

# Análise Real e Elementos de Análise Real

## Prova 2 - Segunda Chamada

	Nota
Q1	
Q2	
Q3	
Q4	
Q5	
Total	

Nome: \_\_\_\_\_

**Questão 1.** Seja  $(X, d)$  um espaço métrico e  $E \subseteq X$ . Mostre que o conjunto de todos os pontos de acumulação de  $E$ , denotado por  $E'$ , é um conjunto fechado.

**Questão 2.** Num espaço métrico  $(X, d)$ , se a seguinte relação é satisfeita  $E \subset F \subseteq \bar{E}$ , onde  $\bar{E}$  denota o fecho de  $E$ , então dizemos que  $E$  é denso em  $F$ . Por exemplo, o conjunto dos números racionais  $\mathbb{Q}$  é denso em  $\mathbb{R}$ . Mostre que, se  $E$  é denso em  $F$  e  $F$  é denso em  $G$ , então  $E$  é denso em  $G$ .

**Questão 3.** Construa em  $\mathbb{R}$  um conjunto limitado com exatamente três pontos de acumulação.

**Questão 4.** Seja  $(X, d)$  um espaço métrico e  $\{p_n\}$  uma sequência em  $X$ . Mostre que  $\{p_n\}$  converge para  $p \in X$  se, e somente se, todas as subsequências de  $\{p_n\}$  convergem para  $p$ . Use esse fato para mostrar que a sequência  $\{p_n\}$  converge se, e somente se,  $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$  e  $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$  são ambos finitos e iguais.

**Questão 5.** Seja  $a_n$  uma sequência de números reais tais que

$$|a_{n+2} - a_{n+1}| \leq \frac{1}{2}|a_{n+1} - a_n|, \quad \forall n \geq 1.$$

Mostre que a sequência  $\{a_n\}$  converge.

As questões serão consideradas somente se forem apresentados todos os argumentos necessários.

BOA PROVA!!!