Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Departamento de Matemática Aplicada

Morfologia Matemática e Redes Neurais Morfológicas para Dados Multi-valorados

Marcos Eduardo Ribeiro do Valle Mesquita
E-mail: valle@ime.unicamp.br

Resumo

A morfologia matemática é uma teoria não-linear com aplicações em processamento e análise de imagens. Uma rede neural cujos neurônios efetuam operações elementares da morfologia matemática é chamada rede neural morfológica. Tal como as redes neurais tradicionais, redes neurais morfológicas podem ser usadas para classificação e regressão. Nesse projeto de pesquisa, visamos contribuir desenvolvendo operadores morfológicos para imagens multi-valoradas. Atenção particular será dada para operadores morfológicos obtidos utilizando uma ordem reduzida supervisionada. Também direcionaremos nossos estudos considerando incertezas que surgem em imagens reais ou subjetividade na descrição dos valores de uma imagem multi-valorada. Como aplicação direta dos resultados obtidos para a morfologia matemática multi-valorada, pretendemos desenvolver redes neurais morfológicas para dados multi-valorados. Redes neurais para dados multi-valorados representam um tópico ativo de pesquisa e incluem, por exemplo, as redes neurais hipercomplexas e as redes em cápsulas. Em particular, investigaremos as recentes memórias autoassociativas de projeção em reticulados completos que, além do baixo custo computacional e da simplicidade teórica, apresentaram resultados promissores em problemas de reconhecimento de faces.

Palavras-chave: Morfologia matemática, reticulado completo, inteligência computacional, rede neural, análise e processamento de imagem.

Campinas, 23 de abril de 2020.

University of Campinas
Institute of Mathematics, Statistics, and Scientific Computing
Department of Applied Mathematics

Mathematical Morphology and Morphological Neural Networks for Multivalued Data

Marcos Eduardo Ribeiro do Valle Mesquita
E-mail: valle@ime.unicamp.br

Abstract

Mathematical morphology is a nonlinear theory with applications in image processing and analysis. A neural network whose neurons perform elementary operations of mathematical morphology is called a morphological neural network. Such as traditional neural networks, morphological neural networks can be used for classification and regression. In this research project, we aim to contribute by developing morphological operators for multi-valued images. Particular attention will be given to morphological operators obtained using a supervised reduced order. We will also address the uncertainties that arise in natural images as well as the vagueness in describing the values of a multi-valued image. As a straightforward application of the results obtained for multi-valued mathematical morphology, we intend to develop morphological neural networks for multi-valued data. Neural networks for multi-valued data represent an active research topic and include, for example, hypercomplex neural networks and capsule networks. In particular, we plan to investigate complete lattice projection autoassociative memories which, besides the low computational cost and theoretical simplicity, presented promising results in face recognition problems.

Key-words: Mathematical morphology, complete lattice, computational intelligence, neural network, image processing and analysis.

Campinas, April 23, 2020.

1 Introdução Geral

Primeiramente, nesse projeto de pesquisa entenderemos um dado multi-valorado como uma entidade cujas unidades são vetores em $\mathbb{R}^n$, com $n \geq 2$. Por exemplo, uma lista $\boldsymbol{x} = [x_1, \ldots, x_N]$ pode ser interpretada como um dado multi-valorado quando x_i, para $i = 1, \ldots, N$, são vetores em $\mathbb{R}^n$. Exemplos de dados multi-valorados também incluem as imagens multi-valoradas, tais como imagens coloridas e hiper-espectrais, que são descritas por uma aplicação $\mathbf{I} : \mathcal{D} \to \mathcal{V}$, onde $\mathcal{D}$ denota o domínio da imagem e $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n$ o conjunto de valores. Nesse caso, o valor de um pixel da imagem é representado por um vetor no $\mathbb{R}^n$. Processamento e análise de imagens hiper-espectrais representam um tópico ativo de pesquisa em sensoriamento remoto e possui aplicações diversas incluindo monitoramento de uso de terra e desenvolvimento urbano (Zhu et al.).

A morfologia matemática (MM) é uma teoria não-linear baseada em conceitos geométricos e topológicos muito utilizada para processamento e análise de imagens (Dougherty and Lotufo, 2003; Heijmans, 1995; Soille, 1999). Aplicações da MM incluem, por exemplo, detecção de bordas, segmentação e reconstrução de imagens, reconhecimento de padrões, decomposição de sinais e imagens (Braga-Neto and Goutsias, 2004; Gonzalez-Hidalgo et al., 2015; Rittner et al., 2013; Rodrigues et al.; Serra, 2006). Os primeiros operadores morfológicos foram desenvolvidos por Matheron e Serra para imagens binárias no início da década de 1960 (Heijmans, 1995; Serra, 1982; Soille, 1999). Posteriormente, a morfologia matemática foi efetivamente estendida para imagens em tons de cinza usando os conceitos de umbra, conjuntos de níveis e a teoria dos conjuntos *fuzzy* (De Baets et al., 1994; Deng and Heijmans, 2002; Haralick et al., 1987; Heijmans, 1995; Nachtegael and Kerre, 2001; Sternberg, 1986; Sussner and Valle, 2008). Do ponto de vista algébrico, os operadores morfológicos podem ser muito bem definidos numa estrutura chamada reticulados completos (Heijmans, 1995; Ronse, 1990). Um reticulado completo $\mathbb{L}$ é um conjunto não-vazio parcialmente ordenado no qual todo subconjunto admite supremo e ínfimo (Birkhoff, 1993; Grätzer et al., 2003). Como a única exigência é uma ordem parcial com operadores de supremo e ínfimo bem definidos, reticulados completos permitiram o desenvolvimento de operadores morfológicos para dados multi-valorados, incluindo imagens multi-valoradas (Aptoula and Lefèvre, 2007; Lézoray, 2016). Contudo, diferente das abordagens binárias e em tons de cinza, não existe uma ordem natural para vetores. Consequentemente, muitos pesquisadores, incluindo Al-Otum (2015); Angulo (2007); Aptoula and Lefèvre (2007); Deborah et al. (2015); Goutsias et al. (1995); Ledoux et al. (2014, 2015); Lézoray (2016) e Velasco-Forero and Angulo (2011); Velasco-Forero and Angulo, estabeleceram esquemas de ordenação para a morfologia matemática multi-valorada. Em particular, Velasco-Forero and Angulo (2011) introduziram as chamadas ordens supervisionadas que generalizam muitas abordagens para a morfologia matemática multi-valorada, incluindo aquelas baseadas em distância (Angulo, 2007), e obtiveram excelentes resultados em análise de imagens hiper-espectrais (Velasco-Forero and Angulo, 2011; Grana and Chyzhyk, 2016). Em termos gerais, uma ordem supervisionada é determinada utilizando um conjunto de treinamento contendo valores de primeiro plano (*foreground*) e valores de fundo (*background*). Por exemplo,

Velasco-Forero and Angulo (2011) utilizaram uma máquina de vetores de suporte (SVM, do inglês *support vector machines*) enquanto que Grana and Chyzhyk (2016) utilizaram memórias associativas morfológicas para definir a ordem reduzida. Recentemente, utilizando a teoria dos conjuntos *fuzzy*, Sangalli and Valle desenvolveram uma ordem supervisionada que incorpora incertezas e subjetividades na descrição de cores pelos humanos. Nesse projeto de pesquisa, pretendemos dar sequência aos estudos iniciados por Sangalli and Valle investigando abordagens para a morfologia matemática multi-valorada considerando incertezas na definição de uma ordem supervisionada.

Tal como a morfologia matemática multi-valorada, redes neurais artificiais para dados multi-valorados também representam um tópico ativo de pesquisa. Por exemplo, as recentes redes em cápsulas (*capsule networks*) usam vetores invés de escalares para representar as características do objeto estudado (Sabour et al.). Portanto, as redes em cápsulas, que apresentaram excelente desempenho em problemas de classificação e que são consideradas por alguns pesquisadores como um novo marco no estudo de aprendizado profundo (*deep learning*), podem ser vistas como uma rede para dados multi-valorados. Nesse projeto de pesquisa, também pretendemos investigar redes neurais para dados multi-valorados. Especificamente, como uma aplicação direta dos estudos sobre a morfologia matemática multi-valorada, pretendemos desenvolver modelos de memórias associativas morfológicas multi-valoradas. Nesse ponto, destacamos que Valle and Grande Vicente (2012) apresentaram um modelo de memória associativa morfológica utilizando apenas as operações de supremo e ínfimo de um reticulado completo. Recentemente, Santos et al. apresentaram uma nova classe de memórias associativas morfológicas, referidas como memórias autoassociativass de projeção em reticulado completo (CLPAMs, do inglês *complete lattice projection autoassociative memories*), que também utilizam apenas as operações de um reticulado completo mas apresentam melhor tolerância a ruído. Sobretudo, uma certa CLPAM apresentou resultados promissores em problemas de reconhecimento de faces (Santos and Valle). Em vista dessas observações, pretendemos nesse projeto de pesquisa realizar estudo mais aprofundado sobre as CLPAMs. Em particular, considerando os avanços na morfologia matemática multi-valorada, pretendemos avaliar o desempenho das CLPAMs em problemas de classificação e reconhecimento de faces usando dados multi-valorados.

2 Identificação e Caracterização do Problema

2.1 Morfologia Matemática Multi-valorada

Primeiramente, uma imagem multi-valorada é uma aplicação de um conjunto de pontos $\mathcal{D}$ para um conjunto de valores $\mathbb{V} \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Por simplicidade, vamos assumir $\mathcal{D} \subset \mathbb{Z}^2$ ou $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$.

Conforme mencionado na introdução, a morfologia matemática pode ser muito bem definida em reticulados completos (Ronse, 1990; Heijmans, 1995). Um conjunto parcialmente ordenado $(\mathbb{L}, \leq)$ é um reticulado completo se todo subconjunto $X \subseteq \mathbb{L}$ possui supremo e ínfimo em $\mathbb{L}$, denotados respectivamente por $\bigwedge X$ e $\bigvee X$ (Birkhoff, 1993).

Tal como nas abordagens clássicas da morfologia matemática, erosões e dilatações de uma

imagem $\mathbf{I} : \mathcal{D} \to \mathbb{V}$ com valor em um reticulado completo podem ser definidas usando um elemento estruturante S. O elemento estruturante S é usado para extrair informações relevantes sobre o tamanho e forma de objetos numa imagem $\mathbf{I}$ (Dougherty and Lotufo, 2003; Soille et al., 1993). Os dois operadores elementares da morfologia matemática para imagens com valores em um reticulado completo podem ser definidos como segue usando um elemento estruturante:

Definição 1 (Erosão e Dilatação para Imagens com Valores em um Reticulado Completo)**.** *Suponha que o conjunto de valores $\mathbb{V}$, equipado com uma ordem parcial "$\leq$", é um reticulado completo. A erosão e a dilatação de uma imagem $\mathbf{I} : \mathcal{D} \to \mathbb{V}$ por um elemento estruturante S, denotados respectivamente por $\varepsilon_S(\mathbf{I})$ e $\delta_S(\mathbf{I})$, são as imagens dadas pelas seguintes equações para todo $x \in \mathcal{D}$:*

$$\varepsilon_S(\mathbf{I})(x) = \bigwedge_{\substack{s \in S \\ x+s \in \mathcal{D}}} \mathbf{I}(x+s) \quad e \quad \delta_S(\mathbf{I})(x) = \bigvee_{\substack{s \in S \\ x+s \in \mathcal{D}}} \mathbf{I}(x+s). \tag{1}$$

Note que o requisito principal em (1) é uma ordem parcial com operadores de supremo e ínfimo bem definidos. Acontece que não existe uma ordem natural para dados multi-valorados. Portanto, muitas pesquisas na morfologia matemática focaram em ordenações apropriadas para vetores (Goutsias et al., 1995; Talbot et al., 1998; Comer and Delp, 1999; Angulo, 2007; Velasco-Forero and Angulo; Lézoray, 2016). Descrições detalhadas das diversas abordagens para a morfologia matemática multi-valorada foram apresentadas por Angulo (2007); Aptoula and Lefèvre (2007) e Velasco-Forero and Angulo.

Uma abordagem simples para MM multi-valorada é obtida aplicando operadores morfológicos em escala de cinza componente-a-componente. Apesar de sua simplicidade, as informações entre as bandas de uma imagem multi-valorada (ou canais em uma imagem colorida) são ignoradas em uma abordagem componente-a-componente. Do ponto de vista teórico, a abordagem componente-a-componente está baseada na ordenação marginal, também conhecida como a ordem do produto. A ordenação marginal é um exemplo de uma ordenação parcial que não é total (van de Gronde and Roerdink, 2014). Um operador morfológico baseado em um esquema de ordenação parcial que não é total pode gerar os chamados *valores falsos*, também chamados *cores falsas*. Um valor falso é um elemento do conjunto de valores que não pertence à imagem original e pode ser um problema em algumas tarefas de processamento de imagens multi-valoradas (Serra, 2009).

Para contornar o problema dos valores falsos, um grande esforço foi dedicado aos operadores morfológicos multi-valorados baseados em um esquema de ordenação total. Entre as abordagens baseadas em ordenação totais, aquelas obtidas combinando uma ordenação reduzida com uma tabela de consulta (*look up table*) são particularmente interessantes e computacionalmente baratas (Goutsias et al., 1995; Velasco-Forero and Angulo). A ideia fundamental numa abordagem baseada numa ordenação reduzida pode ser resumida da seguinte forma: Primeiro, uma imagem multi-valorada é transformada em uma imagem em tons de cinza (geralmente de valor real) usando uma aplicação sobrejetiva $h : \mathbb{V} \to \mathbb{L}$ que é aplicada em cada pixel da imagem. Em seguida, um operador morfológico em tons de cinza é aplicado na imagem resultante

e uma semi-inversa de h é usada para recuperar uma imagem multi-valorada (Goutsias et al., 1995). O mapeamento semi-inverso pode ser determinado usando uma tabela de consulta na qual os elementos multi-valorados são ordenados de acordo com seu valor h. Detalhes dessa abordagem, incluindo um algoritmo no estilo da linguagem do `MATLAB`, são apresentados por Velasco-Forero and Angulo.

Existem na literatura diversas propostas para definir a aplicação sobrejetiva $h : \mathbb{V} \to \mathbb{L}$ de uma ordem reduzida. Por exemplo, Louverdis and Andreadis (2004) propuseram uma ordem reduzida no qual os elementos são classificados usando um sistema baseado em regras *fuzzy*. Velasco-Forero and Angulo (2012) propuseram um esquema de ordenação reduzida usando funções estatísticas profundas (*statistical depth functions*). Outro esquema promissor de ordenação, no qual o mapeamento sobrejetivo é construído a partir dos valores de uma imagem, foi proposto por Lézoray (2016). Sartor and Weeks (2001) propuseram uma ordem reduzida baseada na distância a uma certa referência. Ordens baseadas em distância também foram investigados por muitos outros pesquisadores incluindo Al-Otum (2015); Angulo (2007); Deborah et al. (2015); Ledoux et al. (2015) e Valle and Valente (2017).

Muitas abordagens baseadas na distância, no entanto, podem ser vistas como casos particulares do ordenamento supervisionado proposto por Velasco-Forero and Angulo (2011); Velasco-Forero and Angulo. Especificamente, numa ordem reduzida supervisionada, a aplicação sobrejetiva $h : \mathbb{V} \to \mathbb{L}$ é determinada usando um conjunto de treinamento composto por valores de primeiro plano (*foreground*) e de fundo (*background*). Em termos matemáticos, sejam

$$\mathcal{F} = \{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_K\} \quad \text{e} \quad \mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_M\}, \tag{2}$$

conjuntos com valores de referência de primeiro plano e fundo. Numa ordem reduzida supervisionada, espera-se que a aplicação sobrejetiva $h : \mathbb{V} \to \mathbb{L}$ satisfaça as condições

$$h(\mathbf{f}_i) = \top, \quad \forall i = 1, \ldots, K, \qquad \text{e} \qquad h(\mathbf{b}_j) = \bot, \quad \forall j = 1, \ldots, M, \tag{3}$$

em que $\top = \bigvee \mathbb{L}$ e $\bot = \bigwedge \mathbb{L}$ denotam respectivamente o maior e o menor valor de $\mathbb{L}$. Consequentemente, os operadores morfológicos obtidos usando uma ordem reduzida supervisionada podem ser interpretados em termos dos conjuntos de valores $\mathcal{B}$ e $\mathcal{F}$. A aplicação $h : \mathbb{V} \to \mathbb{L}$ de uma ordem reduzida supervisionada pode ser determinada usando máquinas de vetores de suporte (SVM) (Velasco-Forero and Angulo, 2011).

Usando a teoria dos conjuntos *fuzzy*, desenvolvemos recentemente uma abordagem para morfologia matemática multi-valorada que, além de fornecer uma elegante alternativa para a ordem reduzida supervisionada baseada em SVM de Velasco-Forero and Angulo (2011), pode abordar imprecisão e incertezas na descrição dos valores (ou cores) de uma imagem multi-valorada (ou colorida). Na abordagem baseada na teoria dos conjuntos *fuzzy*, a aplicação sobrejetiva $h_{\texttt{fuzzy}}$ fornece, para cada $\boldsymbol{x} \in \mathbb{V}$, o grau de veracidade da afirmação "$\boldsymbol{x}$ é um valor de primeiro plano e não é um valor de fundo". Formalmente, suponha que os valores de primeiro plano e fundo são descritos por conjuntos *fuzzy* com funções de pertinência $\varphi_F : \mathbb{V} \to [0, 1]$

e $\varphi_B : \mathbb{V} \to [0,1]$. As funções de pertinência φ_F e φ_B podem ser obtidas de (2) usando uma estrutura amigável como aquela desenvolvida por Soto-Hidalgo et al. (2016) ou, de forma mais simples, usando funções de pertinência Gaussianas. Finalmente, a aplicação sobrejetiva $h_{\texttt{fuzzy}}$ é definida pela equação

$$h_{\texttt{fuzzy}}(\boldsymbol{x}) = \varphi_F(\boldsymbol{x}) \triangle \eta(\varphi_B(\boldsymbol{x})), \quad \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{V}, \tag{4}$$

em que $\triangle$ e η denotam respectivamente uma norma triangular e uma negação *fuzzy* forte (Nguyen and Walker, 2000).

Nesse projeto de pesquisa, como uma sequência dos trabalhos desenvolvidos por Valle and Valente (2017); Sangalli and Valle, pretendemos desenvolver e investigar operadores morfológicos para imagens multi-valoradas. Em particular, tal como Sangalli and Valle, investigaremos como abordar incertezas e imprecisão nos conjuntos usados no treinamento de uma ordem reduzida supervisionada. Sobretudo, pretendemos discutir e comparar as diferentes abordagens para a morfologia matemática multi-valorada baseada em ordens supervisionadas.

2.2 Redes Neurais Morfológicas Multi-Valoradas

Em termos gerais, redes neurais artificiais (RNAs, do inglês *artificial neural networks*) são estruturas matemáticas parcialmente inspiradas no cérebro humano, onde as unidades básicas de processamento são os neurônios (Haykin, 2009). Pode-se dizer que os estudos em RNAs começaram em 1943, quando o biólogo McCulloch e o matemático Pitts introduziram um modelo matemático do neurônio biológico. Aproximadamente 15 anos após a publicação do artigo seminal de McCulloch e Pitts, Rosenblatt propôs uma nova abordagem para o reconhecimento de padrões chamado *perceptron*. Embora um único perceptron tem limitações computacionais severas, o perceptron de multicamadas (MLP, do inglês *multi-layer perceptron*) com pelo menos uma camada oculta é um aproximador universal (Haykin, 2009). Nos anos 70 e 80, vários pesquisadores incluindo Bryson, Werbos, Rumelhart e McClelland, desenvolveram independentemente a famosa classe de *algoritmos de retropropagação* (do inglês *backpropagation*), que contém muitos algoritmos amplamente utilizados para treinar redes MLP. Concomitantemente, pesquisadores como Kohonen, Nakano, Anderson e Hopfield investigaram modelos de redes neurais que podem ser usadas para implementar memórias associativas. Resumidamente, uma memória associativa é uma estrutura matemática inspirada na capacidade do cérebro humano de armazenar e recuperar informação (Hopfield, 1982; Kohonen, 1987; Hassoun and Watta, 1997).

Na metade da década de 1990, Ritter and Sussner (1996) introduziram as primeiras redes neurais morfológicas usando a chamada álgebra de imagens (*image algebra*) (Ritter et al., 1990). A álgebra de imagens é uma teoria que unifica várias técnicas de processamento de imagens, incluindo álgebra linear tradicional, a álgebra minimax de Cuninghame-Green (1979) e morfologia matemática. Normalmente, uma rede neural morfológica é definida como um tipo de rede neural artificial que realiza uma operação elementar de morfologia matemática em cada neurônio, possivelmente seguida da aplicação de uma função de ativação. Por exemplo,

as primeiras redes neurais morfológicas foram obtidas substituindo o produto matricial usual por operações da álgebra minimax que correspondem à uma operação de dilatação ou erosão (Ritter and Sussner, 1996; Ritter et al., 1998). Análogo à rede MLP tradicional, um perceptron morfológico de múltiplas camadas (MLMP, do inglês *multi-layer morphological perceptron*) é capaz de aproximar qualquer subconjunto $X \subseteq \mathbb{R}^m$ compacto com uma precisão $\epsilon > 0$ (Ritter and Urcid, 2003). As memórias associativas morfológicas, além de serem computacionalmente eficientes, apresentam capacidade absoluta de armazenamento ilimitada e uma excelente tolerância a certos tipos de ruído (Ritter et al., 1998; Sussner and Valle, 2006).

Recentemente desenvolvemos as chamadas memórias autoassociativass morfológicas de projeção (PAMMs, do inglês *projection autoassociative morphological memories*) max-+ e min-+ suas composições (Santos and Valle, 2018). Os novos modelos apresentaram resultados promissores em problemas de classificação com número significativo de características e classes. Também introduzimos as chamadas memórias autoassociativass de projeção em reticulados completos (CLPAM, do inglês *complete lattice projection autoassociative memories*) (Santos et al.). Um CLPAM é descrita por uma rede neural com uma única camada oculta de neurônios morfológicos. Sobretudo, uma CLPAM é formulada usando apenas as operações de supremo e ínfimo de um reticulado completo. Especificamente, seja $\mathbb{L}$ um reticulado completo e considere um conjunto de memórias fundamentais $\mathcal{X} = \left\{\boldsymbol{x}^1, \ldots, \boldsymbol{x}^k\right\} \subset \mathbb{L}$. Uma CLPAM, denotada por $\mathcal{S}_{\mathbb{L}} : \mathbb{L} \longrightarrow \mathbb{L}$, é uma memória associativa definida como segue para todo $\boldsymbol{x} \in \mathbb{L}$:

$$\mathcal{S}_{\mathbb{L}}(\boldsymbol{x}) = \bigwedge_{\xi \in \mathcal{J}_{\mathbb{L}}} \boldsymbol{x}^{\xi}, \quad \text{em que} \quad \mathcal{J}_{\mathbb{L}} = \left\{\xi \in \{1, 2, \ldots, k\} : \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{x}^{\xi}\right\}. \tag{5}$$

De um modo alternativo, $\mathcal{S}_{\mathbb{L}}$ pode ser formulada como

$$\mathcal{S}_{\mathbb{L}}(\boldsymbol{x}) = \bigwedge \left\{\boldsymbol{x}^{\xi} \in \mathcal{X} : \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{x}^{\xi}\right\}. \tag{6}$$

Em palavras, como o ínfimo é a maior cota inferior, temos que $\mathcal{S}_{\mathbb{L}}(\boldsymbol{x})$ é o maior elemento de $\mathbb{L}$ menor ou igual a todas as memórias fundamentais maiores que a entrada $\boldsymbol{x}$. Como consequência, uma CLPAM $\mathcal{S}_{\mathbb{L}}$ satisfaz $\mathcal{S}_{\mathbb{L}}(\boldsymbol{x}^{\xi}) = \boldsymbol{x}^{\xi}$ para todo $\xi \in \{1, 2 \ldots, k\}$, isto é, a memória $\mathcal{S}_{\mathbb{L}}$ apresenta ótima capacidade absoluta de armazenamento. Além disso, uma CLPAM é um operador idempotente, ou seja, $\mathcal{S}_{\mathbb{L}}(\mathcal{S}_{\mathbb{L}}(\boldsymbol{x})) = \mathcal{S}_{\mathbb{L}}(\boldsymbol{x})$ para todo $\boldsymbol{x} \in \mathbb{L}$. Em outras palavras, $\mathcal{S}_{\mathbb{L}}$ projeta o padrão de entrada $\boldsymbol{x}$ no mínimo das memórias fundamentais tais que $\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{x}^{\xi}$. Por fim, temos que $\mathcal{S}_{\mathbb{L}}$ é um operador extensivo, ou seja, a inequação $\boldsymbol{x} \leq \mathcal{S}_{\mathbb{L}}(\boldsymbol{x})$ vale para todo $\boldsymbol{x} \in \mathbb{L}$. Resumindo, vale o teorema:

Teorema 2. *Considere um conjunto de memórias fundamentais $\mathcal{X} = \left\{\boldsymbol{x}^1, \ldots, \boldsymbol{x}^k\right\} \subset \mathbb{L}$, em que $\mathbb{L}$ é um reticulado completo. A CLPAM $\mathcal{S}_{\mathbb{L}}$ definida por* (6) *é extensiva ($\boldsymbol{x} \leq \mathcal{S}_{\mathbb{L}}(\boldsymbol{x})$), idempotente ($\mathcal{S}_{\mathbb{L}}(\mathcal{S}_{\mathbb{L}}(\boldsymbol{x})) = \mathcal{S}_{\mathbb{L}}(\boldsymbol{x})$) e satisfaz $\mathcal{S}_{\mathbb{L}}(\boldsymbol{x}^{\xi}) = \boldsymbol{x}^{\xi}$ para todo $\xi = 1, \ldots, k$.*

Com respeito à tolerância a ruído, tem-se:

Teorema 3. *Considere um conjunto de memórias fundamentais $\mathcal{X} = \left\{\boldsymbol{x}^1, \ldots, \boldsymbol{x}^k\right\} \subset \mathbb{L}$ e seja $\boldsymbol{x} \in \mathbb{L}$ o padrão de entrada. Se existe um único índice $\gamma \in \{1, \ldots, k\}$ tal que $\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{x}^{\gamma}$, então a*

CLPAM dada por (6) *satisfaz* $\mathcal{S}_{\mathbb{L}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{\gamma}$.

Considerando o intervalo $[0, 1]$ com a ordem usual, uma certa CLPAM combinada com uma técnica de mascaramento apresentou um excelente equilíbrio entre desempenho e custo computacional em problemas de reconhecimento de faces (Santos and Valle). Contudo, como as CLPAMs podem ser definidas usando apenas a estrutura de reticulado completo, elas podem beneficiar dos resultados obtidos para a morfologia matemática multi-valorada. Com efeito, pretendemos definir redes neurais morfológicas, em particular extensões das CLPAMs, para dados multi-valorados. Sobretudo, uma vez que muitos grânulos de informação, como intervalos, conjuntos *fuzzy* e suas extensões podem ser equipados por uma ordem parcial, as CLPAMs e, de um modo mais geral as redes neurais morfológicas, podem ser úteis com o advento da computação granular (Pedrycz et al., 2008a,b).

3 Objetivos, Plano de Trabalho e Cronograma

Nesse projeto de pesquisa, primeiramente, estudaremos e desenvolveremos operadores morfológicos para imagens multi-valoradas. Posteriormente, investigaremos redes neurais morfológicas projetadas para tratar dados multi-valorados. Especificamente, serão executadas as seguintes atividades:

1. ***Atividade 1*** – **Morfologia Matemática Multi-Valorada**:

   Nos primeiros 12 meses, como uma sequência dos trabalhos desenvolvidos por Valle and Valente (2017); Sangalli and Valle, desenvolveremos e investigaremos operadores morfológicos para imagens multi-valoradas. Em particular, tal como Sangalli and Valle, consideraremos casos em que existem incertezas nos dados usados para estabelecer a aplicação $h : \mathbb{V} \to \mathbb{L}$ de uma ordem reduzida supervisionada. As abordagens estudadas para a morfologia matemática multi-valorada serão implementadas em softwares matemáticos apropriados como `MATLAB`, `GNU Octave` e `Python`.

2. ***Atividade 2*** – **Redes Neurais Morfológicas Multi-Valoradas**:

   Nos 12 meses seguintes, investigaremos propriedades teóricas e computacionais das memórias autoassociativass de projeção em reticulados completos (CLPAM, do inglês *complete lattice projection autoassociative memories*) (Santos et al.). Em particular, considerando o excelente equilíbrio entre desempenho e custo computacional de uma certa CLPAM em problemas de reconhecimento de faces com imagens em tons de cinza (Santos and Valle), pretendemos desenvolver CLPAMs para dados multi-valorados usando resultados obtidos na atividade anterior. Esperamos que as CLPAMs multi-valoradas também apresentem bons resultados em problemas de classificação, incluindo reconhecimento de faces. Os novos modelos serão implementados em softwares matemáticos e comparados com modelos da literatura.

Tabela 1: Cronograma de Execução

Atividade 1	Atividade 2
Maio/2019 a Abril/2020	Maio/2020 a Abril/2021

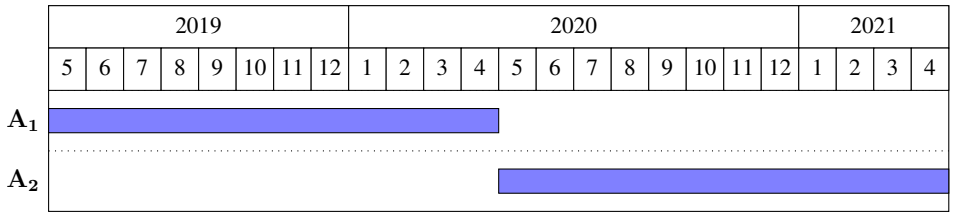

Figura 1: Cronograma de Execução das Atividades 1–3.

As três atividades listadas acima seguirão o cronograma da Tabela 1, que também pode ser visualizado na Figura 1.

Durante todas as atividades, pretende-se divulgar os resultados obtidos em eventos científicos da área bem como envolver alunos de graduação e pós-graduação nessa área de pesquisa. Também serão redigidos artigos científicos que serão submetidos para revistas conceituadas, preferencialmente de circulação internacional.

4 Contribuições e Resultados Esperados

Nesse projeto de pesquisa investigaremos e desenvolveremos abordagens para a morfologia matemática multi-valorada. Conforme mencionado no primeiro parágrafo da introdução, aplicações da morfologia matemática incluem detecção de contorno, segmentação e reconstrução automática de imagem, reconhecimento de padrões e decomposição de sinais e imagens. Portanto, esse projeto de pesquisa deve contribuir nessas aplicações.

Além dos estudos sobre morfologia matemática multi-valorada, investigaremos também modelos de redes neurais para dados multi-valorados. Especificamente, utilizando operadores da morfologia matemática multi-valorada, pretendemos desenvolver modelos de redes neurais morfológicas para dados multi-valorados como imagens coloridas e hiper-espectrais. Nesse ponto lembramos que grânulos de informação como intervalos, conjuntos *fuzzy* e suas extensões podem ser investigados considerando uma ordem parcial. Como reticulados completos estabelecem uma estrutura matemática apropriada para definir redes neurais morfológicas, os modelos desenvolvidos nesse projeto podem contribuir para o advento da computação granular. Com efeito, redes neurais morfológicas apresentaram excelentes resultados em problemas de classificação e reconhecimento de faces mas com um baixo custo computacional.

É importante ressaltar que os todos resultados desenvolvidos terão forte fundamento matemático. Sobretudo, os resultados desenvolvidos nesse projeto de pesquisa serão submetidos na forma de artigos para periódicos de circulação internacional como *IEEE Transactions on*

Neural Networks, *Neural Networks*, *Neurocomputing*, *Pattern Recognition*, *Pattern Recognition Letters*, *Journal of Mathematical, Imaging, and Vision*, dentre outros similares.

5 Orçamento Solicitado e Justificativa

Para execução do projeto de pesquisa, serão solicitados, além da reserva técnica e dos benefícios complementares, os seguintes itens:

a) Três Computador de 8º Geração ..... $3 \times 8.198,00 =$ **R$ 24.594,00**
(Processador Intel i7, HD 1TB, 16GB RAM, Monitor 21.5", Placa NVIDA)

b) Notebook/Ultrabook ..... **R$ 4.939,00**
(Processador i7, 8ª geração, pelo menos 1TB de HD e 8MB RAM.)

c) Licença de Toolboxes do MATLAB ..... **R$ 8.568,72**

- MATLAB ..... R$ 3.295,66
- Statistics and Machine Learning Toolbox ..... R$ 1.318,26
- Deep Learning Toolbox ..... R$ 1.318,26
- Optimization Toolbox ..... R$ 1.318,26
- Global Optimization Toolbox ..... R$ 1.318,26

d) Publicação de um artigo no formato *Open Access* ..... **R$ 4.000,00**

TOTAL ..... ***R$ 42.101,72***

Um dos computadores *desktop* será utilizado pelo proponente enquanto que os outros dois ficarão disponíveis para os alunos de graduação e/ou pós-graduação no *Laboratório de Processamento de Imagens e Inteligência Computacional* do IMECC. Os experimentos computacionais serão realizados nos computadores solicitados e, considerando os avanços na computação GPU, acrescentamos placas de vídeo em suas configurações. As *toolboxes* do `MATLAB` ficarão disponíveis na estação de trabalho (*workstation*), que permite acesso remoto, e serão utilizados para comparação e desenvolvimento dos modelos propostos nesse projeto. O *notebook* será utilizado principalmente para redigir trabalhos científicos e durante a participação eventos. Por fim, solicitamos auxílio para possível publicação de um artigo no formato *Open Access* na edição especial intitulada "*Lattice Computing: A Mathematical Modelling Paradigm for Cyber-Physical System Applications*", editada pelo Prof. Dr. Vassilis G. Kaburlasos, Grécia, na revista *Mathematics* (ISSN 2227-7390). Detalhes sobre a edição especial podem ser encontrados em `https://www.mdpi.com/journal/mathematics/special_issues/Lattice_Computing`.

Referências

H. M. Al-Otum. A novel set of image morphological operators using a modified vector distance measure with color pixel classification. *Journal of Visual Communication and Image Representation*, 30:46–63, Jul 2015. doi: 10.1016/j.jvcir.2015.02.010.

J. Angulo. Morphological colour operators in totally ordered lattices based on distances: Application to image filtering, enhancement and analysis. *Computer Vision and Image Understanding*, 107(1–2):56–73, July-August 2007. Special issue on color image processing.

E. Aptoula and S. Lefèvre. A Comparative Study on Multivariate Mathematical Morphology. *Pattern Recognition*, 40(11):2914–2929, November 2007.

G. Birkhoff. *Lattice Theory*. American Mathematical Society, Providence, 3 edition, 1993.

U. Braga-Neto and J. Goutsias. Supremal multiscale signal analysis. *SIAM Journal of Mathematical Analysis*, 36(1):94–120, 2004.

M. L. Comer and E. J. Delp. Morphological operations for color image processing. *Journal of Electronic Imaging*, 8(3):279–289, 1999.

R. Cuninghame-Green. *Minimax Algebra: Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems 166*. Springer-Verlag, New York, 1979.

B. De Baets, E. Kerre, and M. Gupta. The fundamentals of fuzzy mathematical morphology, part 1: basic concepts. *International Journal of General Systems*, 23:155–171, 1994.

H. Deborah, N. Richard, and J. Hardeberg. Spectral Ordering Assessment Using Spectral Median Filters. In J. A. Benediktsson, J. Chanussot, L. Najman, and H. Talbot, editors, *Mathematical Morphology and Its Applications to Signal and Image Processing*, volume 9082 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 387–397. Springer International Publishing, 2015. doi: 10.1007/978-3-319-18720-4_33.

T. Deng and H. Heijmans. Grey-scale morphology based on fuzzy logic. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 16(2):155–171, 2002.

E. R. Dougherty and R. A. Lotufo. *Hands-on Morphological Image Processing*. SPIE PRESS, July 2003.

M. Gonzalez-Hidalgo, S. Massanet, A. Mir, and D. Ruiz-Aguilera. On the Choice of the Pair Conjunction-Implication Into the Fuzzy Morphological Edge Detector. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 23(4):872–884, Aug 2015. doi: 10.1109/TFUZZ.2014.2333060.

J. Goutsias, H. J. A. M. Heijmans, and K. Sivakumar. Morphological Operators for Image Sequences. *Computer vision and image understanding*, 62:326–346, 1995.

M. Grana and D. Chyzhyk. Image Understanding Applications of Lattice Autoassociative Memories. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 27(9):1920–1932, Sept 2016. doi: 10.1109/TNNLS.2015.2461451.

G. Grätzer et al. *General Lattice Theory*. Birkhäuser Verlag, Basel, Switzerland, 2nd edition edition, 2003.

R. Haralick, S. Sternberg, and X. Zhuang. Image Analysis Using Mathematical Morphology: Part I. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 9(4):532–550, July 1987.

M. H. Hassoun and P. B. Watta. Associative Memory Networks. In E. Fiesler and R. Beale, editors, *Handbook of Neural Computation*, pages C1.3:1–C1.3:14. Oxford University Press, 1997.

S. Haykin. *Neural Networks and Learning Machines*. Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ, 3rd edition edition, 2009.

H. J. A. M. Heijmans. Mathematical Morphology: A Modern Approach in Image Processing Based on Algebra and Geometry. *SIAM Review*, 37(1):1–36, 1995.

J. J. Hopfield. Neural Networks and Physical Systems with Emergent Collective Computational Abilities. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 79:2554–2558, Apr. 1982.

T. Kohonen. *Self-organization and associative memory*. Springer-Verlag New York, Inc., New York, NY, USA, 2rd edition edition, 1987.

A. Ledoux, N. Richard, A.-S. Capelle-Laizé, and C. Fernandez-Maloigne. Toward a Complete Inclusion of the Vector Information in Morphological Computation of Texture Features for Color Images. In A. Elmoataz, O. Lezoray, F. Nouboud, and D. Mammass, editors, *Image and Signal Processing*, volume 8509 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 222–229. Springer International Publishing, 2014. doi: 10.1007/978-3-319-07998-1_25.

A. Ledoux, N. Richard, A.-S. Capelle-Laizé, and C. Fernandez-Maloigne. Perceptual color hit-or-miss transform: application to dermatological image processing. *Signal, Image and Video Processing*, 9(5):1081–1091, 2015. doi: 10.1007/s11760-013-0537-z.

O. Lézoray. Complete lattice learning for multivariate mathematical morphology. *Journal of Visual Communication and Image Representation*, 35:220–235, Feb 2016. doi: 10.1016/j.jvcir.2015.12.017.

G. Louverdis and I. Andreadis. Soft Morphological Filtering Using aFuzzy Model and its Application to Colour ImageProcessing. *Formal Pattern Analysis & Applications*, 6(4):257–268, Feb 2004. doi: 10.1007/s10044-003-0193-y.

M. Nachtegael and E. E. Kerre. Connections between binary, gray-scale and fuzzy mathematical morphologies. *Fuzzy Sets and Systems*, 124(1):73–85, 2001.

H. T. Nguyen and E. A. Walker. *A First Course in Fuzzy Logic*. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, 2 edition, 2000.

W. Pedrycz, B. J. Park, and S. K. Oh. The design of granular classifiers: A study in the synergy of interval calculus and fuzzy sets in pattern recognition. *Pattern Recognition*, 41:3720–3735, 2008a.

W. Pedrycz, A. Skowron, and V. Kreinovich, editors. *Handbook of Granular Computing*. John Wiley and Sons, Inc., New York, 2008b.

G. X. Ritter and P. Sussner. An Introduction to Morphological Neural Networks. In *Proceedings of the 13th International Conference on Pattern Recognition*, pages 709–717, Vienna, Austria, 1996.

G. X. Ritter and G. Urcid. Lattice Algebra Approach to Single-Neuron Computation. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 14(2):282–295, 2003.

G. X. Ritter, J. N. Wilson, and J. L. Davidson. Image Algebra: An Overview. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, 49(3):297–331, Mar. 1990.

G. X. Ritter, P. Sussner, and J. L. D. de Leon. Morphological Associative Memories. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 9(2):281–293, 1998.

L. Rittner, J. Campbell, P. Freitas, S. Appenzeller, G. B. Pike, and R. Lotufo. Analysis of Scalar Maps for the Segmentation of the Corpus Callosum in Diffusion Tensor Fields. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 45:214–226, 2013.

E. Rodrigues, A. Conci, and P. Liatsis. Morphological classifiers
, volume =. *Pattern Recognition*, pages 82–96. ISSN 0031-3203. doi: 10.1016/j.patcog.2018.06.010.

C. Ronse. Why Mathematical Morphology Needs Complete Lattices. *Signal Processing*, 21(2): 129–154, 1990.

S. Sabour, N. Frosst, and G. E. Hinton. Dynamic Routing Between Capsules
, url =. *CoRR*.

M. Sangalli and M. E. Valle. In *Fuzzy Information Processing*
, editor =.

A. S. Santos and M. E. Valle. In *2017 Brazilian Conference on Intelligent Systems (BRACIS)*
, doi =.

A. S. Santos and M. E. Valle. Max-plus and min-plus projection autoassociative morphological memories and their compositions for pattern classification. *Neural Networks*, 100:84–94, 2018. doi: 10.1016/j.neunet.2018.01.013.

A. S. Santos, M. E. Valle, and A. A. Nascimento. In *Proceedings Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics. Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional.*
, month =, Campinas – Brazil.

L. J. Sartor and A. R. Weeks. Morphological operations on color images. *Journal of Electronic Imaging*, 10(2):548–559, 2001. doi: 10.1117/1.1353199.

J. Serra. *Image Analysis and Mathematical Morphology*. Academic Press, London, 1982.

J. Serra. A Lattice Approach to Image Segmentation. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 24:83–130, 2006.

J. Serra. The "False Colour" Problem. In M. H. Wilkinson and J. B. Roerdink, editors, *Mathematical Morphology and Its Application to Signal and Image Processing*, volume 5720 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 13–23. Springer Berlin Heidelberg, 2009.

P. Soille. *Morphological Image Analysis*. Springer Verlag, Berlin, 1999.

P. Soille, S. Beucher, and J. F. Rivest. Morphological gradients. *Journal of Electronic Imaging*, 2(4)(12):326–336, Oct. 1993.

J. M. Soto-Hidalgo, P. M. Martinez-Jimenez, J. Chamorro-Martinez, and D. Sanchez. JFCS: A Color Modeling Java Software Based on Fuzzy Color Spaces. *IEEE Computational Intelligence Magazine*, 11(2):16–28, May 2016. doi: 10.1109/MCI.2016.2532265.

S. Sternberg. Grayscale Morphology. *Computer Vision, Graphics and Image Processing*, 35: 333–355, 1986.

P. Sussner and M. E. Valle. Grayscale Morphological Associative Memories. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 17(3):559–570, May 2006.

P. Sussner and M. E. Valle. Classification of Fuzzy Mathematical Morphologies Based on Concepts of Inclusion Measure and Duality. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 32(2):139–159, Oct. 2008.

H. Talbot, C. Evans, and R. Jones. Complete Ordering and Multivariate Mathematical Morphology. In *Proceedings of the Fourth International Symposium on Mathematical Morphology and Its Applications to Image and Signal Processing*, ISMM '98, pages 27–34, Norwell, MA, USA, 1998. Kluwer Academic Publishers.

M. E. Valle and D. M. Grande Vicente. Sparsely Connected Autoassociative Lattice Memories with an Application for the Reconstruction of Color Images. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 44(3):195–222, Nov. 2012.

M. E. Valle and R. A. Valente. Mathematical Morphology on the Spherical CIELab Quantale with an Application in Color Image Boundary Detection. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 57(2):183 – 201, Feb. 2017. doi: 10.1007/s10851-016-0674-4.

J. van de Gronde and J. Roerdink. Group-Invariant Colour Morphology Based on Frames. *IEEE Transactions on Image Processing*, 23(3):1276–1288, March 2014.

S. Velasco-Forero and J. Angulo. Dordrecht.

S. Velasco-Forero and J. Angulo. Supervised Ordering in $\mathbb{R}^p$: Application to Morphological Processing of Hyperspectral Images. *IEEE Transactions on Image Processing*, 20(11):3301–3308, Nov 2011. doi: 10.1109/TIP.2011.2144611.

S. Velasco-Forero and J. Angulo. Random Projection Depth for Multivariate Mathematical Morphology. *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, 6(7):753–763, Nov 2012. doi: 10.1109/JSTSP.2012.2211336.

K. Zhu, Y. Chen, P. Ghamisi, X. Jia, and J. A. Benediktsson. Deep Convolutional Capsule Network for Hyperspectral Image Spectral and Spectral-Spatial Classification
, volume =. *Remote Sensing*, (3). doi: 10.3390/rs11030223.