.3863

Apresente a aproximação para ln(3.7) e uma estimativa para o seu erro.

Resposta: Tomando $x_0 = 3$ e $x_1 = 4$, obtemos

$$p_1(x) = 1.0986 + 0.2877(x - 3).$$

Desse modo, $p_1(3.7) = 1.3000$, enquanto $\ln(3.7) = 1.3083$.
O erro da interpolação polinomial é

$$\mathcal{E}_1(x) = |\ln(3.7) - p_1(3.7)| = 0.0083.$$

Pelos Teoremas 2 e 3 encontramos respectivamente

$$\mathcal{E}_1(x) \leq 0.0117 \quad \text{e} \quad \mathcal{E}_1(x) \leq 0.0139.$$

Estimativa para o Erro de Interpolação Polinomial

Se temos apenas uma tabela

x	x_0	x_1	$\dots$	x_n
y	y_0	y_1	$\dots$	y_n

Nesse caso, o erro da interpolação polinomial $\mathcal{E}_n(x)$ pode ser estimado aproximando $M_{n+1}/(n+1)!$ pelo maior valor absoluto das diferenças divididas de ordem $n+1$, ou seja,

$$\mathcal{E}_n(x) \approx \prod_{k=0}^{n} |x - x_k| \begin{pmatrix}\text{máximo do valor absoluto das} \\ \text{diferenças divididas de ordem } n+1\end{pmatrix}$$

Exemplo 5

Considere a tabela

x	0.2	0.34	0.4	0.52	0.6	0.72
y	0.16	0.22	0.27	0.29	0.32	0.37

(a) Aproxime $f(0.47)$ usando um polinômio de grau 2.

(b) Forneça uma estimativa para o erro de interpolação.

Exemplo 5

Considere a tabela

x	0.2	0.34	0.4	0.52	0.6	0.72
y	0.16	0.22	0.27	0.29	0.32	0.37

(a) Aproxime $f(0.47)$ usando um polinômio de grau 2.

(b) Forneça uma estimativa para o erro de interpolação.

Resposta:

(a) Escolhendo $x_0 = 0.4$, $x_1 = 0.52$ e $x_3 = 0.6$, encontramos

$$p_2(x) = 0.27 + (x - 0.4)\Big(0.1667 + (x - 0.52)1.0415\Big).$$

Logo, $f(0.47) \approx p_2(0.47) = 0.2780$.

(b) O erro de interpolação satisfaz

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_2(0.47) &\approx |(0.47 - 0.4)(0.47 - 0.52)(0.47 - 0.6)18.2492| \\ &= 8.303 \times 10^{-3}.\end{aligned}$$

A estimativa baseada na diferença divida é fundamentada no teorema:

Teorema 6

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n, x] = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}, \quad \forall x \in (x_0, x_n) \quad e \quad \xi \in (x_0, x_n).$$

Demonstração do Teorema 6

Seja p_n o único polinômio que interpola f em $x_0, x_1, \ldots, x_n$ é

$$\begin{aligned} p_n(x) = {} & f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + \ldots \\ & + f[x_0, \ldots, x_n](x - x_0) \ldots (x - x_{n-1}). \end{aligned}$$

Analogamente, a forma de Newton para o polinômio p_{n+1} que interpola f em $x_0, \ldots, x_n, x$ é

$$\begin{aligned} p_{n+1}(\xi) = {} & f[x_0] + f[x_0, x_1](\xi - x_0) + \ldots \\ & + f[x_0, \ldots, x_n](\xi - x_0) \ldots (\xi - x_{n-1}) + \ldots \\ & + f[x_0, \ldots, x_n, x](\xi - x_0) \ldots (\xi - x_{n-1})(x - x_n) \end{aligned}$$

Observe que

$$p_{n+1}(\xi) = p_n(\xi) + f[x_0, \ldots, x_n, x](\xi - x_0) \ldots (\xi - x_{n-1})(\xi - x_n)$$

Além disso, como $p_{n+1}(x) = f(x)$, temos

$$f(x) - p_n(\xi) = f[x_0, \dots, x_n, x](x - x_0) \dots (x - x_{n-1})(x - x_n)$$

Do Teorema 1, temos

$$f(x) - p_n(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n) \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!},$$

em que $\xi \in (x_0, x_n)$.

Comparando as duas equações, concluímos que

$$f[x_0, \dots, x_n, x] = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.$$

Consideraçõs Finais

Na aula de hoje apresentamos uma fórmula para o erro da interpolação polinomial que depende da derivada $f^{(n+1)}$ da função que estamos aproximando.

Apresentamos também majorantes para o erro de interpolação.

Finalmente, vimos que as diferenças divididas podem ser usadas para estimar o erro quando temos apenas uma tabela de pontos (e não conhecemos a função).