Análise Real e Elementos de Análise Real

Lista de Exercícios para o Exame

1 Números Reais

Exercício 1. Seja p um número primo. Mostre que $\sqrt{p}$ é um número irracional, i.e., não existe $q \in \mathbb{Q}$ tal que $q^2 = p$.
Dica: Use o seguinte teorema: "Se um número primo p divide ab, então p divide a ou b".

Exercício 2. Mostre que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ é um número irracional.

Exercício 3. Encontre o $\sup$ e $\inf$ de cada um dos seguintes conjuntos:

1. O conjunto de todos os números da forma $2^{-p} + 3^{-q} + 5^{-r}$, onde p, q e r são inteiros positivos.
2. $S = \{x : 3x^2 - 10x + 3 < 0\}$.
3. $S = \{x : (x-a)(x-b)(x-c)(x-d) < 0\}$, onde $a < b < c < d$.

Exercício 4 (Propriedade da Comparação)**.** Seja S um conjunto ordenado e suponha $A, B \subseteq S$ sejam subconjuntos não-vazios tais que $a \leq b$ para todo $a \in A$ e $b \in B$. Mostre que, se B admite supremo, então A também admite supremo e $\sup A \leq \sup B$.

Exercício 5. Dados números reais a e b tais que $a \leq b + \epsilon$, para todo $\epsilon > 0$, então $a \leq b$.

Exercício 6 (Propriedade de Aproximação)**.** Seja $S \subseteq \mathbb{R}$ um conjunto não-vazio com supremo, digamos $s = \sup S$. Mostre que, para todo $a < s$, existe $x \in S$ tal que $a < x \leq s$.

Definição 1 (Representação Decimal Finita)**.** *Um número real da forma*

$$r_n = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \ldots + \frac{a_n}{10^n}, \tag{1}$$

onde a_0 é um inteiro e $a_1, \ldots, a_n$ são inteiros tais que $0 \leq a_i \leq 9$ é geralmente escrito na forma:

$$r_n = a_0.a_1a_2\ldots a_n,$$

chamada representação decimal finita de r_n.

Exercício 7. Mostre que, se um número r_n é dado por uma decimal finita (1), então $r_n \in \mathbb{Q}$. Mostre também que a recíproca é falsa.

Exercício 8. Considere um número real $x > 0$. Mostre que, para todo inteiro $n \geq 1$, existe um decimal finito $r_n = a_0.a_1\ldots a_n$ tal que

$$r_n \leq x < r_n + \frac{1}{10^n}. \tag{2}$$

Definição 2 (Representação Decimal Infinita)**.** *A representação infinita de um número real $r \in \mathbb{R}$, denotada por $r = a_0.a_1a_2a_3\ldots$, é definida como o supremo do conjunto $\{r_1, r_2, \ldots\}$, onde cada r_n satisfaz* (2) *para $n = 1, 2, \ldots$.*

Exercício 9. Encontre o número racional cuja representação decimal é $0.3344444\ldots$.

Definição 3 (Valor Absoluto)**.** *Dado $x \in \mathbb{R}$, o valor absoluto de x, denotado por $|x|$, é definido como segue:*

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0, \\ -x, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Exercício 10 (Desigualdade Triangular)**.** Mostre que a seguinte desigualdade vale par todo $x, y \in \mathbb{R}$:

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

2 Conjuntos e Funções

Exercício 11. Prove ou de um contra-exemplo para as seguintes afirmações onde A, B, C são conjuntos arbitrários:

(a) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ e $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

(b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

(c) $(A \cup B) \cap (A \cup C) = A \cup (B \cap C)$.

(d) $(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$.

(e) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$.

(f) $(A \setminus C) \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$.

(g) $(A \setminus B) \cup B = A$ se e somente se $B \subseteq A$.

Exercício 12. Seja $f : S \to T$ uma função. Dados subconjuntos arbitrários $A, B \subseteq S$, mostre que

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B) \quad \text{e} \quad f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B).$$

Exercício 13. Seja $f : S \to T$ uma função e suponha que $X, X_1, X_2 \subseteq S$ e $Y, Y_1, Y_2 \subseteq T$. Mostre que ou de um contra-exemplo para cada um dos seguintes itens:

(a) $X \subseteq f^{-1}[f(X)]$.

(b) $f([f^{-1}(Y)] \subseteq Y$.

(c) $f^{-1}[Y_1 \cup Y_2] = f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2)$.

(d) $f^{-1}[Y_1 \cap Y_2] = f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2)$.

(e) $f^{-1}(T \setminus Y) = S \setminus f^{-1}(Y)$.

Exercício 14. Seja $f : S \to T$ uma função. Mostre que as seguintes afirmações são equivalentes:

(a) f é injetora,

(b) $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$, para todo $A, B \subseteq S$.

(c) $f^{-1}[f(A)] = A$ para todo $A \subseteq S$.

(d) Se $A, B \subseteq S$ são subconjuntos disjuntos, então $f(A)$ e $f(B)$ são também disjuntos.

(e) Para todo subconjunto A e B de S com $B \subseteq A$, tem-se $f(A \setminus B) = f(A) \setminus f(B)$.

Exercício 15. Seja S a coleção de todos os subconjuntos de um dado conjunto T. Seja $f : S \to \mathbb{R}$ uma função definida em S. A função f é dita *aditiva* se $f(A \cup B) = f(A) + f(B)$, sempre que A e B forem subconjuntos disjuntos de T. Mostre que, se f é aditiva, então as seguintes equações valem para todos subconjuntos $A, B \subseteq T$:

$$f(A \cup B) = f(A) + f(B \setminus A) \quad \text{e} \quad f(A \cup B) = f(A) + f(B) - f(A \cap B).$$

3 Sequências e Séries

Exercício 16. Seja $\{s_n\}$ uma sequencia de números reais. Mostre que $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ se, e somente se, $\lim_{n\to\infty}(s_n - s) = 0$.

Exercício 17. Demostre as seguintes afirmações sobre sequências de números reais.

a) $x^n \to 0$ se $|x| < 1$ e diverge se $|x| > 1$.

b) Se $s_n \to 0$ e $\{c_n\}$ é uma sequencia limitada, então $\{c_n s_n\} \to 0$.

c) $x^n/n! \to 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

d) Se $a_n = \sqrt{n^2+2} - n$, então $a_n \to 0$.

Exercício 18. Seja $0 < x_1 < 1$ e $x_{n+1} = 1 - \sqrt{1 - x_n}$ para todo $n \geq 1$. Mostre que $\{x_n\}$ é uma sequencia decrescente, i.e. $x_{n+1} \leq x_n$, que converge para zero. Mostre também que $x_{n+1}/x_n \to 1/2$.

Exercício 19. Considere sequencias de inteiros positivos $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ definidas recursivamente tomando $a_1 = b_1 = 1$ e igualando as partes racionais e irracionais da seguinte equação para $n \geq 2$:

$$a_n + b_n\sqrt{2} = (a_{n-1} + b_{n-1}\sqrt{2})^2.$$

Mostre que $a_n^2 - 2b_n^2 = 1$ para $n \geq 2$. Conclua que $a_m/b_n \to \sqrt{2}$ por valores maiores que $\sqrt{2}$ e que $2b_n/a_n \to \sqrt{2}$ por valores menores que $\sqrt{2}$.

Exercício 20. Seja $\{s_n\}$ uma sequência monótona de números reais. Mostre que $\{s_n\}$ converge se, e somente se, é limitada.

Exercício 21. Prove que a convergência de uma sequência de números reais $\{s_n\}$ implica a convergência da sequência $\{|s_n|\}$. A recíproca é verdadeira? Justifique sua resposta.

Exercício 22. Seja $s_1 = \sqrt{2}$ e defina

$$s_{n+1} = \sqrt{2 + \sqrt{s_n}} \quad \text{para todo } n = 1, 2, \ldots$$

Mostre que $\{s_n\}$ converge e que $s_n < 2$ para todo $n = 1, 2, \ldots$.

Exercício 23. Mostre que a sequência de números reais definida abaixo converge.

$$x_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}, \quad \forall n = 1, 2, \ldots$$

Exercício 24. Seja a_n uma sequência de números reais tais que

$$|a_{n+2} - a_{n+1}| \leq \frac{1}{2}|a_{n+1} - a_n|, \quad \forall n \geq 1.$$

Mostre que a sequência $\{a_n\}$ converge.

Exercício 25. Mostre que uma série de termos não-negativos converge se e somente se a sequência das somas parciais é limitada.

Exercício 26. Sejam $a = \sum a_n$ e $b = \sum b_n$ séries convergentes. Mostre que, para quaisquer constantes α e β, a série $\sum(\alpha a_n + \beta b_n)$ converge para a soma $\alpha a + \beta b$, i.e.,

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Exercício 27. Suponha que $a_n > 0$ e $b_n > 0$ para todo $n = 1, 2, \ldots$. Mostre que, se existe uma constante positiva c e um inteiro N tais que $a_n < cb_n$ para todo $n \geq N$, então a convergência de $\sum b_n$ implica a convergência de $\sum a_n$.

Exercício 28 (Teste da Comparação no Limite)**.** Suponha que $a_n > 0$ e $b_n > 0$ para todo $n = 1, 2, \ldots$ são tais que

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1.$$

Mostre que $\sum a_n$ converge se, e somente se, $\sum b_n$ converge.

Exercício 29. Encontre o raio de convergência das seguintes séries de potências:

$$\text{a)} \quad \sum n^3 x^n, \qquad \text{b)} \quad \sum \frac{2^n}{n!} x^n, \tag{3}$$

$$\text{c)} \quad \sum \frac{2^n}{n^2} x^n, \qquad \text{d)} \quad \sum \frac{n^3}{3^n} x^n. \tag{4}$$

Exercício 30. Dada uma sequência de números reais $\{x_n\}$, defina sua média aritmética σ_n como segue para todo $n = 0, 1, \ldots$

$$\sigma_n = \frac{x_0 + x_1 + \ldots + x_n}{n+1}.$$

a) Mostre que, se $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, então $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = x$.

b) Construa uma sequência $\{x_n\}$ que não converge mas que $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = 0$.

Exercício 31. Dada uma série de números reais $\sum a_n$, defina

$$p_n = \frac{|a_n| + a_n}{2} \quad \text{e} \quad q_n = \frac{|a_n| - a_n}{2}.$$

Mostre que:

a) Se $\sum a_n$ é condicionalmente convergente, i.e. $\sum a_n$ converge mas $\sum |a_n|$ diverge, então ambas $\sum p_n$ e $\sum q_n$ divergem.

b) Se $\sum |a_n|$ converge, então ambas $\sum p_n$ e $\sum q_n$ convergem e vale a equação:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} p_n - \sum_{n=1}^{\infty} q_n.$$

Exercício 32. Considere uma série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ cujos coeficientes estão relacionados através da seguinte equação:

$$a_n + A a_{n-1} + B a_{n-2} = 0, \quad \forall n = 2, 3, \ldots$$

Mostre que, para todo x no qual a série converge, tem-se que a soma da série é:

$$\frac{a_0 + (a_1 + A a_0)x}{1 + Ax + Bx^2}.$$

4 Limites e Funções Contínuas

Exercício 33. Investigue o comportamento da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = \begin{cases} 6 & \text{se } x = 1, \\ \frac{x^2-1}{x-1} & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

quando $x \to 1$. Justifique sua resposta demonstrando (e determinando) a existência do limite $\lim_{x\to 1} f(x)$.

Exercício 34. Seja $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ a função dada por

$$f(x) = \frac{|x|}{x}.$$

O limite $\lim_{x\to 0} f(x)$ existe? Justifique sua resposta.

Exercício 35. Defina $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ como $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$. Investigue o comportamento de f para x próximo 0. Em outras palavras, mostre se o limite $\lim_{x\to 0} f(x)$ existe ou não. Faça a mesma análise para a função $g : (0, 1) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1/x$.

Exercício 36. Sejam (a, b) um intervalo aberto em $\mathbb{R}$, $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ e $x \in (a, b)$. Considere as seguintes afirmações:

$$\text{a)} \quad \lim_{h \to 0} |f(x+h) - f(x)| = 0, \tag{5}$$

$$\text{b)} \quad \lim_{h \to 0} |f(x+h) - f(x-h)| = 0. \tag{6}$$

Mostre que $a)$ sempre implica $b)$ e dê um exemplo na qual $b)$ vale mas $a)$ não é válido.

Exercício 37. Mostre que a função constante e a função identidade em $\mathbb{R}$ são ambas funções contínuas. Em outras palavras, dados $c \in \mathbb{R}$ e $X \subseteq \mathbb{R}$, mostre que a função $f : X \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = c$ para todo $x \in X$ é uma função contínua em X. Mostre também que a função $g : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = x$ para todo $x \in X$ é contínua em X.

Exercício 38. Mostre que todo polinômio em $\mathbb{R}$ é uma função contínua. Em outras palavras, dados $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ e $X \subseteq \mathbb{R}$, mostre que a função polinômial $p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ é contínua em X.

Exercício 39. Seja $f : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $f(x) = 0$ se x é racional. Mostre que $f(x) = 0$ para todo $x \in [a, b]$.

Exercício 40. Sejam $f, g, h : [0, 1] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções definidas como segue:

$$\text{a)} \quad f(x) = g(x) = h(x) = 0, \qquad \text{se } x \text{ for um número irracional,} \tag{7}$$

$$\text{b)} \quad f(x) = 1 \ \text{ e } \ g(x) = x, \qquad \text{se } x \text{ for um número racional,} \tag{8}$$

$$\text{c)} \quad h(x) = 1/n, \qquad \text{se } x = m/n \text{ for um racional (sem fator comum),} \tag{9}$$

$$\text{d)} \quad h(x) = 1, \qquad \text{se } x = 0. \tag{10}$$

Mostre que f não é contínua em nenhum ponto de $[0, 1]$, g é contínua somente no ponto $x = 0$, e h é contínua apenas nos pontos irracionais de $[0, 1]$.

Exercício 41. Considere a seguinte função definida no intervalo $[0, 1] \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \text{ é um racional,} \\ 1 - x & \text{se } x \text{ é um irracional.} \end{cases}$$

Mostre que:

a) $f(f(x)) = x$ para todo $x \in [0, 1]$,

b) $f(x) + f(1 - x) = 1$ para todo $x \in [0, 1]$,

c) f é contínua somente no ponto $x = 1/2$,

d) f assume qualquer valor entre 0 e 1,

e) $f(x + y) - f(x) - f(y)$ é racional para todo $x, y \in [0, 1]$.

Exercício 42. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e suponha que existe $x_0 \in \mathbb{R}$ na qual a função f é contínua. Suponha também que, para todo $x, y \in \mathbb{R}$, f satisfaz a equação $f(x + y) = f(x) + f(y)$. Mostre que existe uma constante $a \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = ax$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Dica: Mostre primeiro que se f é contínua em $x_0 \in \mathbb{R}$, então f é contínua em todo $x \in \mathbb{R}$. Depois, mostre que $f(n) = an$ para todo inteiro positivo n. Finalmente, mostre que $f(q) = aq$ para todo $q \in \mathbb{Q}$ e use a continuidade de f para concluir que $f(x) = ax$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Fazer também os exercícios: *1, 14, 16, 18 do Capítulo 4 do Livro Texto.*

5 Derivadas

Exercício 43. Mostre que a n-ésima derivada do produto h de duas funções f e g satisfaz a seguinte equação chamada *fórmula de Leibnitz*:

$$h^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x), \tag{11}$$

onde

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Exercício 44. Seja $f : [a, b] \to [a, b]$ uma função contínua em todo intervalo $[a, b]$ e diferenciável em (a, b), com $|f'(x)| \leq \alpha < 1$ para todo $x \in (a, b)$. Mostre que f possui um único ponto fixo em $[a, b]$, ou seja, existe um único $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = c$.

Exercício 45. Determine os intervalos nos quais as funções f e g são crescente ou decrescente. Determine também os pontos de máximo e mínimo, se existirem.

$$\text{a) } f(x) = x^3 + ax + b, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{12}$$

$$\text{b) } g(x) = \log(x^2 - 9), \quad |x| > 3. \tag{13}$$

Exercício 46. Encontre o polinômio p de menor grau tal que

$$p(x_1) = a_1, \quad p(x_2) = a_2, \quad p'(x_1) = b_1, \quad p'(x_2) = b_2, \tag{14}$$

onde $x_1 \neq x_2$ e a_1, a_2, b_1 e b_2 são numeros reais dados.

Exercício 47. Mostre que a fórmula no teorema do valor médio pode ser escrita como

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x + \theta h),$$

onde $0 < \theta < 1$. Determine θ como uma função de x e h quando

a) $f(x) = x^2$,

b) $f(x) = e^x$.

Exercício 48. Seja f uma função tal que sua derivada é definida e satisfaz $|f'(x)| < 1$ para todo x no intervalo $0 < x \leq 1$. Defina a sequência $a_n = f(1/n)$, para $n = 1, 2, \ldots$, e mostre que $\lim_{n\to\infty} a_n$ existe.
Dica: Use o critério de Cauchy.

Exercício 49. Suponha que f tem derivada finita em (a, b) e é contínua em $[a, b]$ com $f(a) = f(b) = 0$. Mostre que para todo real λ existe algum c em (a, b) tal que $f'(c) = \lambda f(c)$.
Dica: Aplique o teorema do valor médio no produto $g(x)f(x)$ para uma certa função g que depende de λ.

Fazer também os exercícios: *1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 22 do Capítulo 5 do Livro Texto.*