Aula 12 Soluções Numéricas de Problemas de Valor Inicial - Método de Euler e Métodos de Série de Taylor.

MS211 - Cálculo Numérico

Marcos Eduardo Valle

Departamento de Matemática Aplicada
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Universidade Estadual de Campinas

Introdução

Nas próximas aulas estudaremos métodos numéricos para **problemas de valor inicial** (PVI) formulados da seguinte forma:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

em que f é uma função das variáveis x (variável independente) e y (variável dependente).

A equação

$$y(x_0) = y_0,$$

com x_0 e y_0 dados, é chamada **condição inicial.**

A solução de um PVI, quando existe, é uma função y, que depende de x e satisfaz a condição inicial.

Assumiremos que o PVI possui uma única solução!

Exemplo 1

A população p de algumas lagartas podem ser descritas pelo PVI

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = rp\left(1 - \frac{p}{k}\right) - \frac{p^2}{1+p^2}, \\ p(0) = p_0, \end{cases}$$

em que p_0 é a população inicial (no instante $t = 0$), r está relacionada à taxa de reprodução da lagarta e k está relacionada à quantidade de folhas disponíveis na planta. O termo $\frac{p^2}{1+p^2}$ está relacionada a predação da lagarta (por pássaros, por exemplo).

Considerando $r = 2$, $k = 1$ e $p_0 = 0.1$, qual será a população de lagartas no instante $t = 10$?

Podemos determinar $p(10)$ usando um método numérico!

Ideia dos Métodos Numéricos para PVI

Os métodos numéricos para a resolução de um PVI fornecem uma estimativa para $y(x)$ em pontos $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Por simplicidade, assumiremos que os pontos são igualmente espaçados, ou seja,

$$x_{k+1} = x_k + h, \quad \forall k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

em que h é chamado **tamanho do passo**.

Denotaremos por y_k a estimativa de $y(x_k)$, ou seja,

$$y_k \approx y(x_k), \quad \forall k = 1, \ldots, n.$$

Temos um **método de passo simples** ou *passo um* se y_k é determinado usando apenas y_{k-1}. Caso contrário, temos um **método de passo múltiplo**.

Ideia do Método de Euler

Considere um PVI

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

Note que conhecemos a derivada $y'(x_0) = f(x_0, y_0)$.

Assim, podemos aproximar y pela reta r_0 que passa por (x_0, y_0) com coeficiente angular $y'(x_0)$, ou seja, aproximamos y por

$$r_0(x) = y_0 + f(x_0, y_0)(x - x_0).$$

Com essa aproximação, encontramos

$$y_1 = r_0(x_1) = y_0 + f(x_0, y_0)(x_1 - x_0) = y_0 + f(x_0, y_0)h,$$

em que $x_1 = x_0 + h$.

Método de Euler

Repetindo o raciocínio com (x_1, y_1), obtemos
$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1)$.

De um modo geral, o método de Euler fornece

$$y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k), \quad \forall k = 0, 1, 2, \ldots .$$

Observe que o método de Euler é um método de passo simples.

O método de Euler é um método de série de Taylor de ordem 1.

Métodos de Série de Taylor

Se y for suficientemente suave, a série de Taylor de $y(x)$ em $x = x_k$ é

$$y(x) = y(x_n) + y'(x_n)(x - x_n) + \frac{1}{2}y''(x_n)(x - x_n)^2 + \dots$$
$$+ \frac{1}{k!}y^{(k)}(x_n)(x - x_n)^k + \frac{1}{(k+1)!}y^{(k+1)}(\xi_x)(x - x_n)^{(k+1)},$$

com ξ_x entre x e x_n.

Se $y_n^{(j)}$ representa uma aproximação para a j-ésima derivada de y em x_n e $h = x_{n+1} - x_n$, a aproximação para $y(x_{n+1})$ é

$$y(x_{n+1}) \approx y(x_n) + y_n'h + \frac{1}{2}y_n''h^2 + \dots + \frac{1}{k!}y_n^{(k)}h^k,$$

e o erro de truncamento (da série) é dado por

$$e(x_{n+1}) = \left|\frac{1}{(k+1)!}y^{(k+1)}(\xi_x)h^{(k+1)}\right|.$$

Se y tem derivada de ordem $(k+1)$ contínua em um intervalo fechado I que contém os pontos $x_1, \ldots, x_{n+1}$, então existe

$$M_{k+1} = \max_{x \in I} |y^{(k+1)}(x)|,$$

de modo que o erro de truncamento satisfaz

$$e(x_{n+1}) \leq \max_{x \in I} e(x) \leq \frac{M_{k+1} h^{(k+1)}}{(k+1)!} = Ch^{(k+1)},$$

com $C = \frac{M_{k+1}}{(k+1)!}$.

Definição 2 (Ordem de um Método Numérico para PVI)

Um método numérico para PVI é dito de ordem p se existe uma constante C tal que

$$e(x_{n+1}) < Ch^{p+1},$$

em que C é uma constante que pode depender das derivadas da variável dependente y do PVI.

Os métodos de série de Taylor são de ordem k.

Em particular, o método de Euler é um método de ordem 1.

Para aplicar o método de série de Taylor de ordem k, precisamos calcular aproximações $y_n'', y_n^{(3)}, \ldots, y_n^{(k)}$ para as derivadas de y em x_n.

Sabemos que

$$y'(x) = f(x, y(x)).$$

Assim, denotando $f = f(x, y)$, $f_x = f_x(x, y(x))$ e $f_y = f_y(x, y(x))$, pela derivação implícita encontramos

$$y''(x) = f_x + f_y y' = f_x + f_y f.$$

Assim, o método de série de Taylor de ordem 2 é dado por

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) + \frac{h^2}{2}\big(f_x(x_n, y_n) + f_y(x_n, y_n) f(x_n, y_n)\big),$$

para $n = 0, 1, \ldots$.

Exemplo 3

Considere o PVI

$$\begin{cases} y' = y, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Use o método de Euler para estimar $y(0.04)$ com uma tolerância $\epsilon \leq 5 \times 10^{-4}$ trabalhando com 4 casas decimais.

Exemplo 3

Considere o PVI

$$\begin{cases} y' = y, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Use o método de Euler para estimar $y(0.04)$ com uma tolerância $\epsilon \leq 5 \times 10^{-4}$ trabalhando com 4 casas decimais.

Resposta: Sabemos que o erro do método de Euler é

$$e(x_n) = \left| \frac{y''(\xi_x)}{2} h^2 \right|.$$

Como a solução analítica do PVI é $y(x) = e^x$, temos que

$$M_2 = \max_{x \in [0, 0.04]} |y''(x)| = e^{0.04} = 1.0408.$$

Dessa forma,

$$e(x) \leq \frac{1.0408}{2} h^2, \quad \forall x \in [0, 0.04].$$

Portanto,

$$\frac{1.0408}{2} h^2 \leq \epsilon \quad \Longrightarrow \quad h^2 \leq \frac{10^{-3}}{1.0408} \quad \Longrightarrow \quad h \leq 0.0310.$$

Tomemos então $h = 0.02$ pois queremos $y(0.04) = y(2 \times 0.05)$.
Assim, temos

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) = y_0(1 + h) = 1.02.$$

e

$$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1) = y_1(1 + h) = 1.02^2 = 1.0404.$$

Finalmente, o erro cometido foi

$$E = 1.0408 - 1.0404 = 4 \times 10^{-4} < 5 \times 10^{4}.$$

Exemplo 4

Considere o PVI

$$\begin{cases} y' = y, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Use o método da série de Taylor de ordem 2 para estimar $y(0.04)$ com uma tolerância $\epsilon \leq 5 \times 10^{-4}$ trabalhando com 4 casas decimais.

Exemplo 4

Considere o PVI

$$\begin{cases} y' = y, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Use o método da série de Taylor de ordem 2 para estimar $y(0.04)$ com uma tolerância $\epsilon \leq 5 \times 10^{-4}$ trabalhando com 4 casas decimais.

Resposta: Sabemos que o erro do método de série de Taylor de ordem 2 satisfaz

$$e(x_n) \leq \frac{M_3}{6} h^3.$$

Como a solução analítica do PVI é $y(x) = e^x$, temos que

$$M_3 = \max_{x \in [0, 0.04]} |y'''(x)| = e^{0.04} = 1.0408.$$

Dessa forma,

$$e(x) \le \frac{1.0408}{6} h^3, \quad \forall x \in [0, 0.04].$$

Portanto,

$$\frac{1.0408}{6} h^3 \le \epsilon \quad \Longrightarrow \quad h^3 \le \frac{3 \times 10^{-3}}{1.0408} \quad \Longrightarrow \quad h \le 0.1423.$$

Tomemos então $h = 0.04$.
Assim, temos

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + hf(x_0, y_0) + \frac{h^2}{2}(f_x(x_n, y_n) + f_y(x_n, y_n) f(x_n, y_n)) \\ &= y_0 + hy_0 + \frac{h^2}{2}(0 + 1 \times y_0) = y_0(1 + h + h^2/2) = 1.0408. \end{aligned}$$

Note que erro cometido foi zero!

Considerações Finais

Na aula de hoje apresentamos os métodos de série de Taylor.

Além disso, apresentamos uma fórmula para o erro local (erro cometido a cada passo).

Em particular, vimos que o método de Euler é um método de ordem 1. Consequentemente, o erro local é da ordem de h^2.

Podemos obter erros menores considerando métodos de ordem maior mas, no caso dos métodos da série de Taylor, temos que calcular derivadas de ordem superior de y.

Finalmente, ressaltamos que geralmente efetuamos diversos passos para chegar na aproximação x_n. Portanto, há um acumulo de erros!