Aula 10
Sistemas Não-lineares e o Método de Newton.

MS211 - Cálculo Numérico

Marcos Eduardo Valle

Departamento de Matemática Aplicada
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Universidade Estadual de Campinas

Introdução

Nas próximas aulas, estaremos interessados na resolução de sistemas não-lineares da seguinte forma:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0. \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \end{cases}$$

em que $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são as incógnitas e $f_i : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, para $i = 1, \ldots, n$, é um campo escalar.

Exemplo 1

O sistema não-linear

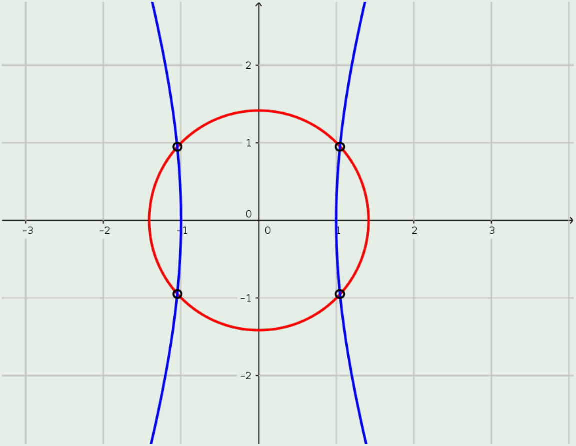
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2, \\ x^2 - \frac{y^2}{9} = 1. \end{cases}$$

pode ser escrito como

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 2 = 0, \\ f_2(x_1, x_2) = x_1^2 - \frac{x_2^2}{9} - 1 = 0. \end{cases}$$

Exemplo 1

Geometricamente, desejamos encontrar os quatro pontos que pertencem à ambas as curvas $x_1^2 + x_2^2 = 2$ e $x_1^2 - x_2^2/9 = 1$.



Exemplo 2

O sistema não-linear

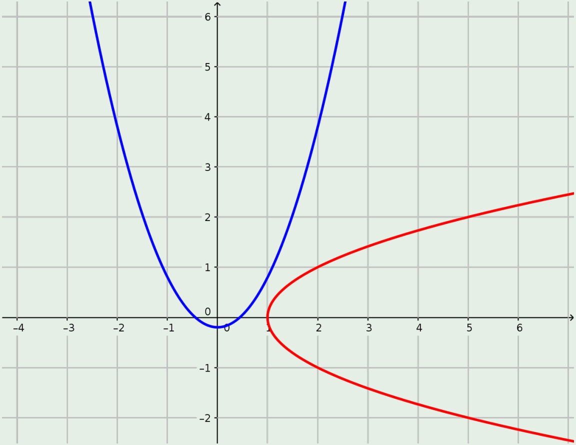
$$\begin{cases} x^2 - y = 0.2, \\ x - y^2 = 1. \end{cases}$$

pode ser escrito como

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2 - 0.2 = 0, \\ f_2(x_1, x_2) = x_1 - x_2^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

Exemplo 2

Observe que as curvas $y = x^2 - 0.2$ e $x = 1 + y^2$ não se interceptam.



Logo, esse sistema não admite solução!

Notação

Denotaremos

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{bmatrix}.$$

Desta forma, o sistema não-linear

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \end{cases}$$

pode ser escrito como

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}.$$

Formulação do Problema e Hipóteses

Resolução de Sistema Não-Linear

Dada uma função $\mathbf{F} : D \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, determine $\xi \in D$ tal que

$$\mathbf{F}(\xi) = \mathbf{0}.$$

Em geral, assumiremos a existência da solução $\xi \in D$. Assumiremos também que o domínio D de $\mathbf{F}$ é um conjunto aberto e $\mathbf{F}$ possui derivadas contínuas nesse conjunto.

Exemplo 3 (Sistema Linear)

Tem-se um sistema linear quando

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b},$$

com $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$.

Vetor Gradiente

Definição 4 (Vetor Gradiente)

O vetor das derivadas parciais de f_i, denotado por

$$\nabla f_i(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial f_i}{\partial x_2}(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \frac{\partial f_i}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \end{bmatrix},$$

é chamado **vetor gradiente** de f_i.

Matriz Jacobiana

Definição 5 (Matriz Jacobiana)

A matriz das derivadas parciais de **F**, denotada por

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}.$$

é chamada **matriz Jacobiana** de **F**.

Aproximação Linear

A aproximação linear **L** de uma função não-linear **F** em um ponto **a** é dada pela equação

$$\mathbf{L}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{a}) + \mathbf{J}(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a}).$$

Exemplo 6

Determine a matriz Jacobiana da função **F** do sistema:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_1^3 - 3x_1x_2^2 + 1 \\ 3x_1^2x_2 - x_2^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 6

Determine a matriz Jacobiana da função **F** do sistema:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_1^3 - 3x_1x_2^2 + 1 \\ 3x_1^2x_2 - x_2^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Resposta: A matriz Jacobiana de **F** é

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 3x_1^2 - 3x_2^2 & -6x_1x_2 \\ 6x_1x_2 & 3x_1^2 - 3x_2^2 \end{bmatrix}$$

Exemplo 7 (Tridiagonal de Broyden)

Determine a matriz Jacobiana da função **F** do sistema:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} -2x_1^2 + 3x_1 - 2x_2 + 1 \\ \vdots \\ -x_{i-1} - 2x_i^2 + 3x_i - 2x_{i+1} + 1 \\ \vdots \\ -2x_n^2 + 3x_n - x_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 7 (Tridiagonal de Broyden)

Determine a matriz Jacobiana da função **F** do sistema:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} -2x_1^2 + 3x_1 - 2x_2 + 1 \\ \vdots \\ -x_{i-1} - 2x_i^2 + 3x_i - 2x_{i+1} + 1 \\ \vdots \\ -2x_n^2 + 3x_n - x_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Resposta: A matriz Jacobina de **F** é

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} -4x_1 + 3 & -2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & -4x_2 + 3 & -2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & -4x_n + 3 & \end{bmatrix},$$

que é uma matriz tridiagonal.

Método de Newton

O método de Newton é um dos principais métodos usados para a resolução de um sistema não-linear.

Vimos anteriormente que o método de Netwon determina, a cada iteração, a solução da aproximação linear da função.

Dessa forma, conhecida uma aproximação $\mathbf{x}^{(k)}$, o método de Newton define $\mathbf{x}^{(k+1)}$ como sendo a solução do sistema linear

$$\mathbf{L}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)}) + \mathbf{J}(\mathbf{x}^{(k)})(\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(k)}) = \mathbf{0},$$

ou seja, $\mathbf{x}^{(k+1)}$ é tal que

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}^{(k)})(\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}) = -\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)}).$$

Tomando $\mathbf{s}^{(k)} = \mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}$, conhecido por **passo de Newton**, temos que a nova aproximação é

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{s}^{(k)},$$

em que $\mathbf{s}^{(k)}$ é a solução do sistema linear

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}^{(k)})\mathbf{s}^{(k)} = -\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)}).$$

Resumindo, dado uma aproximação inicial $\mathbf{x}^{(0)}$, o método de Newton a sequência $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$ através dos seguintes passos:

- Resolve $\mathbf{J}(\mathbf{x}^{(k)})\mathbf{s}^{(k)} = -\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)})$.
- Define $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{s}^{(k)}$.

Exemplo 8

Efetue uma iterações do método de Newton, com $\mathbf{x}^{(0)} = [1,5]^T$, para determinar a solução dos sitema não-linear:

$$\mathbf{F}(x,y) = \begin{bmatrix} x+y-3 \\ x^2+y^2-9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

cujas soluções são $\xi^{(1)} = [3,0]^T$ e $\xi^{(2)} = [0,3]^T$.

Exemplo 8

Efetue uma iterações do método de Newton, com $\mathbf{x}^{(0)} = [1, 5]^T$, para determinar a solução dos sitema não-linear:

$$\mathbf{F}(x, y) = \begin{bmatrix} x + y - 3 \\ x^2 + y^2 - 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

cujas soluções são $\xi^{(1)} = [3, 0]^T$ e $\xi^{(2)} = [0, 3]^T$.

Resposta: A matriz Jacobiana do sistema é

$$\mathbf{J}(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2x & 2y \end{bmatrix}.$$

O passo $\mathbf{s}^{(0)} = [-13/8, -11/8]^T$ é determinado resolvendo o sistema linear

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 10 \end{bmatrix} \mathbf{s}^{(0)} = \begin{bmatrix} -3 \\ -17 \end{bmatrix}.$$

Logo, temos $\mathbf{x}^{(1)} = [-5/8, 29/8]^T$.

Critério de Parada

Dada uma aproximação inicial $\mathbf{x}^{(0)}$, efetuamos as iterações do método de Netwon até não detectarmos alterações significativas de uma iteração para a outra:

$$\|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}\|_\infty \leq \tau, \quad \text{com } \tau > 0,$$

ou, até encontrarmos $\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k+1)})$ próximo do vetor nulo:

$$\|\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k+1)})\|_\infty \leq \epsilon, \quad \text{com } \epsilon > 0,$$

ou até atingirmos um número máximo de iterações!

Algoritmo do Método de Newton

Entrada: Função não-linear $\mathbf{F}$ e sua matriz Jacobiana $\mathbf{J}$;
Aproximação da solução $\mathbf{x}$.
Dados: Número máximo de interações k_{max}; tolerâncias τ e ϵ.
Inicialize: $k = 0$, $\mathbf{F_x} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ *e* $Er = \tau + 1$.
enquanto $k \leq k_{max}$, $\|\mathbf{F_x}\|_\infty > \epsilon$ *e* $Er > \tau$ **faça**

1. Atualize: $k = k + 1$.
2. Resolva: $\mathbf{J}(\mathbf{x})\mathbf{s} = -\mathbf{F_x}$.
3. Atualize: $\mathbf{x} = \mathbf{x} + \mathbf{s}$.
4. Calcule: $Er = \|\mathbf{s}\|_\infty$.
5. Avalie: $\mathbf{F_x} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$.

fim
Saída: Aproximação para a solução é $\mathbf{x}$.

Considerações Finais

Observe que cada iteração do método de Newton requer:

1. Avaliação da matriz Jacobiana.
2. Resolução de um sistema linear.

Logo, o método de Newton é computacionalmente caro!

A vantagem é que, **sob certas condições** sobre a aproximação inicial $\mathbf{x}^{(0)}$, a função $\mathbf{F}$ e a matriz Jacobiana $\mathbf{J}$, a sequência $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$ produzida pelo método de Newton **converge** para a solução de $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ com **taxa quadrática**.