Aula 18
Método dos Quadrados Mínimos – Caso Contínuo.

MS211 - Cálculo Numérico

Marcos Eduardo Valle

Departamento de Matemática Aplicada
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Universidade Estadual de Campinas

Introdução

Na aula anterior, vimos o problema do ajuste de curvas pelo método dos quadrados mínimos para o caso discreto.

Especificamente, vimos como encontrar uma função

$$\varphi(x) = \alpha_1 g_1(x) + \alpha_2 g_2(x) + \ldots + \alpha_n g_n(x),$$

que melhor se ajusta a uma tabela

x	x_1	x_2	$\ldots$	x_m
y	y_1	y_2	$\ldots$	y_m

com $x_1, x_2, \ldots, x_m$ em um intervalo $[a, b]$, em que $g_1, \ldots, g_n$ são funções escolhidas *a priori*.

Resumidamente, os coeficientes $\alpha_1^*, \ldots, \alpha_n^*$ são obtidos resolvendo um sistema linear

$$\mathbf{A}\alpha = \mathbf{b},$$

conhecido como sistema das **equações normais**.

Ajuste de Curvas – Caso Contínuo

Na aula de hoje, apresentaremos o problema de ajuste de curvas pelo método dos quadrados mínimos, mas para o caso contínuo.

Problema de Ajuste de Curvas – Caso Contínuo

Considere uma função f contínua em um intervalo $[a, b]$. Escolhidas funções $g_1, g_2, \ldots, g_n$, chamadas **funções base**, desejamos encontrar coeficientes $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ de modo que a função

$$\varphi(x) = \alpha_1 g_1(x) + \alpha_2 g_2(x) + \ldots + \alpha_n g_n(x),$$

que melhor aproxime f em $[a, b]$.

Exemplo 1

Encontre a reta que melhor aproxima $f(x) = 4x^3$ em $[0, 1]$.

Exemplo 1

Encontre a reta que melhor aproxima $f(x) = 4x^3$ em $[0, 1]$.

Resposta: A reta que melhor se aproxima é formulada como o problema de quadrados mínimos $\varphi \approx f$ em que

$$\varphi(x) = \alpha_1 x + \alpha_2 = \alpha_1 g_1(x) + \alpha_2 g_(x),$$

em que $g_1(x) = x$ e $g_2(x) = 1$ para todo $x \in [0, 1]$.

Formulação Matemática

No problema de quadrados mínimos – caso contínuo, a notação $\varphi \approx f$ em $[a, b]$ significa que a área sob a curva do quadrado dos desvios é mínima, ou seja,

$$J(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \int_a^b (\varphi(x) - f(x))^2 dx,$$

é mínimo.

Tal como no caso discreto, devemos encontrar os pontos críticos de J, ou seja,

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha_j} = 0, \quad \forall j = 1, \ldots, n.$$

Pela regra da cadeia, a derivada parcial é

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha_j} = 2\int_a^b \Big(\alpha_1 g_1(x) + \ldots + \alpha_n g_n(x) - f(x)\Big) g_j(x)dx.$$

Dessa forma, devemos ter

$$\int_a^b \Big(\alpha_1 g_1(x) + \ldots + \alpha_n g_n(x) - f(x)\Big) g_j(x)dx = 0,$$

ou ainda,

$$\int_a^b \alpha_1 g_1(x) g_j(x) dx + \ldots + \int_a^b \alpha_n g_n(x) g_j(x) dx = \int_a^b f(x) g_j(x) dx,$$

para todo $j = 1, \ldots, n$.

Equações Normais

Alternativamente, podemos escrever

$$\begin{cases} \int_a^b \alpha_1 g_1(x) g_1(x) dx + \ldots + \int_a^b \alpha_n g_n(x) g_1(x) dx & = \int_a^b f(x) g_1(x) dx, \\ \int_a^b \alpha_1 g_1(x) g_2(x) dx + \ldots + \int_a^b \alpha_n g_n(x) g_2(x) dx & = \int_a^b f(x) g_2(x) dx, \\ & \vdots \\ \int_a^b \alpha_1 g_1(x) g_n(x) dx + \ldots + \int_a^b \alpha_n g_n(x) g_n(x) dx & = \int_a^b f(x) g_n(x) dx, \end{cases}$$

que é um sistema linear com n equações e incógnitas $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

O sistema linear acima é chamado sistema das **equações normais.**

Em termos matriciais, o sistema das as equações normais pode ser escrito como

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{b},$$

em que $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_j) \in \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{b} = (b_i) \in \mathbb{R}^n$, com

$$a_{ij} = \langle g_i, g_j \rangle = \int_a^b g_i(x) g_j(x) dx,$$

e

$$b_i = \langle f, g_i \rangle = \int_a^b f(x) g_i(x),$$

para todo $i, j = 1, \ldots, n$.

Exemplo 2

Encontre a reta que melhor aproxima $f(x) = 4x^3$ em $[0, 1]$.

Exemplo 2

Encontre a reta que melhor aproxima $f(x) = 4x^3$ em $[0, 1]$.

Resposta: A reta que melhor se aproxima é formulada como o problema de quadrados mínimos $\varphi \approx f$ em que

$$\varphi(x) = \alpha_1 x + \alpha_2 = \alpha_1 g_1(x) + \alpha_2 g_(x),$$

em que $g_1(x) = x$ e $g_2(x) = 1$ para todo $x \in [0, 1]$.
Portanto,

$$a_{11} = \langle g_1, g_1 \rangle = \int_a^b x^2 dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_0^1 = \frac{1}{3},$$

$$a_{12} = \langle g_1, g_2 \rangle = \int_a^b x dx = \frac{1}{2}x^2\Big|_0^1 = \frac{1}{2} = a_{21},$$

$$a_{22} = \langle g_2, g_2 \rangle = \int_a^b 1 dx = x|_0^1 = 1.$$

Exemplo 2

Encontre a reta que melhor aproxima $f(x) = 4x^3$ em $[0, 1]$.

Além disso,

$$b_1 = \langle f, g_1 \rangle = \int_a^b 4x^4 dx = \frac{4}{5}x^5 \Big|_0^1 = \frac{4}{5},$$

$$b_2 = \langle f, g_2 \rangle = \int_a^b 4x^3 dx = \frac{4}{4}x^4 \Big|_0^1 = 1.$$

Dessa forma, temos o sistema linear

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\alpha}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{4}{5} \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}},$$

cuja solução é

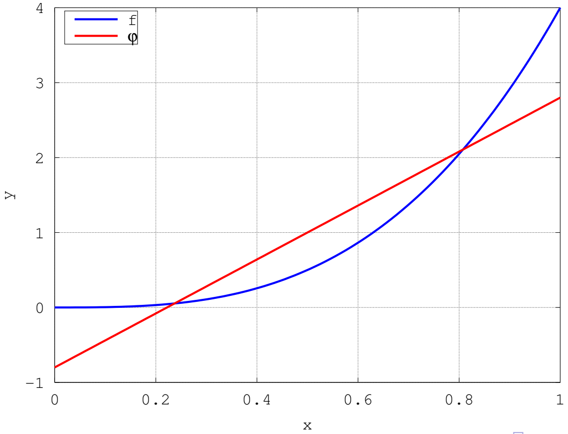
$$\boldsymbol{\alpha}^* = \begin{bmatrix} \frac{18}{5} & -\frac{4}{5} \end{bmatrix}^T.$$

Exemplo 2

Encontre a reta que melhor aproxima $f(x) = 4x^3$ em $[0, 1]$.

Logo, a reta que melhor se aproxima de $f(x) = 4x^3$ em $[0, 1]$ é

$$\varphi(x) = \frac{18}{5}x - \frac{4}{5}.$$



Funções Ortogonais

O sistema das equações normais

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{b},$$

pode ser facilmente resolvido se as funções base $g_1, \ldots, g_n$ forem ortogonais, ou seja,

$$\langle g_i, g_j \rangle = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad i \neq j.$$

Exemplo 3

Os polinômios de Legendre, definidos por

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1),$$

e, de um modo geral,

$$P_{k+1}(x) = \left(\frac{2k+1}{k+1}\right) x P_k(x) - \left(\frac{k}{k+1}\right) P_{k-1}(x), \quad \forall k = 1, 2, \ldots,$$

são ortogonais em $[-1, 1]$.

Considerações Finais

O método dos quadrados mínimos, caso contínuo, é usado para encontrar uma função

$$\varphi(x) = \alpha_1 g_1(x) + \alpha_2 g_2(x) + \ldots + \alpha_n g_n(x),$$

que melhor se aproxima de uma certa função f em um intervalo $[a, b]$.

Tal como no caso discreto, os coeficientes $\alpha_1^*, \ldots, \alpha_n^*$ são obtidos resolvendo um sistema linear

$$\mathbf{A}\alpha = \mathbf{b},$$

conhecido como sistema das **equações normais.**