

# Aula 14

# Métodos Numéricos para

# Sistemas de Equações

# Diferenciais e Equações de

# Ordem Superior.

MS211 - Cálculo Numérico

Marcos Eduardo Valle

Departamento de Matemática Aplicada  
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica  
Universidade Estadual de Campinas

Na aula anterior, apresentamos os métodos de Runge-Kutta para resolução de um PVI da forma:

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

---

Na aula de hoje, veremos que os métodos de Runge-Kutta podem ser aplicados também para a resolução numérica de sistemas de equações diferenciais e equações de ordem superior, ambos com valores iniciais.

# Sistemas de Equações Diferenciais

Um sistema de equações diferenciais com valor inicial

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n), & y_1(x_0) = y_{1,0}, \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n), & y_2(x_0) = y_{2,0}, \\ \vdots & \vdots \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n), & y_n(x_0) = y_{n,0}, \end{cases}$$

pode ser escrito de forma mais compacta como

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}), \quad \mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0,$$

em que  $x \in \mathbb{R}$  e,

$$\mathbf{y}(x) = \begin{bmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}(x, \mathbf{y}) = \begin{bmatrix} f_1(x, \mathbf{y}) \\ f_2(x, \mathbf{y}) \\ \vdots \\ f_n(x, \mathbf{y}) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{y}_0 = \begin{bmatrix} y_{1,0} \\ y_{2,0} \\ \vdots \\ y_{n,0} \end{bmatrix},$$

são vetores em  $\mathbb{R}^n$ .

# Métodos de Euler

O método de Euler para sistemas de equações diferenciais é

$$\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{y}_k + hf(x_k, \mathbf{y}_k), \quad \forall k = 0, 1, \dots,$$

em que  $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots$  são aproximações para  $\mathbf{y}(x_1), \mathbf{y}(x_2), \dots$

## Exemplo 1

Use o método de Euler para obter uma aproximação numérica da solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} y' = z, & y(0) = 1 \\ z' = y + e^x & z(0) = 0 \end{cases}$$

para  $x \in [0, 0.2]$  usando  $h = 0.1$ .

**Resolução:** A fórmula do método de Euler fornece

$$\begin{bmatrix} y_{k+1} \\ z_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_k \\ z_k \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} z_k \\ y_k + e^{x_k} \end{bmatrix}.$$

Para  $k = 0$ , temos

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} z_0 \\ y_0 + e^{x_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 0.1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.2 \end{bmatrix}.$$

Para  $k = 1$ , temos

$$\begin{bmatrix} y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} z_1 \\ y_1 + e^{x_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.2 \end{bmatrix} + 0.1 \begin{bmatrix} 0.2 \\ 1 + e^{0.2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.02 \\ 0.4105 \end{bmatrix}.$$

Portanto, encontramos as aproximações

$$y(0.2) \approx 1.02 \quad \text{e} \quad z(0.2) \approx 0.4105.$$

## Método de Heun

De um modo similar, o método de Heun para sistemas de equações diferenciais com valor inicial é

$$\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{y}_k + \frac{h}{2}(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2), \quad \forall k = 0, 1, \dots,$$

em que

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{f}(x_k, \mathbf{y}_k) \quad \text{e} \quad \mathbf{k}_2 = \mathbf{f}(x_k + h, \mathbf{y}_k + h\mathbf{k}_1).$$

### Exemplo 2

Use o método de Heun para obter uma aproximação numérica da solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} y' = z, & y(0) = 1 \\ z' = y + e^x & z(0) = 0 \end{cases}$$

para  $x \in [0, 0.2]$  usando  $h = 0.1$ .

**Resolução:** Para  $k = 0$ , o método de Heun fornece:

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{f}\left(x_0, \begin{bmatrix} y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} z_0 \\ y_0 + e^{x_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 + e^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_2 &= \mathbf{f}\left(x_0 + h, \begin{bmatrix} y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + h\mathbf{k}_1\right) = \mathbf{f}\left(0 + h, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}\right) \\ &= \mathbf{f}\left(0.1, \begin{bmatrix} 1 \\ 0.2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 1 + e^{0.1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 2.1052 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + \frac{h}{2} (\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{0.1}{2} \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.2 \\ 2.1052 \end{bmatrix} \right) \\ &= \begin{bmatrix} 1.01000 \\ 0.20526 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Para  $k = 1$ , o método de Heun fornece:

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{f} \left( x_1, \begin{bmatrix} y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} z_1 \\ y_1 + e^{x_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.20526 \\ 1.01 + e^{0.1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.20526 \\ 2.1152 \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_2 &= \mathbf{f} \left( x_1 + h, \begin{bmatrix} y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + h\mathbf{k}_1 \right) \\ &= \mathbf{f} \left( 0.1 + h, \begin{bmatrix} 1.01000 \\ 0.20526 \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} 0.20526 \\ 2.1152 \end{bmatrix} \right) \\ &= \mathbf{f} \left( 0.2, \begin{bmatrix} 1.03053 \\ 0.41678 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0.41678 \\ 1.03053 + e^{0.2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.41678 \\ 2.2519 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + \frac{h}{2} (\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \\ &= \begin{bmatrix} 1.01000 \\ 0.20526 \end{bmatrix} + \frac{0.1}{2} \left( \begin{bmatrix} 0.20526 \\ 2.1152 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.41678 \\ 2.2519 \end{bmatrix} \right) \\ &= \begin{bmatrix} 1.04110 \\ 0.42362 \end{bmatrix} \end{aligned}$$



# Método de Runge-Kutta de Ordem 4

Finalmente, o método de Runge-Kutta de ordens 4 para sistemas de equações diferenciais é descrito por:

$$\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{y}_k + \frac{h}{6} (\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4),$$

em que

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{f}(x_k, \mathbf{y}_k),$$

$$\mathbf{k}_2 = \mathbf{f}(x_k + h/2, \mathbf{y}_k + \mathbf{k}_1 h/2),$$

$$\mathbf{k}_3 = \mathbf{f}(x_k + h/2, \mathbf{y}_k + \mathbf{k}_2 h/2),$$

$$\mathbf{k}_4 = \mathbf{f}(x_k + h, \mathbf{y}_k + \mathbf{k}_3 h).$$

## Exemplo 3

Use o método de Runge-Kutta de ordem 4 para obter uma aproximação numérica de

$$\begin{cases} y' = z, & y(0) = 1 \\ z' = y + e^x & z(0) = 0 \end{cases}$$

para  $x \in [0, 0.2]$  usando  $h = 0.1$ .

**Resolução:** Para  $k = 0$ , temos

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{f} \left( x_0, \begin{bmatrix} y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{k}_2 = \mathbf{f} \left( x_0 + \frac{h}{2}, \begin{bmatrix} y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + \mathbf{k}_1 \frac{h}{2} \right) = \begin{bmatrix} 0.1000 \\ 2.0513 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k}_3 = \mathbf{f} \left( x_0 + \frac{h}{2}, \begin{bmatrix} y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + \mathbf{k}_2 \frac{h}{2} \right) = \begin{bmatrix} 0.1026 \\ 2.0563 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{k}_4 = \mathbf{f} \left( x_0 + h, \begin{bmatrix} y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + \mathbf{k}_3 h \right) = \begin{bmatrix} 0.2056 \\ 2.1154 \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$\mathbf{y}_1 = \mathbf{y}_0 + \frac{h}{6}(\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4) = \begin{bmatrix} 1.0102 \\ 0.2055 \end{bmatrix}.$$

Para  $k = 1$ , temos

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{f} \left( x_1, \begin{bmatrix} y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0.2055 \\ 2.1154 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{k}_2 = \mathbf{f} \left( x_1 + \frac{h}{2}, \begin{bmatrix} y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + \mathbf{k}_1 \frac{h}{2} \right) = \begin{bmatrix} 0.3113 \\ 2.1823 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k}_3 = \mathbf{f} \left( x_1 + \frac{h}{2}, \begin{bmatrix} y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + \mathbf{k}_2 \frac{h}{2} \right) = \begin{bmatrix} 0.3146 \\ 2.1876 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{k}_4 = \mathbf{f} \left( x_1 + h, \begin{bmatrix} y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + \mathbf{k}_3 h \right) = \begin{bmatrix} 0.4243 \\ 2.2630 \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$\mathbf{y}_2 = \mathbf{y}_1 + \frac{h}{6}(\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4) = \begin{bmatrix} 1.0415 \\ 0.4241 \end{bmatrix}.$$

# Modelo Presa-Predador

Considere duas espécies que interagem como presa-predador. Por exemplo, lobos e coelhos.

Denote por  $p(t)$  e  $q(t)$  a quantidade de presas e predadores no instante  $t$ .

A dinâmica populacional das duas espécies pode ser descrita pelo sistema de equações diferenciais, chamado equações de Lotka-Volterra:

$$\begin{cases} p' = ap - bpq, \\ q' = -cq + dpq, \end{cases}$$

em que  $a, b, c$  e  $d$  são constantes positivas.

Considere

$$a = 0.25, \quad b = 0.01, \quad c = 1.00 \quad \text{e} \quad d = 0.01,$$

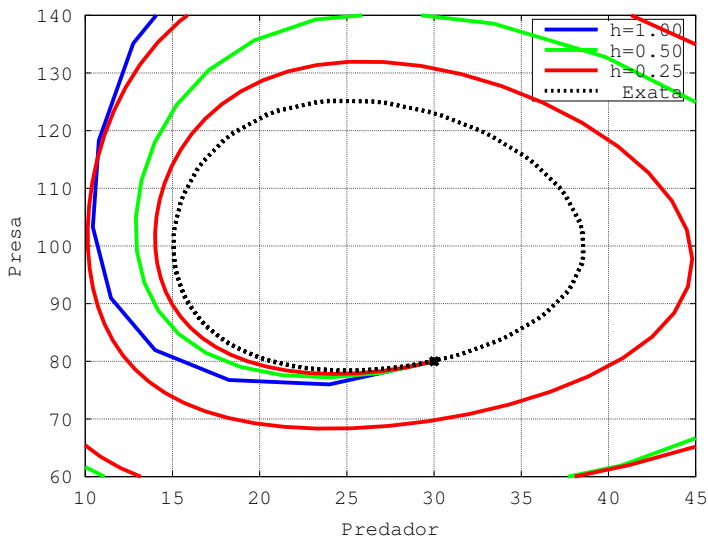
e a condição inicial

$$p_0 = 80 \quad \text{e} \quad q_0 = 30.$$

---

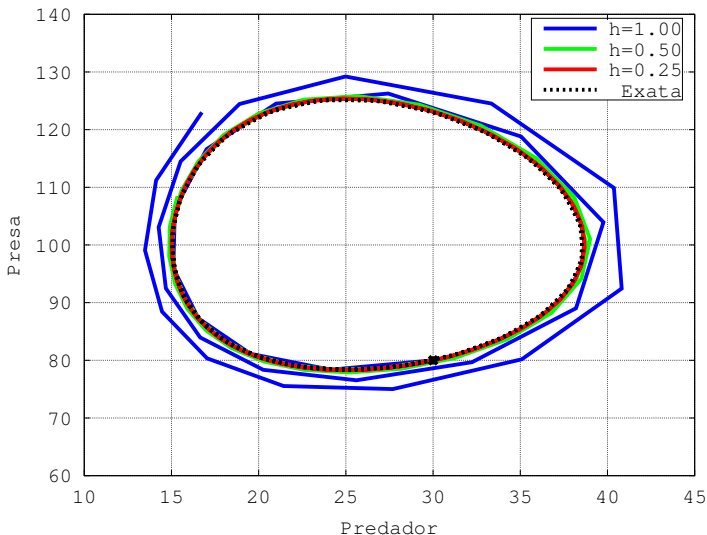
Nesse caso, encontramos as seguintes aproximações usando os métodos de Euler, Heun e Runge-Kutta de ordem 4.

# Método de Euler



Note que a curva do método de Euler se aproxima “linearmente” da solução exata.

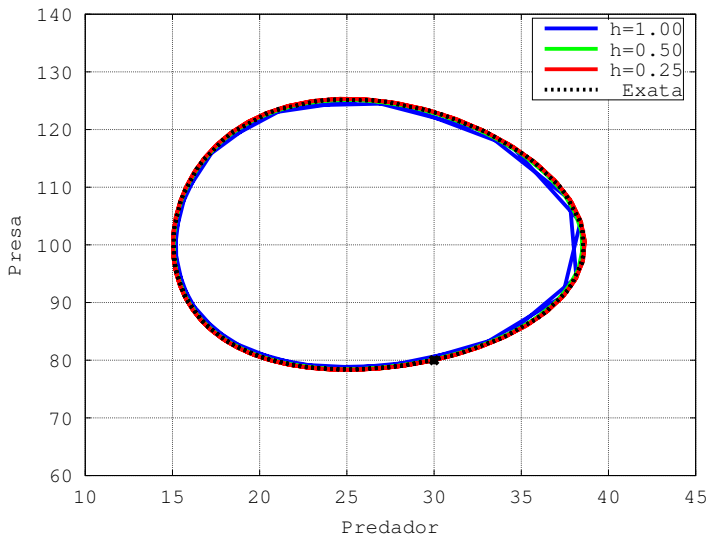
# Método de Heun



Para  $h = 1$ , a solução se afasta da solução exata. Ainda assim, a aproximação é melhor que as do método de Euler.



# Método de Runge-Kutta ordem 4



Encontramos boas aproximações mesmo com  $h = 1!$

# Equações Diferenciais de Ordem Superior

Uma equação diferencial de ordem  $m$

$$u^{(m)} = g(x, u, u', u'', \dots, u^{(m-1)}),$$

pode ser escrita como um sistema com  $m$  equações diferenciais de ordem 1

$$\mathbf{y}' = f(x, \mathbf{y}),$$

tomando

$$y_1(x) = u(x), \quad y_2(x) = u'(x), \quad \dots, \quad y_m(x) = u^{(m-1)}.$$

Especificamente, temos

$$\begin{cases} y_1' &= y_2, \\ y_2' &= y_3, \\ &\vdots \\ y_m' &= g(x, y_1, y_2, \dots, y_m). \end{cases}$$

## Exemplo 4

Escreva o problema de valor inicial

$$\begin{cases} u'' - u = e^x, \\ u(0) = 1 \quad \text{e} \quad u'(0) = 0, \end{cases}$$

como um sistema de equações diferenciais com valor de inicial.

## Exemplo 4

Escreva o problema de valor inicial

$$\begin{cases} u'' - u = e^x, \\ u(0) = 1 \quad \text{e} \quad u'(0) = 0, \end{cases}$$

como um sistema de equações diferenciais com valor de inicial.

**Resposta:** Tomando  $y = u$  e  $z = u'$ , podemos escrever o problema de valor inicial como

$$\begin{cases} y' = z, & y(0) = 1 \\ z' = y + e^x, & z(0) = 0, \end{cases}$$

que é o mesmo sistema encontrado no Exemplo 1.

# Considerações Finais

Na aula de hoje, vimos que os métodos de Runge-Kutta podem ser aplicadas para aproximar a solução de um sistema de equações diferenciais de um modo direto.

Vimos também como escrever uma equação diferencial de ordem superior como um sistema de equações diferenciais.

Durante toda abordagem, consideramos  $h$  fixo. Porém, a maioria dos softwares de computação científica usam métodos de passo variado. Os métodos de passo variado fazem uma estimativa do erro local a cada iteração. O método de Runge-Kutta-Fehlberg é um exemplo de método de passo variado.