Aula 19
Interpolação Polinomial.

MS211 - Cálculo Numérico

Marcos Eduardo Valle

Departamento de Matemática Aplicada
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Universidade Estadual de Campinas

Nas aulas anteriores, vimos o problema de ajuste de curvas pelo método dos quadrados mínimos.

No caso discreto, vimos como encontrar uma função

$$\varphi(x) = \alpha_1 g_1(x) + \alpha_2 g_2(x) + \ldots + \alpha_n g_n(x),$$

que melhor se ajusta a uma tabela

x	x_1	x_2	$\ldots$	x_m
y	y_1	y_2	$\ldots$	y_m

em que $g_1, \ldots, g_n$ são funções escolhidas *a priori*.

O termo "melhor se ajusta" significa que a soma dos quadrados dos desvios $\varphi(x_k) - y_k$ é mínima, ou seja,

$$J(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \sum_{k=1}^{m} \Big(\varphi(x_k) - y_k\Big)^2,$$

é mínimo.

Problema de Interpolação

No problema de interpolação, dada uma tabela

x	x_1	$\dots$	x_n
y	y_1	$\dots$	y_n

com $x_1, x_2, \dots, x_n$ distintos, procuramos uma função φ que **interpola** os pontos tabelados, ou seja, impomos

$$\varphi(x_k) = y_k, \quad \forall k = 1, \dots, m.$$

Os pontos $x_1, x_2, \dots, x_n$ são chamados **nós de interpolação.**

Podemos pensar que

$$y_k = f(x_k), \quad \forall k = 1, \dots, m,$$

em que f é uma função complicada ou desconhecida.

Interpolação Polinomial

Na interpolação polinomial, a função φ que procuramos é um polinômio de grau menor ou igual à n.

Dessa forma, dada uma tabela

x	x_0	x_1	$\dots$	x_n
y	y_0	y_1	$\dots$	y_n

queremos encontrar um polinômio de grau menor ou igual à n, denotado por p_n, tal que

$$p_n(x_k) = y_k, \quad \forall k = 0, 1, \dots, n.$$

Forma de Vandermonde

O polinômio p_n pode ser escrito como

$$p_n(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_n x^n.$$

Dessa forma, devemos encontrar $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tais que

$$p_n(x_k) = \alpha_0 + \alpha_1 x_k + \ldots + \alpha_n x_k^n = y_k, \quad \forall k = 0, 1, \ldots, n,$$

que corresponde à um sistema linear com $n+1$ equações e $n+1$ incógnitas.

Na forma matricial, temos

$$\mathbf{V}\alpha = \mathbf{y},$$

em que

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{bmatrix}$$

é chamada **matriz de Vandermonde** e

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

Pode-se mostrar que $\det(\mathbf{V}) \neq 0$ se os pontos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ forem distintos.

Consequentemente, o sistema $\mathbf{V}\alpha = \mathbf{y}$ admite uma única solução.

Formalmente, vale o teorema:

Teorema 1 (Existência e Unicidade)

Considere pontos $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ com $x_i \neq x_j$ para todo $i \neq j$. Nesse caso, existe um único polinômio interpolador p_n de grau menor ou igual a n tal que $p_n(x_k) = y_k$ para todo $k = 0, 1, \ldots, n$.

Exemplo 2

Use a forma de Vandermonde para encontrar o polinômio de grau menor ou igual à 2 que interpola a tabela

x	-1	0	2
y	4	1	-1

Exemplo 2

Use a forma de Vandermonde para encontrar o polinômio de grau menor ou igual à 2 que interpola a tabela

x	-1	0	2
y	4	1	-1

Resposta: Os coeficientes do polinômio

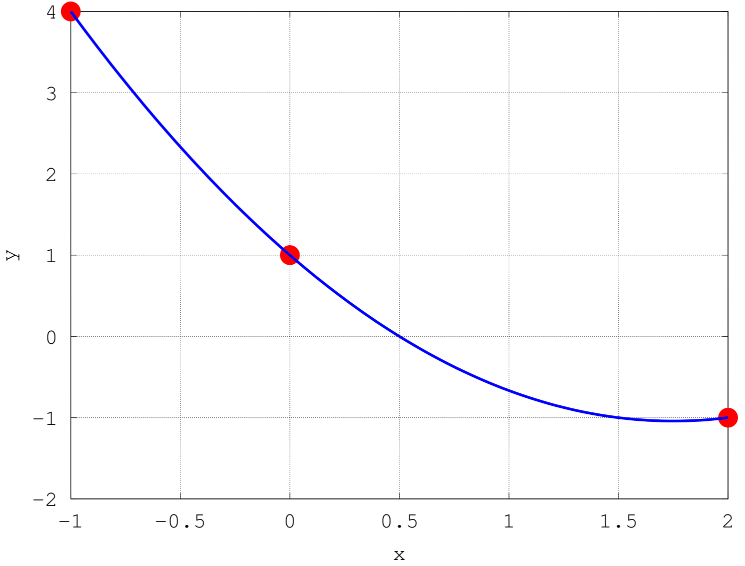
$$p_2(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2,$$

são obtidos resolvendo o sistema linear

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Resolvendo o sistema linear, encontramos o polinômio

$$p_2(x) = 1 - \frac{7}{3}x + \frac{2}{3}x^2.$$


4
3
2
1
0
−1
−2
y
−1
−0.5
0
0.5
1
1.5
2
x

Outras Formas de Interpolação Polinomial

Apesar da simplicidade, a forma de Vandermonde requer a resolução de um sistema linear $n \times n$, em que n denota o grau o polinômio interpolador.

Além disso, a matriz de Vandermonde é mal condicionada. Portanto, o polinômio interpolador obtido pode conter erros de arredondamento.

Existem formas alternativas de encontrar o polinômio interpolador que não utilizam a matriz de Vandermonde.

Com efeito, o polinômio interpolador p_n pode ser escrito como

$$p_n(x) = \alpha_0 g_0(x) + \alpha_1 g_1(x) + \ldots + \alpha_n g_n(x),$$

em que as funções base $g_0, g_1, \ldots, g_n$ são polinômios de grau menor ou igual à n.

O polinômio interpolador é obtido resolvendo o sistema linear $\mathbf{A}\alpha = \mathbf{y}$ em que

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} g_0(x_0) & g_1(x_0) & g_2(x_0) & \ldots & g_n(x_0) \\ g_0(x_1) & g_1(x_1) & g_2(x_1) & \ldots & g_n(x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_0(x_n) & g_1(x_n) & g_2(x_n) & \ldots & g_n(x_n) \end{bmatrix}$$

Na forma de Vandermonde, temos os monômios

$$g_0(x) = 1, \quad g_1(x) = x, \quad \ldots \quad g_n(x) = x^n.$$

Forma de Lagrange

Na forma de Lagrange, as funções base, denotadas por $L_0, L_1, \ldots, L_n$, são tais a matriz do sistema é a identidade.

Note que obtemos a matriz identidade impondo

$$L_i(x_k) = \begin{cases} 1, & i = k, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Agora, essa condição é satisfeita quando

$$L_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\ldots(x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n)}$$
$$= \prod_{k \neq i} \frac{(x - x_k)}{(x_i - x_k)}$$

Usando os polinômios $L_0, L_1, \ldots, L_n$ como funções base, encontramos o sistema linear

$$\mathbf{I}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{y}.$$

Logo, a forma de Lagrange fornece o polinômio interpolador

$$\begin{aligned} p_n(x) &= \alpha_0 g_0(x) + \alpha_1 g_1(x) + \ldots + \alpha_n g_n(x) \\ &= y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + \ldots + y_n L_n(x) \\ &= \sum_{k=0}^{n} y_k L_k(x). \end{aligned}$$

Note que L_i é um polinômio de grau n com raízes $x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$.

Exemplo 3 (Interpolação Linear)

Use a forma de Lagrange para encontrar o polinômio de grau 1 que interpola os pontos (x_0, y_0) e (x_1, y_1).

Exemplo 3 (Interpolação Linear)

Use a forma de Lagrange para encontrar o polinômio de grau 1 que interpola os pontos (x_0, y_0) e (x_1, y_1).

Resposta: Usando a forma de Lagrange, temos

$$p_1(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x),$$

em que

$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \quad \text{e} \quad L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}.$$

Assim,

$$p_1(x) = y_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + y_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y_0(x_1 - x) + (x - x_0)y_1}{x_1 - x_0}$$

Exemplo 4

Use a forma de Lagrange para encontrar o polinômio de grau menor ou igual à 2 que interpola a tabela

x	-1	0	2
y	4	1	-1

Exemplo 4

Use a forma de Lagrange para encontrar o polinômio de grau menor ou igual à 2 que interpola a tabela

x	-1	0	2
y	4	1	-1

Resposta: Primeiramente, temos

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = \frac{x(x-2)}{(-1)(-3)} = \frac{x^2 - 2x}{3},$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} = \frac{(x+1)(x-2)}{(1)(-2)} = \frac{-x^2 + x + 2}{2},$$

e

$$L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{(x+1)x}{(3)(2)} = \frac{x^2 + x}{6}.$$

Exemplo 4

Use a forma de Lagrange para encontrar o polinômio de grau menor ou igual à 2 que interpola a tabela

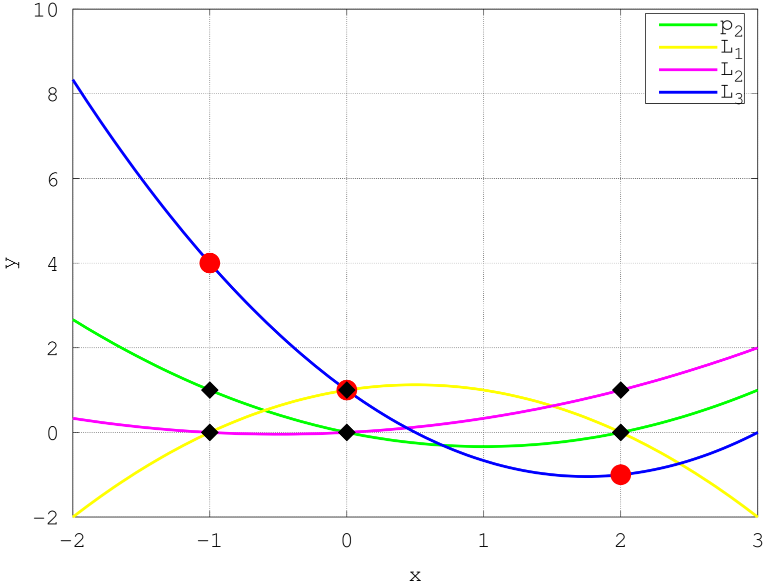
x	-1	0	2
y	4	1	-1

Dessa forma,

$$\begin{aligned} p_2(x) &= y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x) \\ &= 4\frac{x^2 - 2x}{3} + 1\frac{-x^2 + x + 2}{2} + (-1)\frac{x^2 + x}{6} \\ &= \frac{2}{3}x^2 - \frac{7}{3}x + 1, \end{aligned}$$

que é o mesmo polinômio obtido usando a forma de Vandermonde.

Polinômio interpolador p_2 e as funções de Lagrange L_1, L_2 e L_3:



Forma de Newton

Apesar da resolução do sistema linear envolvido na forma de Lagrange ser direta, o cálculo das funções base $L_0, L_1, \ldots, L_n$ é computacionalmente custoso.

No método de Newton, escolhemos funções base de modo que o sistema linear resultante seja triangular inferior.

Especificamente, escolhemos as funções base

$$
\begin{aligned}
N_0(x) &= 1, \\
N_1(x) &= x - x_0, \\
N_2(x) &= (x - x_0)(x - x_1), \\
&\vdots \\
N_n(x) &= (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})
\end{aligned}
$$

Consequentemente, na forma de Newton, o polinômio interpolador é

$$\begin{aligned} p_n(x) = &\alpha_0 + \alpha_1(x - x_0) + \alpha_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots \\ &+ \alpha_n(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1}), \end{aligned}$$

em que $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ são a solução do sistema linear

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ 1 & (x_1 - x_0) & & & \\ 1 & (x_2 - x_0) & (x_2 - x_1) & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ 1 & (x_n - x_0) & (x_n - x_1) & \dots & (x_n - x_{n-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Os coeficientes $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ podem ser obtidos usando substituição direta.

Operador Diferenças Divididas

Equivalentemente, os coeficientes $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$ podem ser calculados usando o **operador diferenças divididas.**

Definição 5 (Operador Diferenças Divididas)

- *Ordem 0:* $f[x_k] = f(x_0) = y_0.$
- *Ordem 1:* $f[x_{k-1}, x_k] = \dfrac{f[x_k] - f[x_{k-1}]}{x_k - x_{k-1}}.$
- *Ordem 2:*
$$f[x_{k-2}, x_{k-1}, x_k] = \frac{f[x_{k-1}, x_k] - f[x_{k-2}, x_{k-1}]}{x_k - x_{k-2}}.$$
- *Ordem n* (assumindo $k \geq n$):
$$f[x_{k-n}, \ldots, x_k] = \frac{f[x_{k-n+1}, \ldots, x_k] - f[x_{k-n}, \ldots, x_{k-1}]}{x_k - x_{k-n}}.$$

Na prática, podemos construir a seguinte tabela com as diferenças divididas:

x	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2	Ordem 3	$\dots$	Ordem n
x_0	$y_0 = f[x_0]$					
		$f[x_0, x_1]$				
x_1	$y_1 = f[x_1]$		$f[x_0, x_1, x_2]$			
		$f[x_1, x_2]$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$		
x_2	$y_2 = f[x_2]$		$f[x_1, x_2, x_3]$			
		$f[x_2, x_3]$		$f[x_1, x_2, x_3, x_4]$	$\ddots$	
x_3	$y_3 = f[x_3]$		$f[x_2, x_3, x_4]$			$f[x_0, x_1, \dots, x_n]$
		$f[x_3, x_4]$	$\vdots$	$\vdots$		
x_4	$y_4 = f[x_4]$	$\vdots$		$f[x_{n-3}, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]$	$\iddots$	
$\vdots$	$\vdots$	$f[x_{n-1}, x_n]$	$\iddots$			
x_n	$y_n = f[x_n]$	$\iddots$				

Usando o operador diferenças divididas, os coeficientes $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ são dados por

$$\alpha_k = f[x_0, x_1, \ldots, x_k], \quad \forall k = 0, 1, \ldots, n.$$

Portanto, temos

$$\begin{aligned} p_n(x) =& f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \ldots \\ &+ f[x_0, x_1, \ldots, x_n](x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1}), \end{aligned}$$

Na prática, avaliamos o polinômio interpolador p_n fornecido pela forma de Newton usando a forma dos **parênteses encaixados**.

Parênteses Encaixados

O polinômio

$$p_n(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x - x_0) + \alpha_2(x - x_0)(x - x_1) + \ldots$$
$$+ \alpha_n(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1}),$$

pode ser avaliado da seguinte forma:

$$p_n(x) = \alpha_0 + (x - x_0)\Big(\alpha_1 + (x - x_1)\Big(\alpha_2 +$$
$$+ (x - x_2)(\alpha_3 + \ldots + (x - x_{n-1})\alpha_n)\Big)\Big).$$

Para o polinômio na forma de Newton, temos

$$p_n(x) = f[x_0] + (x - x_0)\Big(f[x_0, x_1] + (x - x_1)\Big(f[x_0, x_1, x_2] +$$
$$+ (x - x_2)(f[x_0, x_1, x_2, x_3] + \ldots + (x - x_{n-1})f[x_0, \ldots, x_n])\Big)\Big).$$

Exemplo 6

Use a forma de Newton para encontrar o polinômio de grau menor ou igual à 2 que interpola a tabela

x	-1	0	2
y	4	1	-1

Exemplo 6

Use a forma de Newton para encontrar o polinômio de grau menor ou igual à 2 que interpola a tabela

x	-1	0	2
y	4	1	-1

Resposta: Primeiramente, construímos a tabela com as diferenças divididas:

x	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2
-1	4		
		-3	
0	1		2/3
		-1	
2	-1		

Exemplo 6

Use a forma de Newton para encontrar o polinômio de grau menor ou igual à 2 que interpola a tabela

x	-1	0	2
y	4	1	-1

Dessa forma,

$$\begin{aligned} p_2(x) &= 4 - 3(x+1) + \frac{2}{3}(x+1)x \\ &= \frac{2}{3}x^2 - \frac{7}{3}x + 1, \end{aligned}$$

que é o mesmo polinômio obtido usando a forma de Vandermonde.
Usando a forma dos parênteses encaixados, temos

$$p_2(x) = 4 + (x+1)\left(-3 + \frac{2}{3}x\right).$$

Considerações Finais

Na aula de hoje, discutimos o problema de interpolação que consiste em determinar uma função φ tal que

$$\varphi(x_k) = y_k, \quad \forall k = 0, 1, \ldots, n.$$

Especificamente, apresentamos três formas para a interpolação polinomial:

1. Forma de Vandermonde – que apesar da simplicidade teórica, é computacionalmente caro além de ser numericamente instável.
2. Forma de Lagrange – que é rica do ponto de vista teórico mas também é computacionalmente cara.
3. Forma de Newton que, em conjunto com a forma dos parênteses encaixados, é o forma computacionalmente mais barada para determinar o polinômio interpolador.